

三角形における包絡線により定まる橙円の性質 —シュタイナーの内接橙円および外接橙円との関係—

石本 貴昭 *

1 概要

三角形 ABC において、点 A から点 B に向かって点 L が移動し、同時に点 B から点 C に向かって点 M が移動するとき、直線群 LM の包絡線 $P(ABC)$ は放物線となる（図 1）。また、三角形において 3 つの包絡線としての放物線（3 頂点を制御点とする 2 次ベジェ曲線に同じ）が存在する。

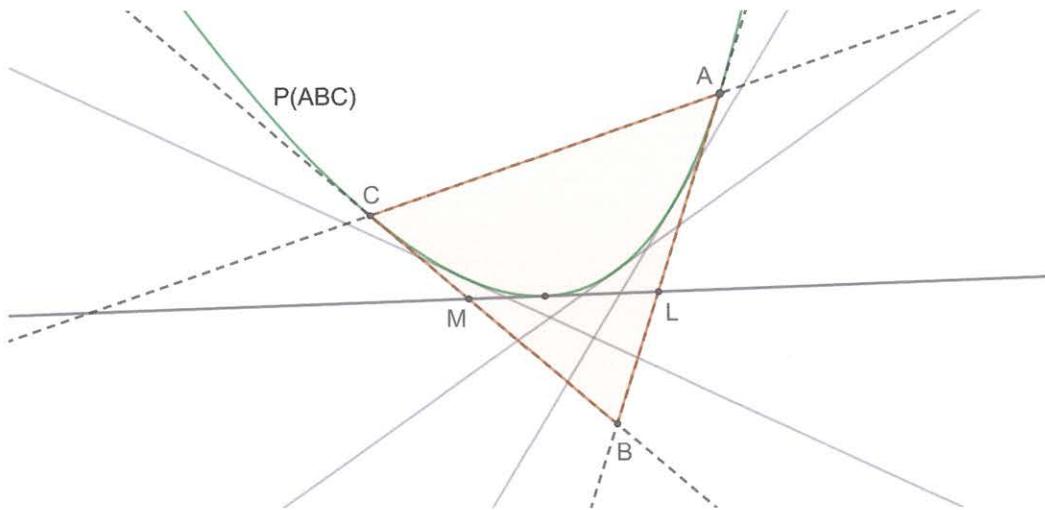


図 1. 直線群 LM の包絡線 $P(ABC)$. 点 A, C でそれぞれ直線 AB, BC と接する。

私はこの性質に興味を持ち、動的数学ソフトウェア「GeoGebra」を用いて作図を行ったところ、これら 3 つの包絡線により定まる新たな橙円を発見した。そこで、この橙円の性質を明らかにすることを本研究の目的とした。その結果、この橙円とシュタイナーの内接橙円、およびシュタイナーの外接橙円が常に相似であることを発見し、証明した。また、この新たな橙円に関する諸定理を証明した。

2 事実

事実 1

パラメータ α を含む曲線族 $f(x, y, \alpha) = 0$ の包絡線の方程式は、以下の連立方程式の解である。

$$\begin{cases} f(x, y, \alpha) = 0 \\ \frac{\partial}{\partial \alpha} f(x, y, \alpha) = 0 \end{cases}$$

