差分代数による多面体の四面体分割における場合の数の定式化

北海道静内高等学校　2年　菅原　諒

1　研究の動機と目的

凸多角形を対角線によっていくつかの三角形に分割する場合の数はカタラン数と呼ばれる数になることがわかっている。この分割は凸多面体をいくつかの四面体に分割する場合に拡大することができる。これを多面体の四面体分割とよぶ。

私は2019年名古屋大学主催日本ジュニア数学コンクール論文賞にて、この多面体の四面体分割という研究で金賞を頂いた。しかし、その論文は自分にとって満足できるものとは到底言い難いものであったため、それ以降も研究を続けてきた。この論文はその現時点での集大成である。私がそのテーマにのめりこんでいった理由は、多面体の複雑さにある。多角形は頂点の数と凹凸によって容易に分類することができるが、多面体はその多角形がどんな種類でどれだけ組み込まれており、どのようなフォーメーションを組んでいるかで全く違う形・性質を呈し、多角形のそれとは比べ物にならないほどの多様性を持っている。その多様性により、多面体の四面体分割における場合の数は、それぞれ複雑に絡み合っているのである。

本論文は、その複雑に絡み合った多面体の四面体分割における場合の数を個々に観察するのではなく、その絡み合いに注目してカタラン数のような美しい数列を多面体の中にも見出して調べることを目的としている。特に後半では、現れた漸化式が持つ性質を差分代数を用いて明らかにする。

2　多角形の三角形分割

多面体の四面体分割について論じる前に、多角形の三角形分割について考える。多角形を互いに交わらない対角線によって、三角形に分割する場合の数（回転や鏡像で移りあうものは区別する）について、次の定理が成り立つ。（証明略）

定理 2.1　$n=1,2,\cdots$ に対して $(n+2)$ 角形の三角形分割における場合の数 c_n は、漸化式

$$c_{n+1}=\sum_{i=0}^{n} c_i c_{n-i}\,,\quad c_0=1$$

を満たし、その一般項及び母関数 $f(x)$ は、

$$c_n=\frac{(2n)!}{(n+1)!\,n!},\qquad f(x)=\frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x}$$

で表される。

3　多面体の分割手法

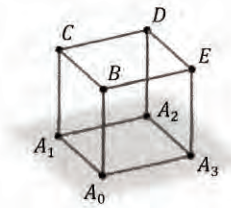
定義 3.1　多面体 P を、3点の頂点を結んでできる三角形を互いに交差しないようにつくり、四面体に分割する場合の数（回転や鏡像で移りあうものは区別する）を P の**四面体分割数**といい、$d(P)$ で表す。

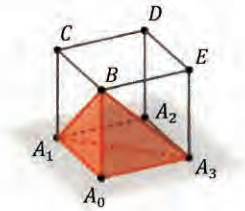
次に述べる多面体の四面体分割の手法は、多角形における分割法の3次元への拡大である。

(1)　多面体 P から面を一つ選び、S とする。この面を**基底面**とよぶ。

(2)　S の各頂点を $A_0,A_1,\cdots,A_{n-1}$ とする。$k=1,2,\cdots,(n-2)$ に対し、A_0A_{n-1} を底辺、A_k を頂点とする△ $A_0A_{n-1}A_k$ をとる。S に含まれない頂点の集合 I から $i\in I$ をとり、$A_0A_{n-1}A_k$ と i で四面体を構成する。k と i に対し四面体 $A_0A_{n-1}A_k i$ はそれぞれ同じ分割に重複することはないので、この四面体を除いた多面体 $P_{k,i}$ の四面体分割数 $d(P_{k,i})$ を全ての k と $i\in I$ について足し合わせたものが $d(P)$ に等しい(図参照)。

$$d(P)=\sum_{k=1}^{n-2}\sum_{i\in I} d(P_{k,i})$$





4　(m,n)-結合型多面体

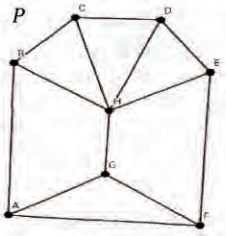
定義 4.1　$m,n\in\mathbb{Z}_{>0}$ の少なくとも一方が3以上であるとする。交差しない m 角形と n 角形（**底面**という）及び、その頂点どうしを結んだ辺と底面の辺とがつくる三角形もしくは四角形（**側面**という）を面のすべてとしてもつ凸多面体を、**(m,n)-結合型多面体**という。

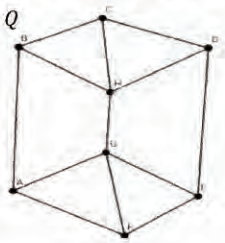
例 4.2　n角錐は $(n,1)$-結合型多面体、n角柱は (n,n)-結合型多面体となる。特に、三角柱は (3,3)-結合型多面体とも (4,2)-結合型多面体ともいえる。

$(n+2,1)$-結合型多面体すなわち $(n+2)$ 角錐については、底面の $(n+2)$角形の三角形分割と $(n+2)$角錐全体の四面体分割が1対1に対応していることから、その四面体分割数 $c_{n+2,1}$ は $(n+2)$角形の三角形分割数 c_n に等しいことがわかる。

$$c_{n+2,1}=c_n$$

次に、$(n+2,2)$-結合型多面体について考える。$(n+2,2)$-結合型多面体においては、n の値が同じでも四面体分割数が異なってしまうという現象が生じることがある。例として (6,2)-結合型多面体をとると、2本の対角線がねじれの位置にない多面体 P と、ねじれの位置にある多面体 Q（図参照）について、$d(P)=80,\ d(Q)=79$ であることがわかっている。





5　単純結合型多面体

このような現象が起きうるため、$(n,2)$-結合型多面体の四面体分割数を n について一つの数列にするためには、多面体に何らかの条件をつける必要があると思われる。そこで、$(n,2)$-結合型多面体の中でも単純な構造をもつ多面体を定義する。

定義 5.1　$(n,2)$-結合型多面体P $(n \geq 4)$ が条件(1),(2)をみたすとき、P を **$(n,2)$-単純結合型多面体**という。$n \geq 3$ で(1)の代わりに(1)′をみたすとき、P を **$(n,2)$-準単純結合型多面体**という。

(1)　P は側面に四角形を 2 つもつ。

(2)　P のどの 2 本の対角線もねじれの位置にない。すなわち、対角線は全て同じ頂点を一端にもつ。

(1)′　P は側面に四角形を 1 つもつ。

$(n,2)$-単純結合型多面体と $(n,2)$-準単純結合型多面体について以下の補題が成り立つ。

補題 5.2　$(n,2)$-単純結合型多面体と $(n,2)$-準単純結合型多面体の四面体分割数は等しい。

証明　$(n,2)$-単純結合型多面体 P 、$(n,2)$-準単純結合型多面体 Q を図のようにとる。Q において基底面を三角形 $A_0{}'O_1{}'O_2{}'$ にとり、$d(Q)$ が $d(P)$ に等しいことを示す。

(i) 四面体 $A_0{}'O_1{}'O_2{}'A_1{}'$ で分割したとき

凹多面体が生じる。これを R とする。R においては△ $A_0{}'O_1{}'A_1{}'$ と△ $A_1{}'O_1{}'O_2{}'$ との二面角が 180° より大きい。$d(R)$ が、P において△ $A_1O_1O_2$ を基底面とした場合の分割数に等しいことを示す。Q 内部の面 $A_1{}'O_1{}'O_2{}'$ の延長と辺 $A_0{}'A_{n-1}{}'$ の交点を B とし、$A_0{}'$ を B に置き換えてできる $(n,2)$-単純結合型多面体を Q' とする。このとき、$d(P) = d(Q')$ である。

