

確率と面積の不思議な関係

和立 カリタス女子中学校

3年

名前 瀬谷 香乃

研究動機

机の上に山積みになった計算用紙をかめて近くにあるゴミ箱に投げ入れていた。たまに外に出ることはあったが簡単に入ってしまうので面白くない。遠くにある姉のゴミ箱に投げ入れてみることに、入るのにはかなり難しかった。姉の机と私の机の間にゴミ箱を置いて投げ入れてみることに簡単に思っていたが、自分のところには置いてあるゴミ箱に入るのは簡単ではなかった。そのようなことから、投げ入れた物がゴミ箱に入るかどうかの確率は、ゴミ箱からの距離に関係があり、それは数学で表現できるような関係があるのではないかと考えたので、実際に挑戦してみることにした。

研究方法

ゴミ箱を固定し、そこから1m, 2m, 3m, 4m, 5m離れた位置からボールを投げ、ゴミ箱に何回ボールが入ったかを記録する。ボールが入った確率は以下の式で求める。

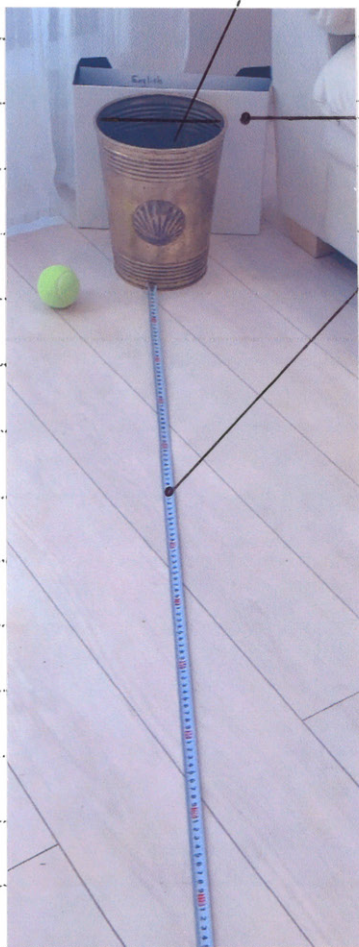
$$\text{ボールが入る確率} = \frac{\text{ボールが入った回数}}{\text{ボールを投げた回数}}$$

この式には「ボールを投げた位置からゴミ箱が置かれている位置の間の距離」が入っている(以下、この距離を「ボールを投げた距離」とする)。実験結果から「ボールが入る確率」と「ボールを投げた距離」

の間に何か数学的な関係を仮説を立てその仮説が実験結果と上手に説明できるかを検証する。

実験には、テニスボールと、ある程度重さを持つ金属製のゴミ箱を使った。ゴミ箱だけの重さでは、ボールが当たったときにゴミ箱が動いてしまうかもしれないので、ファイルケースの中に重たい本を入れた壁をつくってゴミ箱の後ろに置いた(写真1)。ボールは手で投げ入れた。ゴミ箱だけボールで投げた距離が一定になるように、足元に置いたメジャーの目盛りの真上からボールを投げようように心がけた(写真2)。

(写真1)

