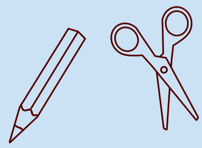
MATHコン
～数理の輝き 見つけて活かす～

塩野直道記念
算数・数学の自由研究 作品コンクール 事例集

中学校・高等学校用

中学生，高校生のみなさんへ



「算数・数学の自由研究」と聞いて，あなたは何を思い浮かべますか?

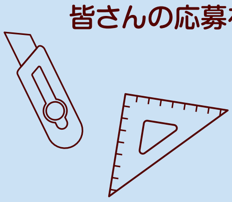
おそらく多くの人は「自由研究って理科や社会科ならイメージがわくけど，数学で何をするの?」と首を傾げることでしょう。

実は私たちを取り巻く事象の多くは数学的な見方や考え方で構成されています。

算数・数学は，単純に計算能力を身につけるためだけの学問ではありません。例えば鉛筆の形はなぜ六角形なのかなど，当たり前だと思っていることの中に算数・数学は隠れています。算数・数学の面白さや美しさ，生活の中でどのように役立っているかなど，皆さんが学んできたことを利用してレポートにまとめてみませんか。

ぜひ「算数・数学の自由研究」作品コンクールに応募して，課題の解決や学習成果の活用にチャレンジしてみてください。

皆さんの応募をお待ちしています。



「算数・数学の自由研究」作品コンクール
中央審査委員長　根上 生也
（横浜国立大学大学院 教授）

この事例集は,「算数・数学の自由研究ってどんなもの?」という声にお応えするため，応募された作品の“学校名”や“氏名”などを削除するなどして作成しました。そのため,一部「レポートの形式」に合っていない場合がありますので,ご注意ください。

Rimse

中学校２年生 作品例

全6ページ

納豆の粒の体積比を探る(パート2)

1. 研究の動機

僕は昨年の夏休みの自由研究で、『納豆の粒の体積比を探る』について研究しました。納豆の1パックは何グラムあるのか、納豆の粒の大きさは何種類あるのか、1パックあたり何粒入っているか、のデータを取り、比較式に当てはめて体積比を探る実験検証をしました。

数か月後、MATHコン（理数教育研究所Rimse塩野直道記念 算数・数学の自由研究作品コンクール）から、下記内容の審査委員からのメッセージがありました。

メッセージ内容 ： 結果では、粒の個数の比が3：1ということでしたが、一般に、相似な立体において、体積比は相似比の3乗になるので、このこととの整合性について検証するとなお良かったです。
（一部省略）

このメッセージを見てもう一度実験検証しようと思い、『納豆の粒の体積比を探る(パート2)』として研究したいと思います。

2.研究の方法と内容

（1）納豆ついての調査

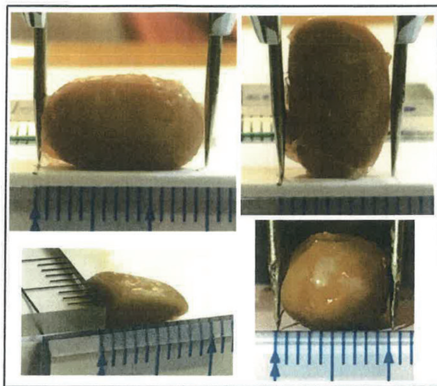
① 粒の大きさについて
納豆は、極大粒＞大粒＞中粒＞小粒＞極小粒＞超極小粒の順で粒の大きさは6展開で販売されています。
納豆の粒の大きさは、極小粒/小粒納豆が主流で、陳列棚の約75%を占めています。（ひきわり納豆は、粉砕してある為除く。）

② 1パックあたりのgについて
1パックあたりのgに関しては、40gと45gと50gが主流です。
大体、2パック又は3パックで1セットとして販売されています。

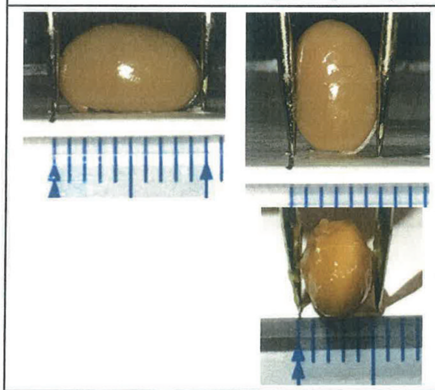
（2）納豆の粒を数える（納豆粒数調査表）

【調査条件】
① 1パックあたり40g、45g、50g納豆で、極大粒、大粒、中粒、小粒、極小粒、超極小粒の納豆の粒数を数える。
② 色々な種類の納豆を調査する。
③ 納豆の粒が欠けている場合
→ 半欠け0. 5粒と判断できた場合は0. 5粒としてカウントする。