R を△ $A_1{}'O_1{}'O_2{}'$ を底面とした四面体 $A_1{}'O_1{}'O_2{}'A_i{}'$ $(i = 2, \cdots, (n-1))$ で分割する。このとき∠ $A_0{}'A_1{}'A_i{}'$ が 180°未満であることから、△ $A_1{}'O_1{}'A_i{}'$ と△ $A_0{}'O_1{}'A_1{}'$ の二面角は 180°未満である。よって、この場合は Q' において△ $A_1{}'O_1{}'O_2{}'$ を基底面とした場合に凹凸性が等しい。これより四面体分割数も等しく、$d(P) = d(Q')$ より $d(R)$ は P において△ $A_1O_1O_2$ を基底面とした場合に等しい。

(ii) 四面体 $A_0{}'O_1{}'O_2{}'A_{n-2}{}'$

$(n-1)$ 角錐と三角錐が生じる。P において四面体 $A_0O_1O_2A_{n-2}$ で分割した際も同様のものが生じるため、この場合は等しい。

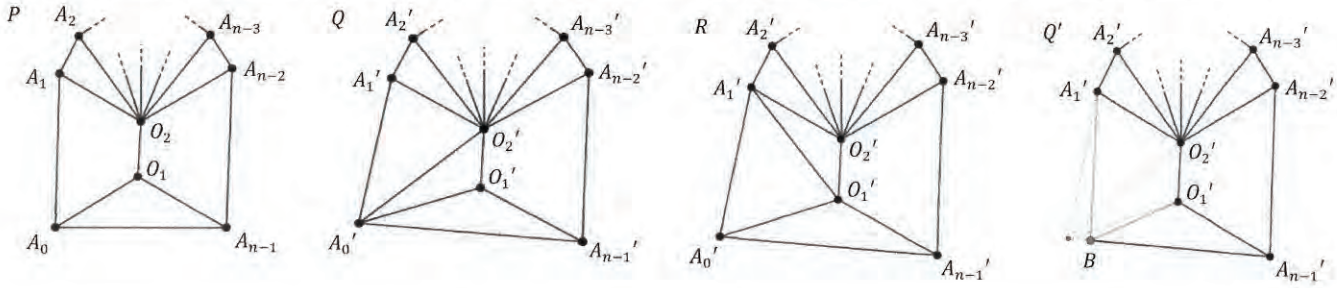
(iii) 四面体 $A_0{}'O_1{}'O_2{}'A_{n-1}{}'$

n 角錐が生じる。P において四面体 $A_0O_1O_2A_{n-1}$ で分割した際も n 角錐が生じるため、この場合は等しい。

(iv) 四面体 $A_0{}'O_1{}'O_2{}'A_i{}'$ $(i = 2, \cdots, (n-2))$

$A_1{}'$ を含む側に $(i+1)$ 角錐、含まない側に凹多面体が生じる。角錐は P において四面体 $A_0O_1O_2A_i$ で分割した際も生じる。一方で凹多面体の形状は $A_1{}'$ の位置によらないため、P において四面体 $A_0O_1O_2A_i$ で分割した際に生じる凹多面体に四面体分割数が等しい。

(i)と(ii)~(iv)より、$d(Q)$ は P で四角形 $A_0O_1O_2A_1$ を基底面とした場合の四面体分割数に等しい。よって、$d(Q) = d(P)$ である。　□



$n = 2, 3, \cdots$ に対して $(n+2,2)$-単純結合型多面体の四面体分割数を b_n とする。(3,2)-結合型多面体は単純結合にはなりえないが、(3,2)-準結合型多面体の四面体分割数を代わりに用いて $b_1 = 2$ とする。b_n について以下の命題が成り立つ。

命題 5.3　カタラン数を c_n とする。このとき、以下の漸化式が成り立つ。

$$b_{n+1} = c_{n+1} + \sum_{i=0}^{n} b_i b_{n-i}, \quad b_0 = 1$$

証明　$(n+3,2)$-結合型多面体 P に図のように頂点をとる。△ $A_0A_{n+2}O_1$ を基底面として考える。

(i) 四面体 $A_0A_{n+2}O_1O_2$ で分割した場合

$(n+3)$ 角錐が生じる。四面体分割数は c_{n+1} である。

(ii) 四面体 $A_0A_{n+2}O_1A_1$ で分割した場合

$(n+2,2)$-結合型多面体が生じる。P の対角線は全て O_1 から出ているので、この多面体の対角線も全て O_1 から出ており、準単純結合である。補題 5.2 より、四面体分割数は b_n である。

(iii) 四面体 $A_0A_{n+2}O_1A_i$ $(i = 2, \cdots, n)$ で分割した場合

四面体 $A_0A_{n+2}O_1A_i$ や△ $O_1O_2A_i$ を貫く対角線はなく、また線分 A_lA_m は全て四面体 $A_0A_{n+2}O_1A_i$ に遮られているので、この場合は四面体 $A_0A_{n+2}O_1A_i$ 及び△ $O_1O_2A_i$ によって P を隔てたときに生じる、2 つの多面体の四面体分割数の積に等しい。対角線 O_1A_i は線分 O_2A_0 , O_2A_{n+2} に挟まれているため、この場合でも四面体 $A_0O_1O_2A_i$, $A_{n+2}O_1O_2A_i$ は存在しうるので、この 2 つの多面体はどちらも凸多面体であり、(ii)同様これは準単純結合型多面体である。すなわち、$(i+1,2)$-準単純結合型多面体と、$(n-i+3,2)$-準単純結合型多面体なので、補題 5.2 より四面体分割数は $b_{i-1}b_{n-i+1}$ である。

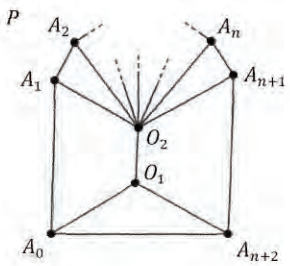
(iv) 四面体 $A_0A_{n+2}O_1A_{n+1}$ で分割した場合

$(n+2,2)$-準単純結合型多面体が生じる。補題 5.2 より、四面体分割数は b_n である。

(i)~(iv)より、

$$b_{n+1} = c_{n+1} + \sum_{i=1}^{n+1} b_{i-1}b_{n-i+1} = c_{n+1} + \sum_{i=0}^{n} b_i b_{n-i}$$

$c_1 = 1$, $b_1 = 2$ より、$b_0 = 1$。　□



上記の結果から b_n をいくつか求めると、

$$\{b_n\} = 1, 2, 6, 21, 80, 322, 1348, 5814, 25674, 115566, 528528, \cdots$$

となる。またこの数列は、$n \in \mathbb{Z}_{>0}$ に対し $B(n,0) = c_{n-1}$, $B(0,0) = 0$ としたとき、$k \geq 0$ に対し

$$B(n,k) = B(n-1,k) + B(n,k-1)$$

という関係式を用いて $B(n,k)$ の値を求めたときに $B(n,n)$ の値として現れる。

					80
				21	80
			6	21	59
		2	6	15	38
	1	2	4	9	23
0	1	1	2	5	14

b_n の母関数を求める。母関数を $f(x)$ とし二乗すると、命題 5.3 より

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$$

$$f(x)^2 = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{i=0}^{n} b_i b_{n-i}\right)x^n = \sum_{n=0}^{\infty}(b_{n+1} - c_{n+1})x^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_{n+1}x^{n+1}\cdot\frac{1}{x} - \sum_{n=0}^{\infty} c_{n+1}x^{n+1}\cdot\frac{1}{x}$$

カタラン数の母関数を $g(x)$ とすると

$$f(x)^2 = \frac{f(x)-1}{x} - \frac{g(x)-1}{x} = \frac{f(x)-g(x)}{x}$$

となる。命題 2.1 より

$$g(x) = \frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x}$$

であるから、$f(0)=1,\ g(0)=1$ であり、$x=0$ で関数が連続になるよう注意して、

$$xf(x)^2 - f(x) + g(x) = 0$$

$$f(x) = \frac{1-\sqrt{1-4xg(x)}}{2x} = \frac{1-\sqrt{2\sqrt{1-4x}-1}}{2x} \tag{5.1}$$