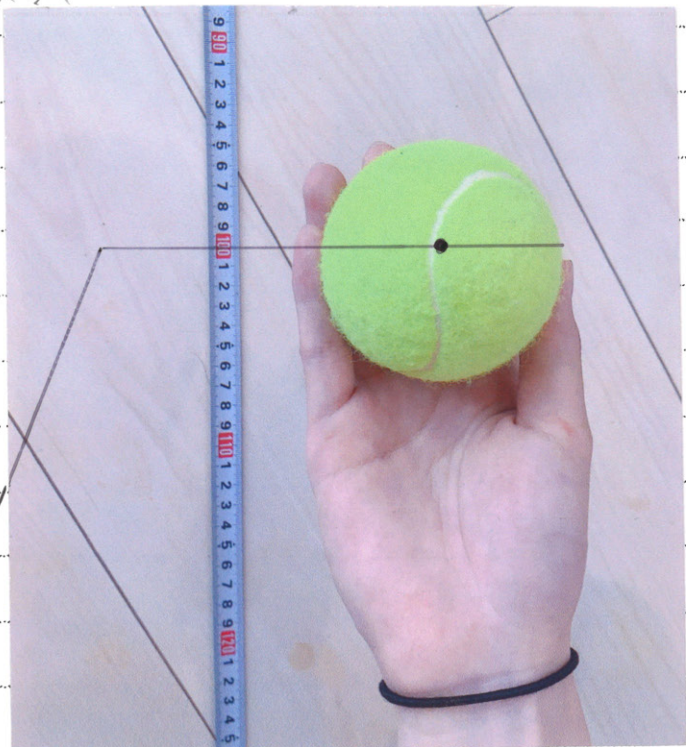


ゴミ箱の直径約20cm

ゴミ箱が動かないようにする壁

ボールの投げた距離を正確に測るためのメジャー

ボールの中心でメジャーに合わせて投げ入れる。



(写真2)

実験結果

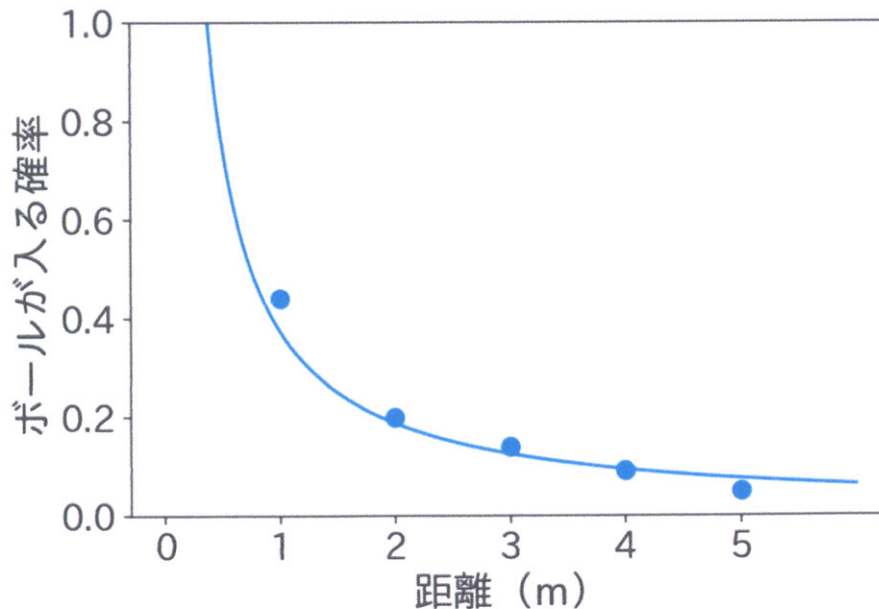
: ボールを投げた距離、ボールを投げた回数、
ボールが入った回数、ボールが入った確率をまとめた
結果を表1に表す。

[表1]

ボールを投げた距離	ボールが入った回数1	ボールを投げた回数1	ボールが入った回数2	ボールを投げた回数2	ボールが入る確率
1 m	43	100	45	100	11/25
2 m	15	100	25	100	1/5
3 m	14	100	-	-	7/50
4 m	9	100	-	-	9/100
5 m	5	100	-	-	1/20

注: 「-」の部分は何も記録なし。

表1の結果をグラフ化したものを図1に表す。



[図1]

青色の実線は、ボールが入る確率が、ボールを投げた距離(l)に
反比例すると仮定したものである。以下の式から比例定数 a の
平均を実験結果から求めると、 $a = 0.374$

$$\text{ボールが入る確率} = \frac{a}{l} = \frac{0.374}{l}$$

仮説1: 反比例を仮定するとかなり良い結果が出たため、ボールが入る確率が投げる距離(l)に反比例するとこの仮説は良さそうだ。その理由を考えてみると、ゴミ箱にボールが入る確率は、ゴミ箱の半径を r とすると、ボールが投げらる範囲は「距離(l) + $2r$ 」に比例し、ボールが入る範囲は「 $2r$ 」である。よって、ボールが入る確率は以下のような関係があると考えられる。