② 大粒納豆と小粒納豆の粒のサイズを測り、楕円の公式にあてはめる



大粒納豆 S 外観
＜長半径a＞ 0.75cm
＜短半径b＞ 0.45cm
＜中心からの奥行c＞ 0.5cm



極小粒納豆 R 外観
＜長半径a＞ 0.5cm
＜短半径b＞ 0.3cm
＜中心からの奥行c＞ 0.25cm

3. 研究結果とまとめ

2の（3）①納豆の粒数を比較式に当てはめるでは、

・極小粒納豆の1パックあたりの粒数と大粒納豆の1パックあたりの粒数を数え、
・比較式　X：Y＝３：１　にあてはめてみた結果、

極小粒納豆の3粒：大粒納豆の1粒は、3：1にかなり近いという結果になりました。

2の（3）の②相似な立体において、体積比は相似比の3乗になるかでは、

・大粒納豆と小粒納豆のサイズを測り、
・サイズデータを楕円の公式（$V=4/3\pi abc$）にあてはめて出した体積比と、
・相似比の3乗を利用した体積比を比べた結果、

極小粒納豆と大粒納豆の体積比は、どちらの検証もほぼ同じ体積比になったので、一般に、相似な立体において、体積比は相似比の3乗になることが分かりました。

4. 感想と課題

一年目の研究で不十分だった点を、MATHコンの審査員の方からいただいたメッセージで、二年目の課題として、本研究にて解決することが出来て良かったと思いました。

本研究途中に、水が入ったコップに納豆を入れ、溢れた水の量を測り、納豆で割り、体積を求めようと試みましたが、表面張力などの問題が発生してしまい、実験を断念しました。様々な方法で実験に取り組み本研究を行うことが出来て、自分自身のためになったと思います。

納豆のサイズを測るにしても、重さを正確に測るにしても、細かいデータが取れる専門的な機材が家庭には無いため、研究に限界を感じたところもあります。
でも、今、自分自身に出来ることを出し切り、工夫し、研究できたことは僕にとってとても良い経験になりました。

その他　参考文献なし

昨年度応募した自由研究「納豆の粒の体積比を探る」に対する審査委員からの指摘事項を受け，相似比と体積比の関係の整合性を検討し直し，継続的に研究に取り組んでいるところが素晴らしいですね。納豆を粒の大きさや1パック当たりの重さに着目して丁寧に場合分けすることから始め，表や図を使って研究の経過がわかりやすくまとめられています。自分なりに工夫して取り組んだものの，うまく行かなかった実験の紹介もたいへん興味深く，そのアイデアには感心しました。

中学校３年生 作品例

全10ページ

歩かなくてもいいんじゃないですか…？

～エスカレーターの効率について考える～

1．研究の動機

エスカレーターで歩く人をよく見かける。急いでいる人のためにエスカレーターの片側を空けることが暗黙のルールにすらなっている。ところが、最近ロンドンの地下鉄で行われた実験で、２列のエスカレーターで１列は止まってもう１列は歩いて移動するよりも、２列とも止まっていた方が輸送効率が高いことが分かったらしい。

いつも少しでも早く行こうとエスカレーターを歩く僕はこれに驚き、検証してみたいと思った。

2．研究の方法

次の条件をいろいろ変えてエスカレーターの輸送人数を計算した。

- エスカレーターの速度（1段／秒～4段／秒）
- 歩く速度（0段／秒～1.5段／秒）
- エスカレーターの乗り込み率（100%～50%）

乗り込み率 100%　　乗り込み率 75%　　乗り込み率 50%

計算①：

輸送人数をｙ（人／分）、エスカレーターの速度をｘ（段／秒）として、式を求め、グラフに表した。

計算②：

輸送人数をｙ（人／分）、乗り込み率をｘ（％）として、式を求め、グラフに表した。

３－①－４．エスカレーター上を１．５段／秒の速度で歩いた場合

エスカレーターの速度をｘ（段／秒）とすると、人が移動する速度は（ｘ＋１．５）（段／秒）。

乗り込み率１００％のときの輸送人数ｙは：

ｙ＝　（ｘ＋１．５）　×　６０

＝６０ｘ＋９０

乗り込み率が７５％の場合：

ｙ＝　（ｘ＋１．５）　×　６０　×　０．７５

＝４５ｘ＋６７．５

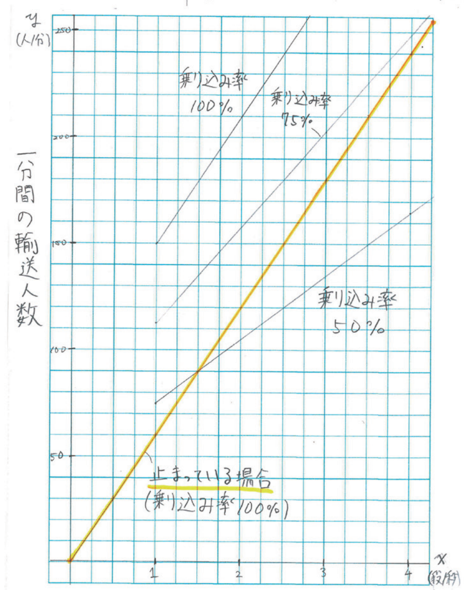
同様に、乗り込み率５０％の場合：

ｙ＝　（ｘ＋１．５）　×　６０　×　０．５

＝３０ｘ＋４５

エスカレーターの速度が速くなり、歩くレーンの乗り込み率が下がるにつれ、止まっているレーンの輸送人数との差が小さくなっていき、遂には逆転する！

歩いている場合（歩行速度1.5段/秒）



エスカレーターの速度

例えば、エスカレータ一上で止まっていて、乗り込み率が１００％の場合を考える。輸送人数は６０人／分。上のグラフから、エスカレーター上を１．０段／秒の速度で歩いている場合は、乗り込み率が５０％以下になると、輸送人数が止まっているレーンの輸送人数を下回る。歩く速度が０．５段／秒の場合は乗り込み率が約６７％以下、１．５段／秒の場合は乗り込み率が４０％以下になると歩いているレーンの輸送人数を下回ることが分かる。