である。

$h(x) = \sqrt{2\sqrt{1-4x}-1}$ の $x=0$ における $(n+1)$ 階微分係数について考える。

$$h(x) = \sqrt{2\sqrt{1-4x}-1} = \frac{2\sqrt{1-4x}-1}{\sqrt{2\sqrt{1-4x}-1}} = \frac{2-8x-\sqrt{1-4x}}{\sqrt{1-4x}\sqrt{2\sqrt{1-4x}-1}}, \qquad h'(x) = -\frac{2}{\sqrt{1-4x}\sqrt{2\sqrt{1-4x}-1}}$$

$$h''(x) = -\frac{4}{(1-4x)\sqrt{1-4x}\sqrt{2\sqrt{1-4x}-1}} - \frac{4}{\sqrt{1-4x}(2\sqrt{1-4x}-1)\sqrt{2\sqrt{1-4x}-1}}$$

$$= -\frac{4}{(1-4x)\sqrt{1-4x}\sqrt{2\sqrt{1-4x}-1}} - \frac{4(2-8x-\sqrt{1-4x})}{(1-4x)\sqrt{1-4x}(3-16x)\sqrt{2\sqrt{1-4x}-1}}$$

よって

$$4h(x) - (4x-1)(16x-3)h''(x) - 2(16x-3)h'(x) - 8(4x-1)h'(x) = 0$$

$$(64x^2-28x+3)h''(x) + 2(32x-7)h'(x) - 4h(x) = 0$$

両辺 n 階微分すると、ライプニッツの公式より

$$(4x-1)(16x-3)h^{(n+2)}(x) + \binom{n}{1}\cdot(128x-28)h^{(n+1)}(x) + \binom{n}{2}\cdot 128\cdot h^{(n)}(x) + 2(32x-7)h^{(n+1)}(x) + \binom{n}{1}\cdot 2\cdot 32\cdot h^{(n)}(x) - 4h^{(n)}(x) = 0$$

$$(4x-1)(16x-3)h^{(n+2)}(x) + n(128x-28)h^{(n+1)}(x) + 64n(n-1)h^{(n)}(x) + 2(32x-7)h^{(n+1)}(x) + 64nh^{(n)}(x) - 4h^{(n)}(x) = 0$$

$x=0$ を代入すると

$$3h^{(n+2)}(0) - 28nh^{(n+1)}(0) + 64n(n-1)h^{(n)}(0) - 14h^{(n+1)}(0) + 64nh^{(n)}(0) - 4h^{(n)}(0) = 0$$

$$3h^{(n+2)}(0) - 14(2n+1)h^{(n+1)}(0) + 4(4n+1)(4n-1)h^{(n)}(0) = 0$$

$h^{(n)}(0) = d_n$ とおくと、$h(0)=1,\ h'(0)=-2$ より、$d_0=1,\ d_1=-2$ で

$$3d_{n+2} - 14(2n+1)d_{n+1} + 4(4n+1)(4n-1)d_n = 0 \tag{5.2}$$

と表せられる。

これを用いれば(5.1)は

$$f(x) = \frac{1-\sqrt{2\sqrt{1-4x}-1}}{2x} = \frac{1-1-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}d_n x^n}{2x} = -\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+1)!}d_{n+1}x^n$$

と表せるので、b_n と d_n の間には

$$b_n = -\frac{1}{2(n+1)!}d_{n+1}$$

という関係式が成り立つ。すなわち b_n は

$$3(n+2)(n+1)b_{n+1}-14(2n+1)(n+1)b_n+4(4n+1)(4n-1)b_{n-1}=0$$

$$3(n+3)(n+2)b_{n+2}-14(2n+3)(n+2)b_{n+1}+4(4n+5)(4n+3)b_n=0$$

という漸化式を満たす。しかしこの漸化式は複雑なので、(5.2)において $3^n d_n = a_n$ とおいた漸化式

$$3a_{n+2}-14(2n+1)3a_{n+1}+4(4n+1)(4n-1)3^2a_n=0$$

$$a_{n+2}-14(2n+1)a_{n+1}+12(4n+1)(4n-1)a_n=0$$

を**単純結合方程式**と呼び、これを満たす a_n について考察する。この方程式が初等的に解けないことを示すのがこの論文の目的である。

6 差分体

単純結合方程式の可解性について、差分代数を用いて考える。
C を代数閉体、$C(x)$ を C 上の有理関数体とし、差分体 $\mathcal{K}$ を $\mathcal{K}=\big(C(x),\tau: f(x)\mapsto f(x+1)\big)$ とする。初めに 1 変数代数関数体の理論を Stichtenoth の著書[1]にそって述べる。

定理 6.1 (Stichtenoth[1], 定理 1.1.13) F/K を 1 変数代数関数体、v_P をプレイス P に関する離散付値とする。このとき、$x\in F$ が P の素元であることと $v_P(x)=1$ は同値である。

定理 6.2 (Stichtenoth[1], §1.2) C を代数閉体、$F=C(x)$ を有理関数体とする。F/C は 1 変数代数関数体である。$\alpha\in C$ について、

$$\mathcal{O}_\alpha=\left\{\frac{f(x)}{g(x)}\middle|f(x),g(x)\in C[x],(x-\alpha)\nmid g(x)\right\}$$

は F/C の付値環であり、その極大イデアルは

$$P_\alpha=\left\{\frac{f(x)}{g(x)}\middle|f(x),g(x)\in C[x],(x-\alpha)|f(x),(x-\alpha)\nmid g(x)\right\}$$

である。$x-\alpha$ は P_α の素元である。また、

$$\mathcal{O}_\infty=\left\{\frac{f(x)}{g(x)}\middle|f(x),g(x)\in C[x],\deg f(x)\le\deg g(x)\right\}$$

も F/C の付値環であり、その極大イデアルは

$$P_\infty=\left\{\frac{f(x)}{g(x)}\middle|f(x),g(x)\in C[x],\deg f(x)<\deg g(x)\right\}$$

である。

定理 6.3 (Stichtenoth[1], 定理 1.2.2) C を代数閉体とする。有理関数体 $C(x)/C$ のプレイスは上記の P_α と P_∞ のみである。

定義 6.4 (Stichtenoth[1], 定義 3.1.1, 定義 3.1.3) F'/K', F/K を 1 変数代数関数体であって $\overline{K'}=K'$, $\overline{K}=K$ が成り立つものとする。F'/F が代数拡大で、かつ $K'\supset K$ が成り立つとき、F'/K' は F/K の**代数拡大**であるという。このとき、$P'\in\mathbb{P}_{F'}$ が $P\in\mathbb{P}_F$ の**拡張**であるとは、$P\subset P'$ が成り立つことである。これを $P'|P$ と表す。

定理 6.5 (Stichtenoth[1], 命題 3.1.4) F'/K' を F/K の代数拡大とし、$P'\in\mathbb{P}_{F'}$, $P\in\mathbb{P}_F$ とする。次は同値である。
(1) $P'|P$。
(2) $\mathcal{O}_P\subset\mathcal{O}_{P'}$。
(3) ある $e\in\mathbb{Z}_{\ge1}$ が存在して、任意の $x\in F$ に対して $v_{P'}(x)=e\cdot v_P(x)$ が成り立つ。
さらに、$P'|P$ のとき $P=P'\cap F$ と $\mathcal{O}_P=\mathcal{O}_{P'}\cap F$ が成り立つ。このことから P を P' の F への**制限**ともいう。(3)の e を**分岐指数**といい、$e(P'|P)$ と表す。$e(P'|O)>1$ のとき $P'|P$ は**分岐している**といい、$e(P'|P)=1$ のとき**分岐していない**という。$P\in\mathbb{P}_F$ に対して $P'|P$ が分岐しているような $P'\in\mathbb{P}_{F'}$が存在するとき、P は F' において**分岐する**といい、そうでないとき**分岐しない**という。