* 学校法人中央大学 中央大学附属高等学校 3 年

事実 2

三角形におけるシュタイナーの外接楕円は、三角形の各頂点を通り、中心が三角形の重心と一致する唯一の楕円である（図 2）。

事実 3

三角形におけるシュタイナーの内接楕円は、三角形の各辺の中点で各辺と接する唯一の楕円であり、中心は元の三角形の重心と一致する（図 2）。

事実 4

三角形におけるシュタイナーの内接楕円および外接楕円は、三角形の重心を相似の中心として相似の位置にあり、相似比は $1:2$ である（図 2）。

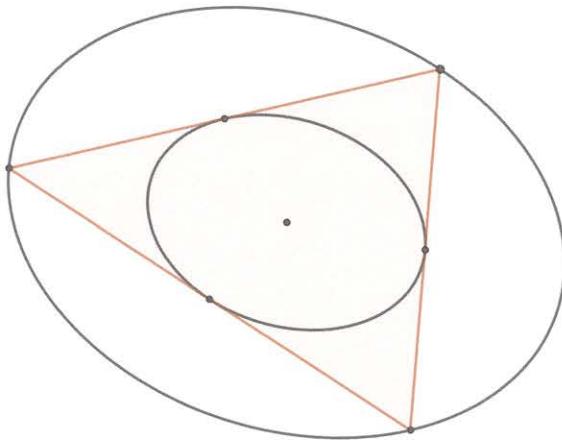


図 2. 三角形におけるシュタイナーの内接楕円（三角形内部）およびシュタイナーの外接楕円（三角形外部）。

事実 5

三角形 ABC において、辺 AB, BC を $s : (1-s)$ に内分する点をそれぞれ S_1, S_2 とおく (s は任意の実数)。また、3点 A, B, C を制御点とし、2点 A, C を通る2次ベジエ曲線を $P(ABC)$ とおく。このとき、直線 S_1S_2 は2次ベジエ曲線 $P(ABC)$ と接し、その接点は線分 S_1S_2 を $s : (1-s)$ に内分する。

3 座標の定義

座標定義 1

$A(1, 1), B(a, b), C(-a-1, -b-1)$ (a, b は $a \neq b$ を満たす任意の実数)

座標定義 2

$A(0, 0), B(1, 0), C(c, d)$ (c, d は任意の正実数)

4 包絡線楕円の定義

座標定義 1 を用いる。パラメータ t を用いて3点 L, M, N の座標を以下のように定める (t は任意の実数)。

$$L(1 + (a-1)t, 1 + (b-1)t), M(a - (2a+1)t, b - (2b+1)t), N(-a - 1 + (a+2)t, -b - 1 + (b+2)t)$$

t が $0 \leq t \leq 1$ の範囲で増加するとき、点 L は点 A から点 B に向かって、点 M は点 B から点 C に向かって、点 N

は点 C から点 A に向かって移動する。

このとき、直線群 LM , MN , NL の包絡線をそれぞれ $P(ABC)$, $P(BCA)$, $P(CAB)$ とおく。方程式をそれぞれ $f_1(x, y) = 0$, $f_2(x, y) = 0$, $f_3(x, y) = 0$ とおく。事実 1 を用いて、方程式 $f_1(x, y) = 0$ を導出する。直線 LM の方程式は以下のように表せる。

$$3(a-b)t^2 - 3(bx - ay + a - b)t + (b-1)x - (a-1)y + a - b = 0 \quad (1)$$

この式を t で偏微分して

$$6(a-b)t - 3(bx - ay + a - b) = 0$$

座標定義 1 より $a \neq b$ であるから

$$t = \frac{bx - ay + a - b}{2(a-b)} \quad (2)$$

(1) 式および (2) 式を連立して t を消去すると、方程式 $f_1(x, y) = 0$ を得る。

$$f_1(x, y) = 3b^2x^2 - 6abxy + 3a^2y^2 + 2(a-b)(b+2)x - 2(a-b)(a+2)y - (a-b)^2 = 0$$

方程式 $f_2(x, y) = 0$, $f_3(x, y) = 0$ についても同様にして

$$f_2(x, y) = 3(b+1)^2x^2 - 6(a+1)(b+1)xy + 3(a+1)^2y^2 + 2(a-b)(b-1)x - 2(a-b)(a-1)y - (a-b)^2 = 0$$

$$f_3(x, y) = 3x^2 - 6xy + 3y^2 - 2(a-b)(2b+1)x + 2(a-b)(2a+1)y - (a-b)^2 = 0$$

と導出できる。ここで、方程式 $f_1(x, y) + f_2(x, y) + f_3(x, y) = 0$ を満たす図形を考える。

$$f_1(x, y) + f_2(x, y) + f_3(x, y) = 6(b^2 + b + 1) - 6(2ab + a + b + 2)xy + 6(a^2 + a + 1)y^2 - 3(a-b)^2 = 0$$

すなわち

$$2(b^2 + b + 1) - 2(2ab + a + b + 2)xy + 2(a^2 + a + 1)y^2 - (a-b)^2 = 0$$

この式の左辺を $E(x, y)$ とおく。方程式 $E(x, y) = 0$ を満たす図形は橢円を表す。以下、この橢円を三角形 ABC における「包絡線橢円」と呼ぶ。

「包絡線橢円」の定義 1

三角形 ABC における「包絡線橢円」を以下の方程式で定める（座標定義 1）。

$$f_1(x, y) + f_2(x, y) + f_3(x, y) = 0$$

すなわち

$$E(x, y) = 2(b^2 + b + 1) - 2(2ab + a + b + 2)xy + 2(a^2 + a + 1)y^2 - (a-b)^2 = 0$$