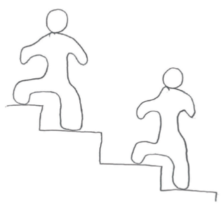
ただし、止まっているレーンも荷物などが置かれると１００％にはならないので、**７５％**（４段に１段空いている）で考えてみる。７５％の場合は４５人／分だから、歩いているレーンがこの輸送人数を下回る乗り込み率は、**０．５段／秒で５０％、１．０段／秒で約３８％、１．５段／秒で３０％**となる。

また、歩いているレーンは乗り込み率が１００％になることはあり得ない（全員が同時に階段を上らなくてはならない）。混んでいても２段に１人（＝乗り込み率５０％）か、実際は３～４段に１人しか乗っていない（＝乗り込み率３３～２５％）。

（人は人との接触を好まず、「human ellipse（人間の楕円）」と言われる空間を必要とする。エスカレーター上を歩く場合は止まっている場合よりも多くの空間が必要になると思われる）

駅でエスカレーターを歩く人の速度を観察したところ、空いている場合は１．５段／秒程度だったが、混雑している場合はかなり遅かった。つまり、歩くレーンは乗り込み率が高くなるほど、歩く速度は遅くなる。

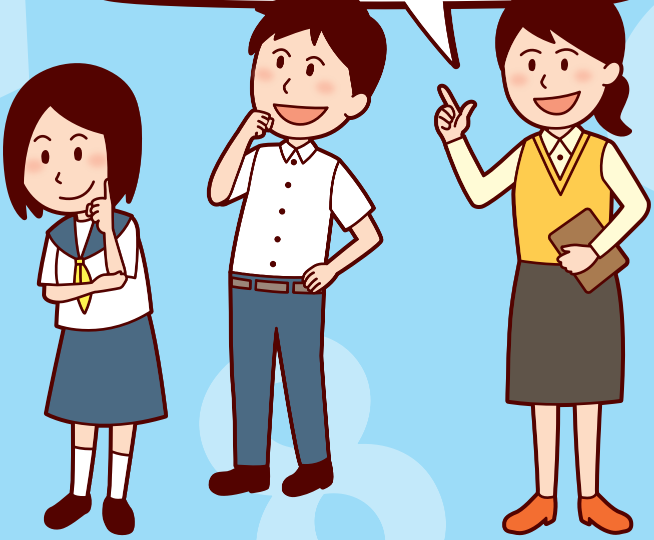
これらのことから、**止まっているレーンの輸送人数が歩いているレーンの輸送人数を上回ることは十分にあり得る**。



エスカレーターを歩く場合

乗り込み率が50%を越えることはない

エスカレーターの片側レーンには立ち止まる人が乗り，もう一方のレーンは歩く人が乗るという光景から，輸送効率の違いに着目したところに感心しました。エスカレーターを歩く人の速度を変えながら，エスカレーターの速度と1分間の輸送人数の関係を一次関数としてとらえ，グラフを使って比較しているところがたいへん素晴らしいと思います。止まっているレーンの輸送人数が歩いているレーンの輸送人数を上回ることは十分にあり得るという結論にもとても驚きました。



中学校３年生 作品例

全10ページ

早ゆでスパゲティの秘密を探る

1．研究の動機

母とスーパーに買い物に行ったときに、ゆで時間の違うスパゲティがありました。母に「このスパゲティはなぜゆで時間が違うのか」と聞くと、「太さが違うからゆで時間が違う」と教えてもらいました。