定理 6.6 (Stichtenoth[1], 命題 3.1.7) F'/K' を F/K の代数拡大とする。次が成り立つ。
(1) $P'\in\mathbb{P}_{F'}$ に対して $P'|P$ である $P\in\mathbb{P}_F$ がただ一つ存在する。$P=P'\cap F$ である。
(2) $P\in\mathbb{P}_F$ に対して P の拡張 $P'\in\mathbb{P}_{F'}$ が少なくとも一つ存在するが、その個数は有限である。

定理 6.7 (Stichtenoth[1], 定理 3.1.11) C を代数閉体、F/C を 1 変数代数関数体、F'/F を有限次拡大とする。$P\in\mathbb{P}_F$ とし、$P_1,\cdots,P_m$ を P の F' への拡張全部とすると

$$\sum_{i=1}^{m}e(P_i|P)=[F':F]$$

が成り立つ。

定理 6.8 (Stichtenoth[1], Riemann-Hurwitz の種数公式, 定理 3.4.13) C を代数閉体とする。1 変数代数関数体 F/C に対して**種数**と呼ばれる整数 $g\ge0$ が定まる(Stichtenoth[1], 定義 1.4.15)。$F=C(x)$ と表せることと、種数が 0 であることは同値である (Stichtenoth[1], 命題 1.6.3)。F'/F を有限次拡大とし、g' を F'/C の種数とする。このとき

$$2g'-2=[F':F](2g-2)+\sum_{P\in\mathbb{P}_F}\sum_{P'|P}(e(P'|P)-1)$$

が成り立つ。ここで P' は $\mathbb{P}_{F'}$ を動く。

定理 6.9 (Stichtenoth[1], 系 3.5.5) F'/K' を F/K の代数拡大であって F'/F が有限次拡大であるものとする。このとき F' において分岐する F のプレイスは高々有限個である。

差分体に関する次の定理を 西岡斉次[2, Theorem 4.1]の証明に基づいて証明する。

定理 6.10 $\mathcal{L}=(L,\tau)$ を $\mathcal{K}^{(k)}=\big(C(x),\tau_0\colon f(x)\mapsto f(x+k)\big)$ の差分拡大体であって $L/C(x)$ が有限次拡大であるものとする。このとき $L=C(x)$ が成り立つ。

証明 $n=[L:C(x)]$ とおく。$\mathcal{K}$ は可逆であるから、

$$[L:\tau L][\tau L:\tau K]=[L:K][K:\tau K]=[\tau L:\tau K][K:\tau K]$$

より $[L:\tau L]=[K:\tau K]$、すなわち $\mathcal{L}$ も可逆であるとわかる。1変数代数関数体 L/C は $C(x)/C$ の代数拡大であることに注意して、$Q|P$ が分岐しているような $Q\in\mathbb{P}_L, P\in\mathbb{P}_{C(x)}$ が存在すると仮定する。$\tau\colon L\to L$ と $\tau|_{C(x)}=\tau_0\colon C(x)\to C(x)$ はともに全射な C 同型であるから、任意の $i\geq 0$ に対して $\tau^iQ\in\mathbb{P}_L, \tau^iP\in\mathbb{P}_{C(x)}$ が成り立つ。s,t をそれぞれ Q,P の素元とすると、τ^is,τ^it はそれぞれ τ^iQ,τ^iP の素元である。ここで、

$$v_Q(t)=e(Q|P)v_P(t)=e(Q|P)=e$$

とおけば、$t=s^eu, u\in\mathcal{O}_Q^\times$ と表せる。したがって、

$$\tau^it=(\tau^is)^e(\tau^iu),\ \ \tau^iu\in\big(\tau^i\mathcal{O}_Q\big)^\times=\mathcal{O}_{\tau^iQ}^\times$$

から

$$e=v_{\tau^iQ}(\tau^it)=e(\tau^iQ|\tau^iP)v_{\tau^iP}(\tau^it)=e(\tau^iQ|\tau^iP)$$

が成り立つ。これより $e(Q|P)=(\tau^iQ|\tau^iP)>1$ を得る。P は有理関数体$\frac{C(x)}{C}$のプレイスだから、定理 6.3 より $P=P_\alpha$, $\alpha\in C\cup\{\infty\}$ と表せる。このとき $\alpha\notin C$ であることを背理法によって示す。$\alpha\in C$ であると仮定すると $x-\alpha$ は P_α の素元であり、よって任意の $i\geq 0$ に対して $\tau^ix-\alpha=x+ik-\alpha$ は τ^iP_α の素元である。したがって $\tau^iP_\alpha=P_{\alpha-ik}\ (i\geq 0)$ が成り立つ。$e(\tau^iQ|P_{\alpha-ik})>1$ であるから各 $P_{\alpha-ik}$ は L において分岐する。つまり L において分岐する $C(x)$ のプレイスが無限に存在することとなり定理 6.9 に矛盾。したがって $\alpha\notin C$ を得る。以上により、$P\in\mathbb{P}_{C(x)}$ が L において分岐するなら $P=P_\infty$ であることがわかった。L/C の種数を g とおくと、定理 6.7 と定理 6.8 より

$$2g-2=-2n+\sum_{P\in\mathbb{P}_{C(x)}}\sum_{Q|P}(e(Q|P)-1)$$

$$=-2n+\sum_{Q|P}(e(Q|P_\infty)-1)$$

$$\leq -2n+(n-1)=-n-1$$

を得る。g は 0 以上の整数であるから、$g=0$ でなければならない。したがって $-2\leq -n-1$ となり、$n=1$ がわかる。これは $L=C(x)$ を意味する。 □

7 二階線形差分方程式

本節の内容は西岡斉次の著書[2]にもとづく。$\mathcal{K}=(K,\tau_0)$ を差分体とし、$\mathcal{L}/\mathcal{K}$ を差分拡大とする。
$k\in\mathbb{Z}_{>0}$ に対し、$\mathcal{K}^{(k)}=(K,{\tau_0}^k)$ と定める。差分体に対する拡大を以下で定義する。

定義 7.1 (西岡[2], 定義 6.5) $\mathcal{L}=(L,\tau)$ と $\mathcal{K}$ は可逆とする。次の条件をみたす可逆差分体の列

$$\mathcal{K}=\mathcal{K}_0\subset\cdots\subset\mathcal{K}_n=\mathcal{L}$$

が存在するとき、$\mathcal{L}/\mathcal{K}$ は τ^p に関する **Liouville-Franke 拡大（LF$^{(p)}$ 拡大）**という。
（条件）$\mathcal{K}_i=\mathcal{K}_{i-1}\langle t_i\rangle_{\mathcal{L}}{}^*$ であって、t_i は次のいずれかをみたす。ここで、$\mathcal{K}_{i-1}\langle t_i\rangle_{\mathcal{L}}=(K_{i-1}(t_i,\tau t_i,\tau^2t_i\cdots),\tau)$ である。
(1) t_i は K_{i-1} 上代数的である。
(2) $\tau^pt_i=t_i+\beta_i$ をみたす $\beta_i\in K_{i-1}$ が存在する。
(3) $\tau^pt_i=\alpha_it_i$ をみたす $\alpha_i\in K_{i-1}$ が存在する。
このとき、$\mathcal{K}_{i-1}\langle t_i\rangle_{\mathcal{L}}$ の $\mathcal{L}$ における可逆閉包 $\mathcal{K}_i$ の基底体は

$$K_{i-1}(\cdots,\tau^{-2}t_i,\tau^{-1}t_i,t_i,\tau t_i,\tau^2t_i\cdots)$$

である。

$\mathcal{K}$ に対し

$$A=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\in GL_2(K)$$

とし、$i=1,2,\cdots n$ に対して

$$A_i=\begin{pmatrix}a^{(i)} & b^{(i)}\\ c^{(i)} & d^{(i)}\end{pmatrix}=\big(\tau_0^{i-1}A\big)\big(\tau_0^{i-2}A\big)\cdots(\tau_0A)A$$