座標定義 2 を用いた場合、包絡線 $P(ABC)$, $P(BCA)$, $P(CAB)$ の方程式 $f_1(x, y) = 0$, $f_2(x, y) = 0$, $f_3(x, y) = 0$ はそれぞれ以下の通り。

$$f_1(x, y) = d^2x^2 - 2(c-2)dxy + (c-2)^2y^2 - 4dy = 0$$

$$f_2(x, y) = 4d^2x^2 - 4(2c-1)dxy + (2c-1)^2y^2 - 4d^2x + 4cdy = 0$$

$$f_3(x, y) = d^2x^2 - 2(c+1)dxy + (c+1)^2y^2 - 2d^2x + 2(c-1)dy + d^2 = 0$$

3 つの方程式を足し合わせて

$$F(x, y) = f_1(x, y) + f_2(x, y) + f_3(x, y) = 6d^2x^2 - 6(2c-1)dxy + 6(c^2 - c + 1)y^2 - 6d^2x + 6(c-1)dy + d^2 = 0$$

とおく。方程式 $F(x, y) = 0$ は三角形 ABC における「包絡線橢円」を表す。

「包絡線橢円」の定義 2

三角形 ABC における「包絡線橢円」を以下の方程式で定める（座標定義 2）。

$$f_1(x, y) + f_2(x, y) + f_3(x, y) = 0$$

すなわち

$$F(x, y) = 6d^2x^2 - 6(2c-1)dxy + 6(c^2 - c + 1)y^2 - 6d^2x + 6(c-1)dy + d^2 = 0$$

5 定理

座標定義 1 および 2 において、三角形 ABC の重心を G とおく。

定理 1

三角形におけるシュタイナーの内接橢円、「包絡線橢円」、およびシュタイナーの外接橜円は、三角形の重心を相似の中心として相似の位置にあり、相似比は $1 : \sqrt{2} : 2$ である（図 3）。

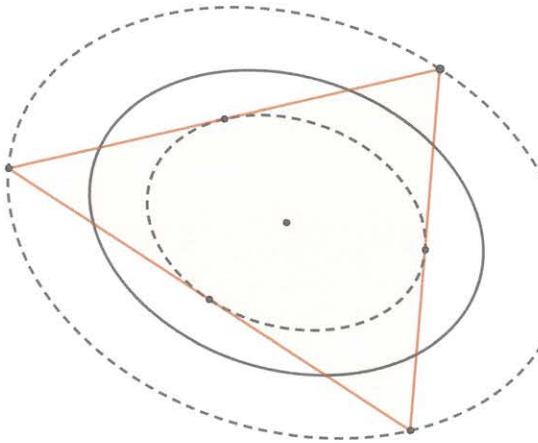


図 3. 三角形におけるシュタイナーの内接橜円（破線、三角形内部）、「包絡線橜円」（実線）、およびシュタイナーの外接橜円（破線、三角形外部）。

証明。座標定義 1 を用いる。事実 5 より、シュタイナーの内接橜円とシュタイナーの外接橜円は相似である。よって、定理 1 を示すには「包絡線橜円」とシュタイナーの外接橜円が相似であることを示せばよい。

まず、三角形 ABC におけるシュタイナーの外接橜円の方程式を求める。事実 2 より、三角形 ABC におけるシュタイナーの外接橜円の中心は点 G と一致する。また、 $A(1, 1)$, $B(a, b)$, $C(-a-1, -b-1)$ であるから、点 G は原点と一致する。よって、方程式を $px^2 + qxy + ry^2 + 1 = 0$ とおく (p, q, r は実数であり p, r は 0 でない)。

事実 2 より、三角形 ABC におけるシュタイナーの外接橜円は 3 点 A, B, C を通る。よって、3 点の座標をこの方程式に代入して係数を決定すると以下の通り。ただし、座標定義 1 より $a \neq b$ である。

$$p = -\frac{b^2 + b + 1}{(a-b)^2}, \quad q = \frac{2ab + a + b + 2}{(a-b)^2}, \quad r = -\frac{a^2 + a + 1}{(a-b)^2}$$