しかし、スーパーの棚には、早ゆでスパゲティという商品もあり、同じ太さでもゆで時間が短いスパゲティもありました。

そこで、早ゆでスパゲティの特徴を考え、ゆで時間との関係をグラフで表して、早ゆでスパゲティの謎を数学的に確認してみてみたいと考えました。

2．研究の方法や内容

（1）通常のスパゲティの直径とゆで時間の関係を関数で表してみる

（2）早ゆでスパゲティの直径とゆで時間をグラフにあてはめてみる

（3）早ゆでスパゲティの断面の特徴を考える

（4）早ゆでスパゲティの断面の外周の長さを調べる

（5）スパゲティのゆでやすさとゆで時間の関係をグラフで表現する

3．研究の結果と考察

（1）通常のスパゲティの直径とゆで時間の関係を関数で表してみる

円形の断面をもつ通常のスパゲティとして販売していたのは、表１の３種類でした。

表１　円形の断面をもつスパゲティ（通常のスパゲティ）直径とゆで時間

直径	ゆで時間
1.4mm	5分
1.6mm	7分
1.8mm	11分

この直径とゆで時間の関係をグラフにすると次ページの図１のようになります。

なお、グラフは、父親から教えてもらって、表計算ソフト（Microsoft EXCEL）を利用して作成しました。

1

図７　通常のスパゲティと早ゆでスパゲティの重さと長さの計測

断面積が同じで、ゆで時間が違うのであれば、ゆで時間に影響を与えるのは、スパゲティがお湯に接する面積であり、断面で見ると外周の長さが大事なのだと思います。

（4）早ゆでスパゲティの断面の外周の長さを調べる

そこで、早ゆでスパゲティの断面の外周の長さを調べることとしました。

しかし、早ゆでスパゲティの断面は非常に小さく、また複雑な形をしているので、面積や長さを測ることはとても難しいです。そこで、断面の形状を図８のように３つに分割して方眼にあてはめ、１つの図形に入るマスの数を数えました。その結果、図形内に全部入るマスは 443 個、一部入るマスは 156 個であることが分かりました。一部入るマスを半分の面積(0.5)で計算すると、１つの図形で 521 マス分の面積が入ることが分かり、これを３倍することにより、早ゆでスパゲティの断面には約 1563 個のマスが入ることになります。

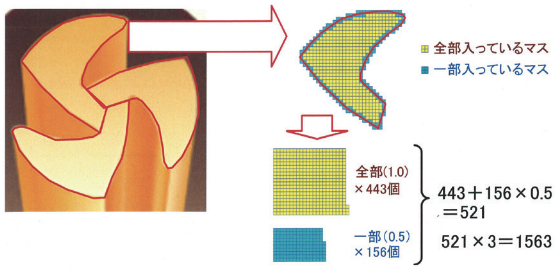


図８　早ゆでスパゲティの断面の面積（マスの数）の求め方

6

1.4mm の早ゆでスパゲティの(x,y)は(0.205882,2)、1.8mm の通常のスパゲティは(0.45,11)なので、傾き a＝36.867 となり、2－0.20588×36.867＝－5.59 となるので、ｙ切片のｂ＝－5.59 となります。

・1.4mm 早ゆでスパゲティと 1.8mm 通常のスパゲティによる一次関数：ｙ＝36.867ｘ－5.59

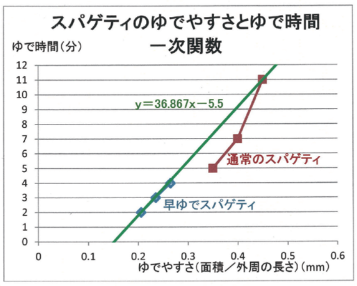


図 12　スパゲティのゆでやすさ（断面積／外周の長さ）とゆで時間の一次関数

通常のスパゲティの 1.4mm と 1.6mm が少しずれていますが、スパゲティのゆでやすさ（断面積／外周の長さ）が、ゆで時間の大小を表していることが分かります。

4．感想と今後の課題

買い物先のスーパーで感じた疑問から、早ゆでスパゲティの断面の特徴を観察し、断面積を外周の長さで割った「スパゲティのゆでやすさ」を考えることができました。

特に、学校の授業で習った一次関数や二次関数を用いて、グラフを作成することができ、とても面白かったです。また、いろいろなことをグラフ化することにより、その特徴を考えることができることがよく分かりました。

また、複雑な図形の面積や長さを求めるため、方眼にあてはめ、マスの数と単純な図形を使う方法を教わり、実際にやってみることができました。

さらに、今回、WORD での文章の書き方や写真や図の貼り付け、EXCEL でのグラフのかき方、VISIO での図の作成方法などを父より教わり、パソコンにも興味を持つことができました。

ただし、残念だったのは、「スパゲティのゆでやすさ」を使ったグラフでも、全てのスパゲティのゆで時間を表現する関数を作成することができなかったことです。一次関数や二次関数以外の関数や、回帰分析とよばれる方法もあるということですので、今後はぜひそれらについても試してみたいと思います。

最後に、早ゆでスパゲティを家族で食べました。ゆで時間は短いのに、とてもおいしく、よく工夫されているなと感じました。私もこのような工夫を考えられるようになりたいです。

10

スーパーマーケットでの買い物の中で，同じ太さでもゆで時間が短いスパゲティがあることに疑問を持ち，テーマに設定した点が素晴らしいですね。多くの人が日頃から目にするものの中に疑問を感じ，研究の対象にすることはとても大切なことです。あなたが学んでいる数学は，この研究から導かれたことのように，身の回りのさまざまな場面で利用されています。ほかにはどのような場面で利用されているか，これからもぜひ探してみてください。毎日の学習がもっと楽しくなると思いますよ。

高等学校２年生 作品例

全4ページ

フィボナッチ数列の倍数、約数の関係

1　動機

数学オリンピックの添削問題のコメントで、和の漸化式で表わされるフィボナッチ数列の倍数・約数の性質が書かれていたので、不思議に思い証明したいと思った。

2　本題

定理 2.1　フィボナッチ数列 $a_1=1$,$a_2=1$,$a_{n+2}=a_n+a_{n+1}$ において

$$gcd(a_m,a_n)=a_{gcd(m,n)}$$

が成り立つ。

証明 2.2　$m=n$ の時は明らかなのでよい。
一般性を失わずに $m<n$ とおける。
まず以下の補題 2.3 を示す。

補題 2.3

$$a_n=a_m a_{n-m+1}+a_{m-1}a_{n-m}(n>m,m>1)$$

が成り立つ。

証明 2.4　m に関する帰納法により示す。

(i)　$m=2$ の時
そのまま与式に代入して、$a_n=a_{n-1}+a_{n-2}$ を得る。
これは定義のままであるので成立する。

(ii)　$m=k$ で成立するとして $m=k+1$ の時 $(k+1<n)$
仮定より $a_n=a_k a_{n-k+1}+a_{k-1}a_{n-k}$ が成り立つ。
定義より $a_{n-k+1}=a_{n-k}+a_{n-k-1}$ なので、

$$\begin{aligned} a_n=a_k(a_{n-k}+a_{n-k-1})+a_{k-1}a_{n-k}&=a_{n-k}(a_k+a_{k-1})+a_{n-k-1}a_k \\ &=a_{k+1}a_{n-k}+a_k a_{n-k-1} \end{aligned}$$