とおく。$b^{(i)}c^{(i)}\neq 0$ が成り立つとする。
このような A_i に対し、$\mathcal{K}$ 上の i 階差分方程式 $\mathrm{Eq}(A,i)/\mathcal{K}$ を

$$y_i\big(c^{(i)}y+d^{(i)}\big)=a^{(i)}y+b^{(i)}$$

で定める。

定理 7.2 (西岡[2], 定理 6.19) $f\in\mathcal{L}$ が差分拡大 $\mathcal{L}/\mathcal{K}$ における $\mathrm{Eq}(A,k)/\mathcal{K}$ の解なら、$l=1,2,\cdots$ に対して $f\in\mathcal{L}$ は $\mathrm{Eq}(A,lk)/\mathcal{K}$ の解である。

定理 7.3 (西岡[2], 定理 6.20) $A\in M_2(K)$, $k,l,m\in\mathbb{Z}_{>0}$ とする。$\mathcal{L}/\mathcal{K}^{(k)}$ が差分拡大であるとし、$f\in L$ とする。このとき次は同値である。
(1) $f\in\mathcal{L}$ が $\mathrm{Eq}(A_k,lm)/\mathcal{K}^{(k)}$ の解である。
(2) $f\in\mathcal{L}^{(l)}$ が $\mathrm{Eq}(A_{kl},m)/\mathcal{K}^{(kl)}$ の解である。

定理 7.4 (西岡[2], 系 6.29) $i\in\mathbb{Z}_{>0}$ に対して $\mathrm{Eq}(A_i,1)/\mathcal{K}^{(i)}$ がどんな差分拡大 $\mathcal{L}/\mathcal{K}^{(i)}$ の中にも K 上代数的な解をもたないとし、$\mathcal{U}=(U,\tau)$ を $\mathcal{K}$ の差分拡大体とし、$(f,g)\in U^2/\{0\}$ が

$$\begin{pmatrix}\tau f\\ \tau g\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}f\\ g\end{pmatrix}$$

をみたすとする。また、$\mathcal{N}/\mathcal{K}$ を $\mathcal{U}$ の中の差分拡大であって、$\mathcal{N}$ が可逆であり、$\mathcal{N}/\mathcal{K}^*$ が LF$^{(p)}$ 拡大であるものとする。ここで $\mathcal{K}^*$ は $\mathcal{K}$ の $\mathcal{N}$ における可逆閉包とする。このとき、f,g は N 上代数的独立である。

8 単純結合方程式の可解性

$\mathcal{K}=(C(x),\tau_0)$ とする。単純結合方程式

$$y_2-14(2x+1)y_1+12(4x+1)(4x-1)y=0 \tag{8.1}$$

を Riccati 化（西岡[2], 定義 6.14）すると

$$y_1y=14(2x+1)y-12(4x+1)(4x-1) \tag{8.2}$$

を得る。この方程式の非可解性について、西岡[2], §6.5 を参考に考察する。そこでは、変換作用素が $\tau_q: f(t)\mapsto f(qt)$ で表される差分方程式の非可解性について述べられているが、それに似た手法が単純結合方程式にも適用できる。初めに、これが有理関数解をもたないことを示す。

補題 8.1 方程式(8.2)は $\mathcal{K}$ の中に一次関数解をもたない。

証明 $\mathcal{K}$ の中に一次関数解 f をもつとして矛盾を導く。

$$f=ax+b,\qquad a,b\in C$$

とおく。なお、$a\neq 0$ である。これを(8.2)に代入すると、

$$(ax+a+b)(ax+b)=14(2x+1)(ax+b)-12(4x+1)(4x-1)$$

が得られる。係数を比較して、

$$\begin{cases} a^2=28a-192 \\ a^2+2ab=14a+28b \\ ab+b^2=14b+12 \end{cases}$$

第 1 式と第 2 式より、$(a,b)=(16,-8),\ (12,6)$ がわかるが、どちらの組み合わせも第 3 式を満たさないので矛盾。 □

補題 8.2 方程式(8.2)は $\mathcal{K}$ の中に解をもたない。

証明 $\mathcal{K}$ に解 f をもつと仮定し、矛盾を導く。$f\in C(x)$ より、

$$f=\frac{P}{Q},\quad P,Q\in C[x]\setminus\{0\}$$

と表せる。ここで P,Q は互いに素であるとし、Q はモニックとする。(8.2)に代入すると、

$$\frac{P(x+1)}{Q(x+1)}\cdot\frac{P(x)}{Q(x)}=14(2x+1)\frac{P(x)}{Q(x)}-12(4x+1)(4x-1)$$

$$P(x+1)P(x)=14(2x+1)P(x)Q(x+1)-12(4x+1)(4x-1)Q(x+1)Q(x)$$

これより $\deg P=\deg Q+1$ がわかる。補題 8.1 より $\deg Q\geq 1$ である。P の最高次の係数 p は、Q がモニックなので、

$$p^2-28p+192=0$$

$$p=16,12$$

(i) P の最高次の係数が 16 のとき

$$\big(P(x+1)-14(2x+1)Q(x+1)\big)P(x)=-12(4x+1)(4x-1)Q(x+1)Q(x)$$

$P(x+1)$ と $Q(x+1)$ は互いに素より、$P(x+1)-14(2x+1)Q(x+1)$ と $Q(x+1)$ は互いに素であるから、$Q(x+1)|P(x)$ である。$P(x)$ と $Q(x)$ も互いに素なので、$Q(x)|\big(P(x+1)-14(2x+1)Q(x+1)\big)$ である。以上より、次数と係数を比較して、

$$P(x)=4(4x+1)Q(x+1),\qquad P(x+1)-14(2x+1)Q(x+1)=-3(4x-1)Q(x)$$

もしくは

$$P(x)=4(4x-1)Q(x+1),\qquad P(x+1)-14(2x+1)Q(x+1)=-3(4x+1)Q(x)$$

がわかる。

(i)' $P(x)=4(4x+1)Q(x+1)$ のとき

これを

$$P(x+1)-14(2x+1)Q(x+1)=-3(4x-1)Q(x)$$

に代入して、

$$4(4x+5)Q(x+2)-14(2x+1)Q(x+1)+3(4x-1)Q(x)=0$$

を得る。$\deg Q=k$ とすると、$k\geq 1$ より、$Q(x)=x^k+ax^{k-1}+\cdots$ と表せる。ここで $a\in C$ である。すると、

$$4(4x+5)\{x^k+(2k+a)x^{k-1}+\cdots\}-14(2x+1)\{x^k+(k+a)x^{k-1}+\cdots\}\ +3(4x-1)(x^k+ax^{k-1}+\cdots)=0$$

が成り立つ。k 次の係数に関して、左辺は

$$4\cdot 5+4\cdot 4(2k+a)-14-14\cdot 2(k+a)-3+3\cdot 4a=3+4k$$

となるが、$k\in\mathbb{Z}$ より左辺 $\neq 0$。これは矛盾。

(ii)' $P(x)=4(4x-1)Q(x+1)$ のとき

同様に、

$$4(4x+3)\{x^k+(2k+a)x^{k-1}+\cdots\}-14(2x+1)\{x^k+(k+a)x^{k-1}+\cdots\}\ +3(4x+1)(x^k+ax^{k-1}+\cdots)=0$$

が成り立ち、k 次の係数に関して、左辺は

$$4\cdot 3+4\cdot 4(2k+a)-14-14\cdot 2(k+a)+3+3\cdot 4a=1+4k$$

となるが、$k\in\mathbb{Z}$ より左辺 $\neq 0$。これは矛盾。

(i)',(ii)' より P の最高次の係数が 16 のときは矛盾が生じる。

(ii) P の最高次の係数が 12 のとき

$$P(x) = 3(4x+1)Q(x+1), \qquad P(x+1) - 14(2x+1)Q(x+1) = -4(4x-1)Q(x)$$

もしくは

$$P(x) = 3(4x-1)Q(x+1), \qquad P(x+1) - 14(2x+1)Q(x+1) = -4(4x+1)Q(x)$$

である。

(i)'' $P(x) = 3(4x+1)Q(x+1)$ のとき

(i)'同様に、

$$3(4x+5)\{x^k + (2k+a)x^{k-1} + \cdots\} - 14(2x+1)\{x^k + (k+a)x^{k-1} + \cdots\} \ + 4(4x-1)(x^k + ax^{k-1} + \cdots\ ) = 0$$