$$\text{ボールが入る確率}(P) = \frac{2r}{l + 2r}$$

したがって、この仮説が正しいとすれば、ゴミ箱の半径 r が以下の式より実験結果から求められることが予想される。

$$r = \frac{Pl}{2(1-P)}$$

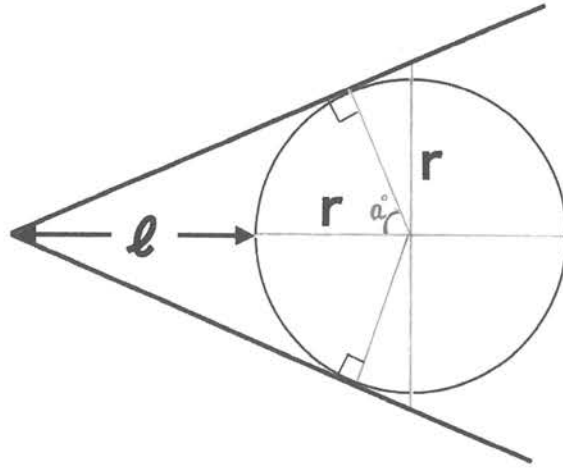
実際に、各データ点から求めて半径 r の平均を求めると

$$r = 0.24 \text{ (cm)} \quad (\text{実験結果から求めた半径})$$

ところが実際のゴミ箱の半径は10cmであるから、この結果は、実際からかなりかけ離れている。この仮説は正しく実験結果を説明できないことが分かった。

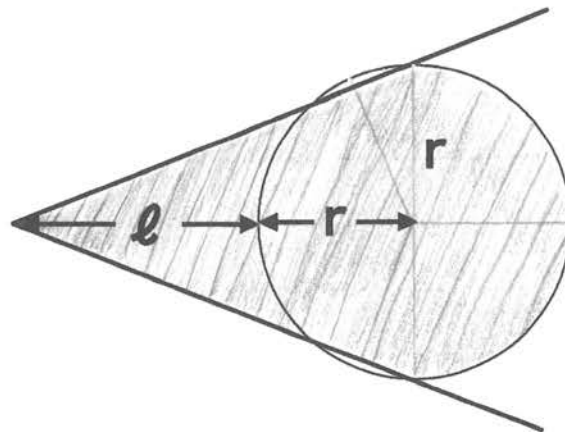
仮説2: 仮説2の実験結果の理由をよく考えてみると、ボールは半径 r の円(ゴミ箱の口)の直径 $2r$ の範囲だけに落ちる訳ではなく、半径 r の面積に落ちる確率は、ボールが落ちる円(ゴミ箱の口)の面積に落ちるからではないかと考えた。よって、ボールが入る確率は、ボールが落ちる円(ゴミ箱の口)の面積 πr^2 とボールを投げた地点と円を結ぶ2つの線が囲む面積(S)の比に比例するであろうという仮説2を立てた。

$$\text{ボールが入る確率}(P) = \frac{\pi r^2}{S}$$



$\angle \alpha$ の角度が分からなかったため、 S を求めるのは難しい。

 $\alpha = 1^\circ$ 、下図のように「底辺 $(l+r)$ 、高さ r の直角三角形の面積 2 分の 1 と、半径 r の円の面積の半分の合計を S として確率を計算した。その理由は、距離が遠くなるほど面積 S は正確になるため、この S を使っても十分な精度で出せると考えたからだ。



$$S = (l+r) \cdot r + \pi r^2 / 2$$

よって、以下の式が成り立つ。(P = ボールが入る確率)