が成り立つ。よって、$m=k+1$ の時も成り立つことが示された。 □

となって成立する。
よって、いずれの場合も成立するので、$n=k+1$ の場合も成り立つ。 □

ここで、定理 2.1 の証明時と同様に、$gcd(a_{pm+1},a_{pm})=1$ である。
また、補題 3.3 より、$a_{pm}\equiv 0$ であるので、$gcd(a_{pm+1},a_m)=1$ である。
よって、

$$a_m|a_n \Leftrightarrow a_n\equiv 0 \Leftrightarrow a_q a_{pm+1}\equiv 0 \Leftrightarrow a_q\equiv 0 \Leftrightarrow m|n$$

であるので、示された。 □

4　関連 2

定理 2.1 より、a_{2n}/a_n は整数である。ここで、数列 b_n を $b_n=\frac{a_{2n}}{a_n}$ で定義する。
この b_n について考察する。

定理 4.1　b_n は $b_1=1,b_2=3$ で、$b_{n+2}=b_{n+1}+b_n$ となる。

証明 4.2

$$a_{n+2}=a_{n+1}+a_n \Leftrightarrow a_{n+2}-\frac{1+\sqrt{5}}{2}a_{n+1}=\frac{1-\sqrt{5}}{2}(a_{n+1}-\frac{1+\sqrt{5}}{2}a_n)$$

であり、

$$a_2-\frac{1+\sqrt{5}}{2}a_1=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

なので、

$$a_{n+1}-\frac{1+\sqrt{5}}{2}a_n=(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n$$

である。
同様にして、

$$a_{n+2}=a_{n+1}+a_n \Leftrightarrow a_{n+2}-\frac{1-\sqrt{5}}{2}a_{n+1}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}(a_{n+1}-\frac{1-\sqrt{5}}{2}a_n)$$

であり、

$$a_{n+1}-\frac{1-\sqrt{5}}{2}a_n=(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n$$

である。
よって、

$$a_n=\frac{1}{\sqrt{5}}((\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n-(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n)$$

と表わされる。
ここで、数列 c_n を $c_1=1,c_2=3$ で、$c_{n+2}=c_{n+1}+c_n$ で定義する。

全く同様にして、

$$c_{n+1}-\frac{1+\sqrt{5}}{2}c_n=-\sqrt{5}(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n$$

である。また、

$$c_{n+1}-\frac{1-\sqrt{5}}{2}c_n=\sqrt{5}(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n$$

である。
よって、

$$c_n=(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n+(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n$$

と表わされる。
よって、明らかに $c_n=\frac{a_{2n}}{a_n}$ は成立するので、$b_n=c_n$ であり、題意は示された。 □

5　関連 3

これはフィボナッチ数列とは関係ないが、定理 2.1 の証明方法を使ってあることが証明できたので紹介する。

定理 5.1　X を 2 以上の整数,m,n を正の整数とする。すると、

$$gcd(X^m-1,X^n-1)=X^{gcd(m,n)}-1$$

となる。

証明 5.2　$m=n$ の時は明らかなので、一般性を失わずに $m<n$ とおいてよい。
数列 a_n を、$a_n=X^n-1$ で定義する。
すると、

$$\begin{aligned} gcd(a_m,a_n)=gcd(a_n-a_m,a_n)&=gcd(X^m(X^{n-m}-1),X^n-1) \\ &=gcd(X^{n-m}-1,X^m-1)=gcd(a_{n-m},a_n) \end{aligned}$$

が成り立つので、定理 2.1 の時と同様に添え字に関する互除法ができて、$gcd(a_m,a_n)=a_{gcd(m,n)}$ が成り立つ。
これは与式そのものである。 □

6　感想

定理 2.1 を証明するまでが大変でした。
元の問題は $gcd(a_m,a_n)=a_{gcd(m,n)}$ を満たす数列についてのものだったのですが、このような a_n にはどういうものがあるのかなあと思っていたら定理 5.1 が思い浮かび、非常にきれいに証明できたので満足しています。
他にもこの条件を満たす数列はたくさんあると思うので、発見していけたらなあと思います。

フィボナッチ数列の性質について，自分の感じた不思議さを大切にして証明に取り組んでいるところが素晴らしいです。回り道はするかもしれませんが,試行錯誤しながら,学んだ数学を活かして考えを深めていくことで得られるものは多いと思います。定理4.1の結論は興味深いですね。さらに一般化して，数列 a_{kn}/a_n がどのような性質を持っているのかを考えてみてはどうでしょうか。感想にもあるとおり，$gcd(a_m,a_n)=a_{gcd(m,n)}$ を満たす数列に関する新たな発見にも期待しています。