が成り立ち、k 次の係数に関して、左辺は

$$3 \cdot 5 - 14 - 4 + 3 \cdot 4(2k+a) - 14 \cdot 2(k+a) + 4 \cdot 4a = -3 - 4k$$

となるが、$k \in \mathbb{Z}$ より左辺 $\neq 0$ 。これは矛盾。

(ii)'' $P(x) = 3(4x-1)Q(x+1)$ のとき

(ii)'同様に、

$$3(4x+3)\{x^k + (2k+a)x^{k-1} + \cdots\} - 14(2x+1)\{x^k + (k+a)x^{k-1} + \cdots\} \ + 4(4x+1)(x^k + ax^{k-1} + \cdots\ ) = 0$$

が成り立ち、k 次の係数に関して、左辺は

$$3 \cdot 3 - 14 + 4 + 3 \cdot 4(2k+a) - 14 \cdot 2(k+a) + 4 \cdot 4a = -1 - 4k$$

となるが、$k \in \mathbb{Z}$ より左辺 $\neq 0$ 。これは矛盾。

(i)'',(ii)''より P の最高次の係数が 12 のときは矛盾が生じる。

(i),(ii)よりどちらの場合でも矛盾が生じる。よって方程式(8.2)は $\mathcal{K}$ の中に解をもたない。 □

$\mathcal{K}$ 上の方程式(8.2)に対して、

$$A = \begin{pmatrix} 14(2x+1) & -12(4x+1)(4x-1) \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in GL_2(C(x))$$

$$A_i = \begin{pmatrix} a^{(i)} & b^{(i)} \\ c^{(i)} & d^{(i)} \end{pmatrix} = (\tau_0^{i-1}A)(\tau_0^{i-2}A)\cdots(\tau_0 A)A \quad (i = 1,2,\cdots)$$

と定める。このとき、

$$A_2 = (\tau_0 A)A = \begin{pmatrix} 14(2x+3) & -12(4x+5)(4x+3) \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 14(2x+1) & -12(4x+1)(4x-1) \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 8(74x^2+148x+51) & -168(2x+3)(4x+1)(4x-1) \\ 14(2x+1) & -12(4x+1)(4x-1) \end{pmatrix}$$

であり、$i \geq 1$ に対しては $\tau_0 a^{(i)} = a_1^{(i)}$ などと略記して、

$$A_{i+1} = (\tau_0 A_i)A = \begin{pmatrix} a_1^{(i)} & b_1^{(i)} \\ c_1^{(i)} & d_1^{(i)} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 14(2x+1) & -12(4x+1)(4x-1) \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 14(2x+1)a_1^{(i)} + b_1^{(i)} & -12(4x+1)(4x-1)a_1^{(i)} \\ 14(2x+1)c_1^{(i)} + d_1^{(i)} & -12(4x+1)(4x-1)c_1^{(i)} \end{pmatrix}$$

と

$$A_{i+1} = (\tau_0^i A)A_i = \begin{pmatrix} 14(2x+2i+1) & -12(4x+4i+1)(4x+4i-1) \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a^{(i)} & b^{(i)} \\ c^{(i)} & d^{(i)} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 14(2x+2i+1)a^{(i)} - 12(16(x+i)^2-1)c^{(i)} & 14(2x+2i+1)b^{(i)} - 12(16(x+i)^2-1)d^{(i)} \\ a^{(i)} & b^{(i)} \end{pmatrix}$$

を得る。したがって $i \geq 1$ に対して

$$b^{(i+1)} = -12(4x+1)(4x-1)a_1^{(i)}, \quad c^{(i+1)} = a^{(i)}, \quad d^{(i+1)} = b^{(i)} = -12(4x+1)(4x-1)c_1^{(i)}$$

が成り立ち、$i \geq 2$ に対して

$$a^{(i+1)} = 14(2x+2i+1)a^{(i)} - 12(16(x+i)^2-1)c^{(i)}$$

$$= 14(2x+2i+1)a^{(i)} - 12(16(x+i)^2-1)a^{(i-1)}$$

が成り立つ。$a^{(1)} = 14(2x+1)$ より、$a^{(i)} = e_i x^i + (i-1$次以下の項$)$ とおくと、

$$e_{i+2} = 28e_{i+1} - 192e_i, \qquad e_1 = 28,\ e_2 = 592$$

から $e_i = 4 \cdot 16^i - 3 \cdot 12^i$ である。よって、$i = 1,2,\cdots$ に対して

$$a^{(i)} = (4 \cdot 16^i - 3 \cdot 12^i)x^i + \left(i-1 \text{ 次以下の項}\right) \tag{8.3}$$

$$b^{(i)} = -192(4 \cdot 16^{i-1} - 3 \cdot 12^{i-1})x^{i+1} + \left(i \text{ 次以下の項}\right) \tag{8.4}$$

$$c^{(i)} = (4 \cdot 16^{i-1} - 3 \cdot 12^{i-1})x^{i-1} + \left(i-2 \text{ 次以下の項}\right) \tag{8.5}$$

$$d^{(i)} = -192(4 \cdot 16^{i-2} - 3 \cdot 12^{i-2})x^i + \left(i-1 \text{ 次以下の項}\right) \tag{8.6}$$

が成り立つ。特に、関数として $b^{(i)}c^{(i)} \neq 0$ である。

補題 8.3　準同型写像 $\tau : C((1/x)) \to C((1/x))$ を

$$\tau\left(\sum_i e_i \left(\frac{1}{x}\right)^i\right) = \sum_i e_i \left(\frac{1}{x+1}\right)^i$$

により定めると、これは同型写像になる。このとき $\mathrm{Eq}(A_k, 1)/\mathcal{K}^{(k)}$ は $(C((1/x)), \tau^k)$ の中に

$$\sum_{i=-1}^{\infty} e_i \left(\frac{1}{x}\right)^i, \quad e_i \in C,\ e_{-1} \neq 0$$

の形の異なる解をただ二つもつ。これを ${f_1}^{(k)}, {f_2}^{(k)}$ とすると、

$${f_1}^{(1)} = {f_1}^{(2)} = {f_1}^{(3)} = \cdots$$

$${f_2}^{(1)} = {f_2}^{(2)} = {f_2}^{(3)} = \cdots$$

が成り立つ。

証明　(同型性)

$$\tau\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x+1} = \sum_{i=1}^{\infty} a_i \left(\frac{1}{x}\right)^i$$

とすると

$$1 = (x+1)\sum_{i=1}^{\infty} a_i \left(\frac{1}{x}\right)^i$$

より

$$1 = a_1$$

$$0 = a_1 + a_2$$

$$0 = a_2 + a_3$$

$$\vdots$$

により a_i を帰納的に定めると、

$$\frac{1}{x+1} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} - \cdots = \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^{i+1} \left(\frac{1}{x}\right)^i$$

が成り立つ。よって逆写像は

$$\tau^{-1}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x-1} = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} + \cdots = \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{1}{x}\right)^i$$

となる準同型なので、τ は同型写像である。
(二つに定まること)

$$f = \sum_{i=-1}^{\infty} e_i \left(\frac{1}{x}\right)^i, \quad e_i \in C,\ e_{-1} \neq 0$$

が $\mathrm{Eq}(A_k, 1)/\mathcal{K}^{(k)}$ の $(C((1/x)), \tau^k)$ の中の解であるとする。

$${\tau_0}^k(f)\left(c^{(k)} f + d^{(k)}\right) = a^{(k)} f + b^{(k)}$$

の左辺は式(8.5),(8.6)より

$$\tau^k(f)\left(c^{(k)} f + d^{(k)}\right) = \left(\sum_{i=-1}^{\infty} e_i \left(\frac{1}{x+k}\right)^i\right)\left(\left((4\cdot 16^{k-1} - 3\cdot 12^{k-1})\left(\frac{1}{x}\right)^{-k+1} + \cdots\right)\sum_{i=-1}^{\infty} e_i \left(\frac{1}{x}\right)^i + \left(-192(4\cdot 16^{k-2} - 3\cdot 12^{k-2})\left(\frac{1}{x}\right)^{-k} + \cdots\right)\right) \tag{8.7}$$