$$P = \frac{\pi r^2}{S} = \frac{\pi r^2}{r(l+r) + \frac{\pi r^2}{2}}$$

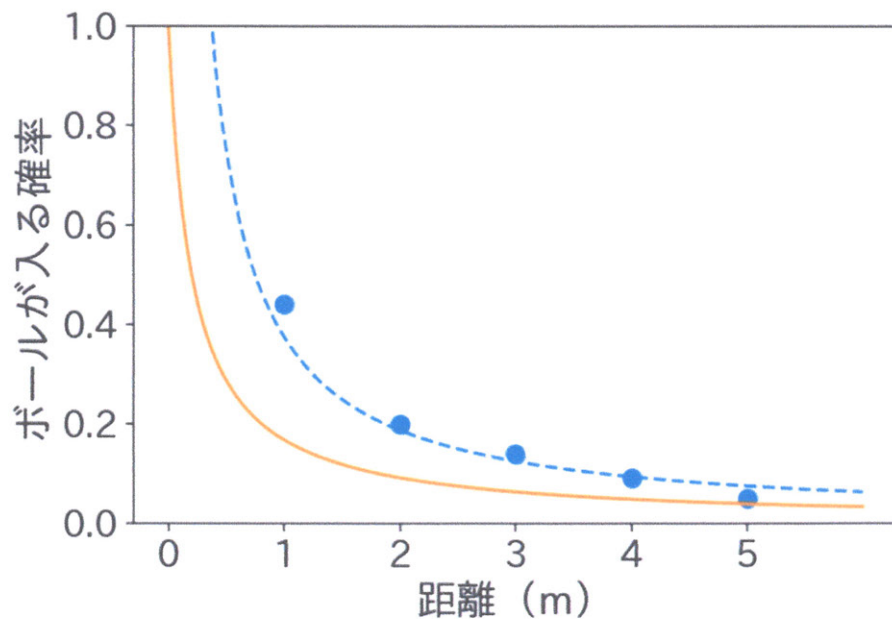
したがって、この仮説が正しいとすれば、ゴミ箱の半径 r が以下の式より実験結果から求めるとかきき出すことができる。

$$r = \frac{2lP}{2\pi + (\pi - 2) \cdot 2P}$$

実際に r の値を求めると、その平均は $r = 0.11(\text{m})$

と $r = 37$ 、実際のゴミ箱の半径は 10cm であるから、この仮説はかなり精度が高いものだと分かった。

そこで、この仮説を元に実際の半径 r を用いて r を r 化してみた (図3のオレンジ色の線。破線は反比例の r の線)。



[図3]

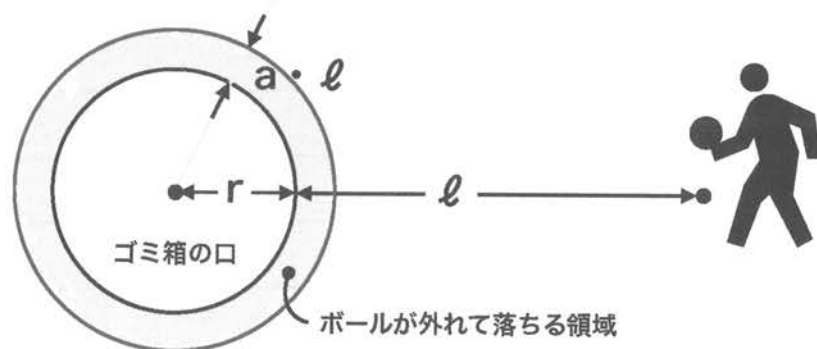
投げた距離が近いとき、実験データとよく一致することが分かった。面積 S が投げた距離が近いほど、本当の面積からずれるが大きくなることを考えれば説明がつく。しかし、このだけずれると、このように、実際の半径の長さに近かったとしても、偶然値が近くなる、ただけという可能性も否定はできない。

仮説3 : 仮説2から求めらしたゴミ箱の半径(11cm)は仮説1より求めたゴミ箱の半径(24cm)よりもずらぬ良い。

面積を用いた確率を考へるという方針は間違えてないだろう。しかし、偶然、ボールがゴミ箱に入る確率は投げる人によっても変化するはずである。仮説2は人によつて成功確率の違いを明確に取り込んでいない。

例えば、面積を用いたという方針は間違えてない。ほぼ100%の確率でボールがゴミ箱に入らぬ人かいた場合、仮説2を用いて求めらる半径が"ぬ"のようなものが説明するのは難しい。

そこで、「面積」と「距離」の関係で人による成功確率の違いも説明できる確率をどうすれば導けるかを考へてみた。よく考へてみると、ボールを投げる人は、ゴミ箱に入らぬようにして投げているので、ボールが足元に落ちる確率はかなり少なく、その代わり、半径 r の円(ゴミ箱の口)の中心に集中して落ちるはずである。