高等学校３年生 作品例

全9ページ

トランプのあるシャッフルとその代数方程式

１．研究の動機や目的

身近な遊びにトランプがあり、このトランプ遊びでよく行う行為が “シャッフル”。普段何気なく行っているこの行為が数学的に結びつくのではないかと考え、トランプの切った回数を代数方程式を解いて求めることを目的として研究を進めた。

２．研究の内容と方法

ⅰ．「シャッフルする」「切る」というのを、トランプの決まった枚数を下から上にあげる試行とし、シャッフルをして初めて元の配置に戻るまでの回数を調べる。

ⅱ．切り方（A 枚、B 枚…、または、A 枚、B 枚、C 枚…）とカードの全枚数（n）を変えながらⅰを行う。

３．研究の結果

試行１　トランプの枚数を６枚（$n=6$）、切り方を４枚、４枚…とするとき（$A=B=4$）

図１をもとに、式をたてる。太線の枠の個数を x、細線の枠の個数を y（切る回数）とすると、次のような式がたてられる。

$6x=4y$

方法ⅰより、x と y はこの式を満たす最小値となり、x と y は自然数となる。

したがって、$x=2$、$y=3$ となり、トランプを切る回数は３回となる。

また、図１をもとに合同式を用いて x、y を求めることができる。

$6x=4y$　…＊

$3x=2y$

$3x\equiv 0 \pmod 2$

$2x+x\equiv 0 \pmod 2$

$x\equiv 0 \pmod 2$

x は自然数なので、$x=2$

＊より、$y=3$

したがって、$x=2$、$y=3$

全枚数(n)	切った回数(y)	余り
5	5	0
6	3	0
7	7	0
8	2	0
9	9	0
10	5	0
11	11	0
12	3	0

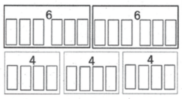


図１

太枠:カードの枚数
細枠:切り方
※枠内の四角形はトランプを表す。

※以下、図の説明は同様とする。

試行２　切り方を２枚、３枚、２枚、３枚…とするとき（$A=2$、$B=3$）

全枚数（n）	切った回数（y）	余り	
6	5	2	…試行２　②
7	3	2	
8	13	2	
9	11	2	
10	4	0	…試行２　①
11	9	2	
12	5	2	
13	21	2	
14	17	2	
15	6	0	

二重線の区切りは、A+B の倍数ごとに余りの出方に規則性があることを表している。

①カードの枚数が10枚（$n=10$）のとき

太線の枠の個数を x、細線の枠の個数を y（切る回数）、点線の枠の個数を z（$=A+B$）とする。方法ⅰより、x と z はこの式を満たす最小値となり、また x、y はそれぞれの枠の個数を表しているため自然数となり、z に関しては点線の枠ができないこともあるので、0 以上の整数となる。（以下の試行も同様）

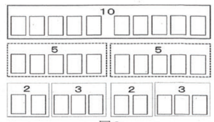


図２

図２より、次のような式がたてられる。

$10x=5z$

したがって、$x=1$、$z=2$ となる。

点線の枠は、A と B のまとまりを１つとしてみたもので、細線の枠２つから成り立っているので、y を求める式は、$y=2z$ となる。

$z=2$ より、$y=4$

ゆえに、トランプを切る回数は４回となる。

②カードの枚数が６枚（$n=6$）のとき

図３より、次のような式がたてられる。

$6x=5z+2$

したがって、$x=2$、$z=2$ となる。

この試行の場合、 シャッフルは A で切り終わり、点線の枠で囲めない A の部分も切った回数に含むので、y を求める式は、$y=2z+1$ となる。

$z=2$ より、$y=5$

ゆえに、トランプを切る回数は５回となる。

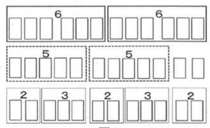


図３

また、図３をもとに合同式を用いて x、z、y を求めると

$6x=5z+2$　…＊

$6x\equiv 2 \pmod 5$

$5x+x\equiv 2 \pmod 5$

$x\equiv 2 \pmod 5$

$x=2$

＊より、$z=2$

$y=2z+1$ であり、$z=2$ より、$y=5$

したがって、$x=2$、$y=5$、$z=2$

試行３　切り方を１枚, ３枚, １枚, ３枚…とするとき（$A=1$、$B=3$）

全枚数（n）	切った回数（y）	余り	
5	3	1	
6	6	0	…試行３　③
7	11	1	
8	4	0	…試行３　①
9	5	1	…試行３　②
10	2	0	
11	3	1	
12	6	0	

二重線の区切りは、A+B の倍数ごとに余りの出方に規則性があることを表している。

４．考察

以上の試行から次のことが考えられる。

①(A+B)が素数のとき
- n の値が(A+B)の倍数のとき, 余りは 0 になる。
- n の値が(A+B)の倍数でないとき, 余りが 0 になることはない。
- n の値が(A+B)の倍数でないとき, 余りは A になる。
- (A+B)の倍数ごとに余りの出方に規則性がある。