である。右辺は式(8.3),(8.4)より

$$a^{(k)} f + b^{(k)} = \left((4\cdot 16^k - 3\cdot 12^k)\left(\frac{1}{x}\right)^{-k} + \cdots\right)\sum_{i=-1}^{\infty} e_i \left(\frac{1}{x}\right)^i + \left(-192(4\cdot 16^{k-1} - 3\cdot 12^{k-1})\left(\frac{1}{x}\right)^{-k-1} + \cdots\right) \tag{8.8}$$

である。$(1/x)^{-k-1}$ の係数を比較すると、$k \geq 1$ より

$$(4\cdot 16^{k-1} - 3\cdot 12^{k-1}){e_{-1}}^2 - 192(4\cdot 16^{k-2} - 3\cdot 12^{k-2})e_{-1} = (4\cdot 16^k - 3\cdot 12^k)e_{-1} - 192(4\cdot 16^{k-1} - 3\cdot 12^{k-1})$$

$$4^{k-1}(4^k - 3^k){e_{-1}}^2 - (192\cdot 4^{k-2}(4^{k-1} - 3^{k-1}) + 4^k(4^{k+1} - 3^{k+1}))e_{-1} + 192\cdot 4^{k-1}(4^k - 3^k) = 0$$

$$(4^k - 3^k){e_{-1}}^2 - (48(4^{k-1} - 3^{k-1}) + 4(4^{k+1} - 3^{k+1}))e_{-1} + 192(4^k - 3^k) = 0$$

$${e_{-1}}^2 - \frac{48(4^{k-1} - 3^{k-1}) + 4(4^{k+1} - 3^{k+1})}{4^k - 3^k} e_{-1} + 192 = 0$$

を得る。ここで $k \geq 1$ で

$$12(4^{k-1} - 3^{k-1}) + (4^{k+1} - 3^{k+1}) = 7(4^k - 3^k)$$

の恒等式が成り立つので、

$$\frac{48(4^{k-1}-3^{k-1})+4(4^{k+1}-3^{k+1})}{4^k-3^k}=28$$

となる。よって、

$$e_{-1}{}^2-28e_{-1}+192=0$$

より $e_{-1}=16,12$ を得る。

$j\geq 0$ に対して式(8.8)の $-k+j$ 次の係数は

$$(4\cdot 16^k-3\cdot 12^k)e_j+P_j$$

と表せる。ここで P_j は $e_{-1},\cdots,e_{j-1}$ から定まる値である。一方、$j\geq 0$ に対して式(8.7)の $-k+j$ 次の係数は、

$$2(4\cdot 16^{k-1}-3\cdot 12^{k-1})e_{-1}e_j-192(4\cdot 16^{k-2}-3\cdot 12^{k-2})e_j+Q_j$$

と表せる。ここで Q_j は $e_{-1},\cdots,e_{j-1}$ から定まる値である。したがって、

$$(4\cdot 16^k-3\cdot 12^k)e_j+P_j=2(4\cdot 16^{k-1}-3\cdot 12^{k-1})e_{-1}e_j-192(4\cdot 16^{k-2}-3\cdot 12^{k-2})e_j+Q_j$$

$$\big(2(4\cdot 16^{k-1}-3\cdot 12^{k-1})e_{-1}-192(4\cdot 16^{k-2}-3\cdot 12^{k-2})-(4\cdot 16^k-3\cdot 12^k)\big)e_j=P_j-Q_j$$

となる。e_{-1} は、重根をもたない

$$f(x)=(4\cdot 16^{k-1}-3\cdot 12^{k-1})x^2-(192(4\cdot 16^{k-2}-3\cdot 12^{k-2})+(4\cdot 16^k-3\cdot 12^k))x-192(4\cdot 16^{k-1}-3\cdot 12^{k-1})$$

の根であったから、

$$f'(e_{-1})=2(4\cdot 16^{k-1}-3\cdot 12^{k-1})e_{-1}-192(4\cdot 16^{k-2}-3\cdot 12^{k-2})-(4\cdot 16^k-3\cdot 12^k)\neq 0$$

が成り立つ。ゆえに、

$$e_j=(P_j-Q_j)/\big(2(4\cdot 16^{k-1}-3\cdot 12^{k-1})e_{-1}-192(4\cdot 16^{k-2}-3\cdot 12^{k-2})-(4\cdot 16^k-3\cdot 12^k)\big)$$

は $e_{-1},\cdots,e_{j-1}$ から一意に定まる。よって f は e_{-1} によりただ2つ定まり、それらは異なっている。

（存在）上記の議論から、

$$e_{-1}=16,12$$

$$e_j=(P_j-Q_j)/\big(2(4\cdot 16^{k-1}-3\cdot 12^{k-1})e_{-1}-192(4\cdot 16^{k-2}-3\cdot 12^{k-2})-(4\cdot 16^k-3\cdot 12^k)\big)\quad (j\geq 0)$$

と定めれば、

$$f^{(k)}=\sum_{i=-1}^{\infty}e_i\left(\frac{1}{x}\right)^i\in(C((1/x)),\tau^k)$$

は二つとも $\mathrm{Eq}(A_k,1)/\mathcal{K}^{(k)}$ を満たす。

（一致）$f_1{}^{(1)},f_2{}^{(1)}\in(C((1/x)),\tau)$ は $\mathrm{Eq}(A,1)/\mathcal{K}$ のただ二つの異なる解であるから、定理 7.2 より $\mathrm{Eq}(A,k)/\mathcal{K}$ の解である。さらに定理 7.3 より $f_1{}^{(1)},f_2{}^{(1)}\in(C((1/x)),\tau^k)$ は $\mathrm{Eq}(A_k,1)/\mathcal{K}^{(k)}$ の解である。$f_1{}^{(1)},f_2{}^{(1)}$ は $(C((1/x)),\tau)$ において異なっているので、$(C((1/x)),\tau^k)$ においても異なっている。したがって $\mathrm{Eq}(A_k,1)/\mathcal{K}^{(k)}$ の $(C((1/x)),\tau^k)$ における解はただ二つに定まることより、$f_1{}^{(k)}=f_1{}^{(1)}$, $f_2{}^{(k)}=f_2{}^{(1)}$ となる。 □

定理 8.4 $i=1,2,\cdots$ に対して $\mathrm{Eq}(A_k,1)/\mathcal{K}^{(k)}$ はどんな差分拡大 $\mathcal{L}/\mathcal{K}^{(k)}$ の中にも $C(x)$ 上代数的な解をもたない。