[図4]

ただし、ボールは半径 r の円の外側にも落ちる。ボールが外側に落ちる範囲はボール投げが得意な人ほど狭いだろう。しかし、どんなに上手にボールを投げる人でも、ボールを投げた距離が長くなるほど、ボールはゴミ箱の外側に落ちる範囲は、広くなるはずである。

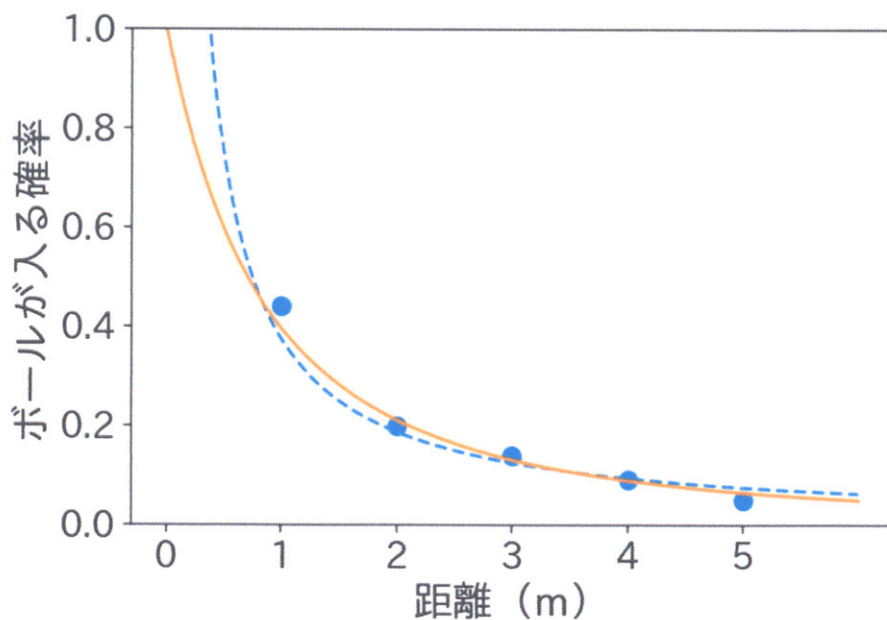
3.7. 円の外側に落ちる幅はボールを投げた距離 l に比例して広がることを考えた。これは比例定数を a として、「 $a \cdot l$ 」と表すことができる(図)。この状況を想定すると、ボールが入る確率は以下のように表せる。

$$P = \frac{\pi r^2}{\pi (r + a \cdot l)^2}$$

したがって、この仮説が正しいとすれば、 a は以下の式により実験結果から求めることができるはずである。

$$a = \left(\frac{1}{\sqrt{P}} - 1 \right) \cdot \frac{r}{l}$$

実際に3.4.3のテスト7点から求めた a の平均値は $a = 0.059$ となった。この値を用いて、確率 P をグラフ化する。



[図5]

(図5のオレンジの線、破線は反比例 a と $1/l$ の線。)

どちらのグラフの方がより実験データとの誤差が小さいかという評価をグラフと実験データの差を2つ、3の絶対値を合計して比較した。

仮説3から求める P と実験データから求める P の誤差の合計は「0.094」である。また、反比例から求める P と実験データから求める P の誤差の合計は「0.122」である。したがって、仮説3は実験データをより良く説明してゐるに似てゐる。そのうえ、仮説3は、ボールを投げた人の成功確率まで含め、説明するに成功できる。優れた仮説と言えるだろう。

まとめ：ゴミ箱にゴミを投げ入れるという経験を数学で記述できるのにはなにかという単純な興味からこの研究を始めたが、最初はこの人にも多くのことを発見するに似てゐるには想像してゐた。また、納得がいく仮説にたどりつくまで粘り強く研究を進める過程で、失敗した仮説から次の仮説につなげるヒントを得るに成功していることも学んだ。まだまだ興味深いことが身近にたくさん潜んでゐると思うので、今後も身の回りに関心を持って日々過ごしてゐたいと思う。