よって、三角形 ABC におけるシュタイナーの外接橜円の方程式は以下の通り。

$$(b^2 + b + 1)x^2 - (2ab + a + b + 2)xy + (a^2 + a + 1)y^2 - (a - b)^2 = 0$$

次に、この橜円を点 G (原点) を中心として $\frac{1}{\sqrt{2}}$ 倍に縮小することを考える。 $x \rightarrow \sqrt{2}x$, $y \rightarrow \sqrt{2}y$ と置き換えればよいので、縮小してできる図形の方程式は以下の通り。

$$2(b^2 + b + 1)x^2 - 2(2ab + a + b + 2)xy + 2(a^2 + a + 1)y^2 - (a - b)^2 = 0$$

この式は、「包絡線橢円」の定義 1 における方程式 $E(x, y) = 0$ と一致する。よって、三角形 ABC における「包絡線橢円」とシュタイナーの外接橢円は、点 G を相似の中心として相似の位置にあり、相似比は $1 : \sqrt{2}$ である。■

定理 2. —

三角形における「包絡線橢円」と、三角形の各辺との交点は、各辺を $1 : (1 + \sqrt{3}) : 1$ に内分する。

証明。座標定義 2 を用いる。「包絡線橤円」の定義 2 より、三角形 ABC における「包絡線橤円」の方程式は以下の通り。

$$F(x, y) = 6d^2x^2 - 6(2c-1)dxy + 6(c^2 - c + 1)y^2 - 6d^2x + 6(c-1)dy + d^2 = 0$$

(i) 辺 AB 上の交点について

辺 AB は直線 $y = 0$ (x 軸) 上にあるため、方程式 $F(x, y) = 0$ に代入して

$$F(x, 0) = 6d^2x^2 - 6d^2x + d^2 = 0$$

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{3}}{6}$$

よって内分比は

$$\frac{3 - \sqrt{3}}{6} : \left(\frac{3 + \sqrt{3}}{6} - \frac{3 - \sqrt{3}}{6} \right) : \left(1 - \frac{3 + \sqrt{3}}{6} \right)$$

すなわち $1 : (1 + \sqrt{3}) : 1$ である。

(ii) 辺 CA 上の交点について

辺 CA は直線 $y = \frac{d}{c}x$ 上にあるため、方程式 $F(x, y) = 0$ に代入して

$$F\left(x, \frac{d}{c}x\right) = 6d^2x^2 - 6(2c-1)dx \cdot \frac{d}{c}x + 6(c^2 - c + 1)\left(\frac{d}{c}x\right)^2 - 6d^2x + 6(c-1)d \cdot \frac{d}{c}x + d^2 = 0$$

$$6x^2 - 6cx + c^2 = 0$$

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{3}}{6}c$$

(i) と同様にして、内分比は $1 : (1 + \sqrt{3}) : 1$ である。

(iii) 辺 BC 上の交点について

・ $c \neq 1$ のとき

辺 BC は直線 $y = \frac{d}{c-1}x - \frac{d}{c-1}$ 上にあるため、方程式 $F(x, y) = 0$ に代入して整理すると

$$6x^2 - 6(c+1)x + c^2 + 4c + 1 = 0$$

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{3}}{6}c + \frac{3 \mp \sqrt{3}}{6} \quad (\text{複号同順})$$

よって内分比は

$$\left| \left(\frac{3 - \sqrt{3}}{6}c + \frac{3 + \sqrt{3}}{6} \right) - 1 \right| : \left| \left(\frac{3 + \sqrt{3}}{6}c + \frac{3 - \sqrt{3}}{6} \right) - \left(\frac{3 - \sqrt{3}}{6}c + \frac{3 + \sqrt{3}}{6} \right) \right| : \left| c - \left(\frac{3 + \sqrt{3}}{6}c + \frac{3 - \sqrt{3}}{6} \right) \right|$$

すなわち $1 : (1 + \sqrt{3}) : 1$ である。

・ $c = 1$ のとき

辺 BC は直線 $x = 1$ 上にあるため、方程式 $F(x, y) = 0$ に代入して

$$F(1, y) = 6d^2 \cdot 1^2 - 6(2c-1)d \cdot 1 \cdot y + 6(c^2 - c + 1)y^2 - 6d^2 \cdot 1 + 6(c-1)dy + d^2 = 0$$

$$6y^2 - 6dy + d^2 = 0$$

$$y = \frac{3 \pm \sqrt{3}}{6}d$$

(i) と同様にして、内分比は $1 : (1 + \sqrt{3}) : 1$ である。

以上 (i)~(iii) より、定理 2 は示された。■

ここで、三角形 ABC における「包絡線橢円」と、三角形 ABC の各辺との 6 交点をそれぞれ P, Q, R, S, T, U とおく。ただし、 $A, R, U, B, P, S, C, Q, T, A$ の順に三角形 ABC を一周する（図 4）。