証明 ある k に対して $\mathrm{Eq}(A_k,1)/\mathcal{K}^{(k)}$ が差分拡大 $\mathcal{L}/\mathcal{K}^{(k)}$ の中に $C(x)$ 上代数的な解 f をもつと仮定する。$\mathcal{L}=(L,\tau)$ と表す。

$$\tau(f)\big(c^{(k)}f+d^{(k)}\big)=a^{(k)}f+b^{(k)}\tag{8.9}$$

であり、$\det A=12(4x+1)(4x-1)$ より $\det A_k=12^k\prod_{i=0}^{k-1}(4x+4i+1)(4x+4i-1)\neq 0$ であるから、

$$\tau f=\frac{a^{(k)}f+b^{(k)}}{c^{(k)}f+d^{(k)}}\in C(x,f)$$

がわかる。したがって $\mathcal{K}^{(k)}\langle f\rangle_{\mathcal{L}}$ の基底体は $C(x,f)$ である。f は $C(x)$ 上代数的であるから定理 6.10 より $C(x)$ の有限次拡大 $C(x,f)$ に対し $C(x,f)=C(x)$ が成り立つ。よって $f\in C(x)$ より

$$f=\frac{P}{Q},\quad P,Q\in C[x]\setminus\{0\}$$

と表せる。ここで P, Q は互いに素とする。補題 8.2 より $\mathrm{Eq}(A,1)/\mathcal{K}$ は $\mathcal{K}$ に解をもたないので $k>1$ である。方程式(8.9)より

$$c^{(k)}\frac{P(x+k)}{Q(x+k)}\cdot\frac{P(x)}{Q(x)}+d^{(k)}\frac{P(x+k)}{Q(x+k)}=a^{(k)}\frac{P(x)}{Q(x)}+b^{(k)}$$

$$c^{(k)}P(x+k)P(x)+d^{(k)}P(x+k)Q(x)=a^{(k)}P(x)Q(x+k)+b^{(k)}Q(x+k)Q(x)$$

$$\Big(d^{(k)}P(x+k)-b^{(k)}Q(x+k)\Big)Q(x)=\Big(-c^{(k)}P(x+k)+a^{(k)}Q(x+k)\Big)P(x)\tag{8.10}$$

を得る。このとき式(8.3)(8.4)(8.5)(8.6)より $\deg c^{(k)}=k-1$, $\deg a^{(k)}=\deg d^{(k)}=k$, $\deg b^{(k)}=k+1$ である。$\deg P-\deg Q=1$ であることを背理法で示す。

(i) $\deg P-\deg Q>1$ のとき

$$\deg d^{(k)}P(x+k)=k+\deg P>k+1+\deg Q=\deg b^{(k)}Q(x+k)$$

が成り立つから、(8.10)式の左辺の次数は $k+\deg P+\deg Q$ である。また

$$\deg c^{(k)}P(x+k)=k-1+\deg P>k+\deg Q=\deg a^{(k)}Q(x+k)$$

が成り立つから、右辺の次数は $k-1+\deg P+\deg P$ である。よって

$$k+\deg P+\deg Q=k-1+\deg P+\deg P$$

$$\deg P-\deg Q=1$$

となり矛盾である。
(ii) $\deg P-\deg Q<1$ のとき

$$\deg d^{(k)}P(x+k)=k+\deg P<k+1+\deg Q=\deg b^{(k)}Q(x+k)$$

$$\deg c^{(k)}P(x+k)=k-1+\deg P<k+\deg Q=\deg a^{(k)}Q(x+k)$$

より、同様に

$$k+1+\deg Q+\deg Q=k+\deg Q+\deg P$$

$$\deg P-\deg Q=1$$

となり矛盾である。
(i),(ii)より $\deg P-\deg Q=1$ である。
$f\in C(1/x)\subset C((1/x))$ として考えると、

$$\operatorname{ord} f=\operatorname{ord} P-\operatorname{ord} Q=-\deg P+\deg Q=-1$$

となるから、

$$f=\sum_{i=-1}^{\infty}e_i\left(\frac{1}{x}\right)^i,\quad e_i\in C,\ e_{-1}\neq 0$$

と表せる。同型写像 $\tau':C((1/x))\to C((1/x))$ を

$$\tau'\left(\sum_i\alpha_i\left(\frac{1}{x}\right)^i\right)=\sum_i\alpha_i\left(\frac{1}{x+k}\right)^i$$

で定めると、$(C((1/x)),\tau')$ は $\mathcal{K}^{(k)}=(C(x),\tau)$ の差分拡大体であり、等式(8.9)より $C((1/x))$ において

$$\tau'(f)\left(c^{(k)}f+d^{(k)}\right)=a^{(k)}f+b^{(k)}$$

が成り立つから、$f\in(C((1/x)),\tau')$ は $\mathrm{Eq}(A_k,1)/\mathcal{K}^{(k)}$ の解であることがわかる。τ_0 を

$$\tau_0\left(\sum_i\alpha_i\left(\frac{1}{x}\right)^i\right)=\sum_i\alpha_i\left(\frac{1}{x+1}\right)^i$$

により $C((1/x))$ に拡張すると、$\tau'=\tau_0^k$ となるから、補題 8.3 より $f\in C(x)$ は $\mathrm{Eq}(A,1)/\mathcal{K}$ の $(C((1/x)),\tau_K)$ の中の解でもある。これは補題 8.2 の結果に反する。 □

定理 8.5 $\mathcal{U}=(U,\tau)$ を $\mathcal{K}$ の差分拡大体、$g\in\mathcal{U}$ を単純結合方程式(8.1)の非自明解($g\neq 0$)とする。$\mathcal{N}/\mathcal{K}$ を $\mathcal{U}$ の中の $\mathrm{LF}^{(p)}$ 拡大とすると、$g,\tau g$ は N 上代数的独立である。**特に単純結合方程式は $\mathcal{K}$ の $\mathrm{LF}^{(p)}$ 拡大体の中に非自明解をもたない。**

証明

$$\tau^2g-14(2x+1)\tau g+12(4x+1)(4x-1)g=0$$

より、$f=\tau g$ とおくと

$$\begin{pmatrix}\tau f\\ \tau g\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}14(2x+1)f-12(4x+1)(4x-1)g\\ f\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}14(2x+1) & -12(4x+1)(4x-1)\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}f\\ g\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}f\\ g\end{pmatrix}$$

が成り立つ。定理 8.4 と定理 7.4 より f,g は N 上代数的独立である。もし方程式(8.1)がある $\mathcal{N}$ に解 g をもつとすれば、$g,\tau g\in\mathcal{N}$ なので、$g,\tau g$ は N 上代数的従属になる。よって単純結合方程式は $\mathcal{K}$ の $\mathrm{LF}^{(p)}$ 拡大の中に非自明解をもたない。 □

5 章より $b_n=-\frac{1}{2\cdot 3^{n+1}\cdot(n+1)!}a_{n+1}$ であるから、b_n は $\mathcal{K}=(C(x),\tau)$ の $\mathrm{LF}^{(p)}$ 拡大に含まれないことがわかる。

8 結果と考察

定理 7.5 より、四面体分割という点で角錐を除いて最も単純な構造をもつであろう $(n,2)$-単純結合型多面体の四面体分割数が、$\mathcal{K}=(C(x),\tau)$ の $\mathrm{LF}^{(p)}$ 拡大に含まれない、特に有理複素関数とその総和 $\sum_{i=0}^{n}$ 及び総乗 $\prod_{i=0}^{n}$ を有限個用いた形では表せないことがわかる。この事実は多面体の四面体分割という問題がどれほど複雑かを表している。

この結果から、$n\in\mathbb{Z}_{>1}$ に対して、$m\in\mathbb{Z}_{>2}$ を変数とする (m,n)-結合型多面体の四面体分割の場合の数は $\mathcal{K}=(C(x),\tau)$ の $\mathrm{LF}^{(p)}$ 拡大に含まれない、という予想が立てられる。

9 感想と今後の展望

$a_{n+2}-14(2n+1)a_{n+1}+12(4n+1)(4n-1)a_n=0$ という一見簡単に解けそうな漸化式が初等的には解けないということが証明された瞬間は、大きな驚きを感じた。角錐の数列がカタラン数としてあれほど単純に表せたのだから、漸化式が出た時点で $(n,2)$-単純結合型多面体の数列も（私が理解できる範囲で）美しい形に表すことができるだろうと思っていたからである。多面体は実際に手で触れることのできる数学であるため、そこに非可解性をもつ複雑で美しい漸化式が込められていることは、私の興味をより一層惹いた。

今後の展望としては、より一般に (m,n)-結合型多面体の四面体分割の場合の数の非可解性や、$(n,2)$-単純結合型多面体の四面体分割数を超越的に表す方法について研究していきたい。

参考文献

[1] H. Stichtenoth. *Algebraic Function Fields and Codes Second Edition*. Springer-Verlag berlin Heidelberg, 1993.
[2] 西岡斉次. 代数的差分方程式. 数学書房, 2015.