②(A+B+C)が素数のとき
- n の値が(A+B+C)の倍数のとき, 余りは 0 になる。
- n の値が(A+B+C)の倍数でないとき, 余りが 0 になることはない。
- n の値が(A+B+C)の倍数でないとき, 余りは A あるいは(A+B)になる。
- (A+B+C)の倍数ごとに余りの出方に規則性がある。

③(A+B)が合成数のとき
- n の値が(A+B)の倍数のとき, 余りは 0 になる。
- n の値が(A+B)の倍数でないとき, 余りは 0 あるいは A になる。
- (A+B)の倍数ごとに余りの出方に規則性がある。

④(A+B+C)が合成数のとき
- n の値が(A+B+C)の倍数のとき, 余りは 0 になる。
- n の値が(A+B+C)の倍数でないとき, 余りは 0, A あるいは(A+B)になる。
- (A+B+C)の倍数ごとに余りの出方に規則性がある。

これらのことから、次のような式がたてられる。

まず、試行１のように

①$A=B$ のとき　　$nx=Ay$

次に、試行２、試行３のように

②$A\neq B$ のとき

（ⅰ）A+B が素数

◦ n が A+B の倍数のとき
$nx=(A+B)z$
カードを切る回数: $y=2z$

◦ n が A+B の倍数でない
$nx=(A+B)z+A$
カードを切る回数: $y=2z+1$

（ⅱ）A+B が合成数

◦ n が A+B の倍数のとき
$nx=(A+B)z$
カードを切る回数: $2z$

◦ n が A+B の倍数でない、かつ A で切り終わるとき
$nx=(A+B)z+A$
カードを切る回数: $y=2z+1$

◦ n が A+B の倍数でない、かつ B で切り終わるとき
$nx=(A+B)z$
カードを切る回数: $y=2z$

これらの x, y, z, の値が小さいほうを答えとする。

トランプで遊ぶときには誰でもするシャッフルという行為に着目して，数学的にとらえられるのではないかと考えたところに感心しました。こうした現象を式で表すことができるという発見は，大きな驚きだったことでしょう。カードの枚数と切り方を変えながら取り組んだ5回の試行による分析も，よく整理されていてたいへん素晴らしいですね。試行の過程が図を使ってわかりやすく表現されている点や，合同式を活用して考察を進めている点も高く評価できます。

研究テーマの例

ご紹介した自由研究作品のほかにも，こんな自由研究のテーマがありました（一部）。

中学校　タイトル一覧
メロスの全力を検証
「デザイン定規」&「ローリングルーラー」は,なぜ美しい図形が描けるのか?
どこまでもついてくる闇の関係
めざましじゃんけんの不思議
速く連絡網をまわすには?
ボールペンに突撃インタビュー　ボールペンの経済的比較
ミウラ折りについて
球の体積と表面積を求める公式を確かめる
新しい公式を自分でつくろう!
対向車ナンバー予想ゲーム必勝法
板チョコを無限に食べる方法　～本当に実現することができるのか!?～
出来るだけたくさんのものを入れたい!!!
平方数同士の差の不思議
黒田官兵衛の水攻めを徹底検証!
数学で国語を斬る!
我が家の地球温暖化対策　～家庭のCO_2排出･削減量を計算してみよう～
チラシに隠された秘密を暴け!　―数字で紐解く心理学―
ファストパスを有効に使え!!　～ディズニーランド攻略法～（の一部）
甲子園の予選から,夏の甲子園の結果を大予想する。
桐の家紋ではどの形が美しく見えるのか?
四国の電力補完計画
積のロマン
“秘伝のタレの寿命は何歳?”～鰻数列の解明～
EVOLUTION TO FUTURE
じゃんけんの不思議
折り紙で新しいくす玉を作る　～多面体との関係性～
合区について考える
折り紙の一辺を2～10等分しよう!
いざ!ミレニアム問題…まずは素数を知ろう。
数学を使って魚をもっと釣れ!!
≪私は『トリプルジャンプ』を跳ぶべきか?≫
新幹線のお得さを考える
偏差値の正体をあばけ!!
安来市月ノ輪祭りの花火の計算
コンビニを,どこに建てる?
電話連絡網の効率性を徹底追求!!
どーんと（Don' t）桜島!
「球に近い」ということは,どういうことなのかを考える
ほしのうた
テニスコート作り時短レシピ　～作図と三平方の定理を利用して～
ウランバートル数学オリンピアード問題に由来するある研究
いざ!ミレニアム問題part2 …素数の間隔の謎をさぐる。
長方形を奇数等分する方法を調べる
循環する無限小数の循環節の長さに規則性はあるのだろうか?
2016年 リオオリンピック日本卓球女子団体戦を分析する
QRコードに隠された数学　～誤り検出･誤り訂正符号の秘密～
見た目の形と距離の関係 ～地面のタイルまでの距離が遠くなると,タイルが平たく見えるのはなぜだろう??～
驚き!　高校野球には勝利の法則があった!?
自然数の分割方法と謎の三角形
数独を作ってみよう!
四色問題は,五色問題?…いや,「ほぼ三色」問題!?
三角形及びその辺を準線とする放物線の性質
印象派な言語たち
アイスより当たります
フィボナッチ数列は2進数でも美しいのか
第7回JJMO本戦第5問の解法の多様化･3次元空間での拡張について
1/9801の謎を解き明かしていくと,どこにたどり着くのだろうか?
月は,地球を何回救ってくれたのだろう?　～小天体の衝突を分析する～
真ん中を探せ!　～様々な真ん中の決め方～
“数える”ということ
折り紙の技術で電球カバー用正角柱を作る ～熊本銘菓「誉の陣太鼓」の紙缶詰技術を参考に～
正四角錐の切断　～分類と描画法～
色相空間　～音と色の空間絵本～

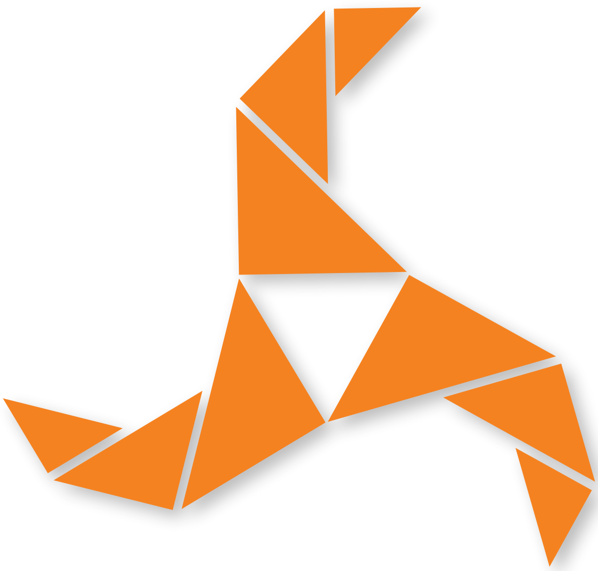
高等学校　タイトル一覧
野球の最適打順の数学的考察
外心と傍心,内角の二等分線の関係について
ベン図についての七章
線分を任意の個数に等分する方法　“漸近法”についての考察
階乗進法とベキ進法　～n進法の拡張～
青の限界
何乗しても下n桁が変わらない数
PINEAPPLEとp進数
コーヒーカップの描く軌跡
美しい方陣
ゲームを数学する　～新しいゲームの作成と奥深さの表現～
汎魔方陣の研究　～5次汎魔方陣の総数を桂馬飛び法から導く～
データの特徴を表す関数の作成
立方体･直方体の包装
約数の和の公式
指数関数と対数関数のグラフの交点
貝殻島灯台は必要か
ペル方程式の拡張について
eが循環小数になる記数法?!?　続　階乗進法 ～n進法の拡張～
渋滞を数学的に捉える。
万華鏡の鏡はなぜ正三角形なのか?
気になる偏差値
タイリング
最適なクモの巣の形とは?　～獲物の捕獲率に関する数学的な考察～
じゃんけんグリコに隠された秘密
無限等比級数（数学Ⅲ）を小学校の算数で解く
計算ミスによって導かれた興味深い漸化式
“金魚すくいの最適解”
星に願いは叶うのか?
総当たり戦を効率よく行うには?
出席番号に基づく生徒の循環的な指し方とその偏りの考察　～理想は29人の教室～
代数方程式の特殊解の個数
「結び目理論を応用した領域選択ゲーム」における最短手の考察
小谷の蟻問題の拡張　―最も遠い場所はどこ―
コラッツ問題
複素数のことは複素数でわかりたい!
出生率の方程式
分数の割り算では何故逆数を掛けるのか
sin1°の値
竜王のニム:Wythoff Nimの変形
初等幾何と二次曲線
コンプガチャの確率について
チェバの定理α
何色でぬれる?　平面･立体
ベンフォード則の統計的分析
n筆書き
雨の日のコンビニには要注意?!
テトラナッチ数列の一般項を導く
Partner of Fibonacci sequence
迷惑メールフィルターに隠された数学
渋滞学　～表計算ソフトエクセルを利用した渋滞シミュレーションについて～
ババ抜き　～最初にジョーカーを持った人は不利なのか?～
家事と数学の橋渡し
パスカル的三角形とフィボナッチ的数列を作り出すカードゲームに関する研究
2項係数を含む和と変形パスカルの三角形
1/49に隠された様々な等比数列とその規則性
ある条件を満たす置換の個数について
インド式割り算のしくみ
0(ゼロ)で割ることを「考える」
3.14は何角形?
完全数の新たな世界　～3を底に持つ完全数～
n!の素因数分解とオイラー関数
ナイト･ツアーの成立する盤について

MATHコン
～数理の輝き 見つけて活かす～

塩野直道記念「算数・数学の自由研究」作品コンクールのご案内

◆応募のしかたについては，理数教育研究所のHPにある「応募要項」をごらんください。
◆レポートの形式や書き方については，HPにある「レポートの書き方」をごらんください。
◆過去の受賞作品をHPに掲載しています。

HPは　https://www.rimse.or.jp/research/
または　算数・数学の自由研究　で検索



一般財団法人 理数教育研究所
Rimse

大阪オフィス　〒543-0052 大阪市天王寺区大道4丁目3番23号
TEL.06-6775-6538 ／ FAX.06-6775-6515
東京オフィス　〒113-0023 東京都文京区向丘2丁目3番10号
TEL.03-3814-5204 ／ FAX.03-3814-2156
https://www.rimse.or.jp　E-mail：info@rimse.or.jp

（2021年3月発行）