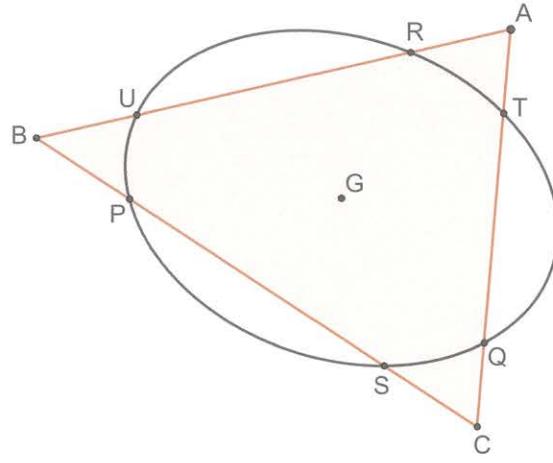


図 4. 三角形 ABC における「包絡線橢円」と、三角形 ABC の各辺との 6 交点 P, Q, R, S, T, U 。各辺を $1 : (1 + \sqrt{3}) : 1$ に内分する。

定理 3

三角形 ABC における「包絡線橤円」の 6 交点について、以下の式が成り立つ。

$$GA^2 + GB^2 + GC^2 = 3(GP^2 + GS^2) = 3(GQ^2 + GT^2) = 3(GR^2 + GU^2) \quad (a)$$

$$GA^2 + GB^2 + GC^2 = GP^2 + GQ^2 + GR^2 + GS^2 + GT^2 + GU^2 \quad (b)$$

証明。 (b) 式は (a) 式から直ちに導出できるため、まず (a) 式を示す。辺 BC の中点を I とおくと、三角形 ABC について中線定理より

$$AB^2 + CA^2 = 2(AI^2 + BI^2)$$

$$BI = \frac{1}{2}BC \text{ より}$$

$$AI^2 = \frac{1}{2}AB^2 - \frac{1}{4}BC^2 + \frac{1}{2}CA^2 \quad (3)$$

定理 2 より $BP = CS$ であるから、点 I は線分 PS の中点である。三角形 GPS について中線定理より

$$GP^2 + GS^2 = 2(GI^2 + PI^2)$$

$GI = \frac{1}{3}AI$ および $PI = \frac{1}{2\sqrt{3}}BC$ より

$$\begin{aligned}
 GP^2 + GS^2 &= 2\left(\frac{1}{9}AI^2 + \frac{1}{12}BC^2\right) \\
 &= 2\left\{\frac{1}{9}\left(\frac{1}{2}AB^2 - \frac{1}{4}BC^2 + \frac{1}{2}CA^2\right) + \frac{1}{12}BC^2\right\} (\because (3) \text{ 式}) \\
 &= \frac{1}{9}(AB^2 + BC^2 + CA^2)
 \end{aligned} \tag{4}$$

ところで、 $GA = \frac{2}{3}AI$ および (3) 式より

$$\begin{aligned}
 GA^2 &= \frac{4}{9}AI^2 = \frac{4}{9}\left(\frac{1}{2}AB^2 - \frac{1}{4}BC^2 + \frac{1}{2}CA^2\right) \\
 &= \frac{2}{9}AB^2 - \frac{1}{9}BC^2 + \frac{2}{9}CA^2
 \end{aligned}$$

同様にして

$$\begin{aligned}
 GB^2 &= \frac{2}{9}BC^2 - \frac{1}{9}CA^2 + \frac{2}{9}AB^2 \\
 GC^2 &= \frac{2}{9}CA^2 - \frac{1}{9}AB^2 + \frac{2}{9}BC^2
 \end{aligned}$$

辺々足し合わせて

$$\begin{aligned}
 GA^2 + GB^2 + GC^2 &= \frac{1}{3}(AB^2 + BC^2 + CA^2) \\
 &= 3 \cdot \frac{1}{9}(AB^2 + BC^2 + CA^2) \\
 &= 3(GP^2 + GS^2) (\because (4) \text{ 式})
 \end{aligned}$$

同様にして

$$\begin{aligned}
 GA^2 + GB^2 + GC^2 &= 3(GQ^2 + GT^2) \\
 GA^2 + GB^2 + GC^2 &= 3(GR^2 + GU^2)
 \end{aligned}$$

となり、(a) 式を得る。次に (b) 式を示す。(a) 式より

$$GP^2 + GS^2 = GQ^2 + GT^2 = GR^2 + GU^2 = \frac{1}{3}(GA^2 + GB^2 + GC^2)$$

であるから

$$(GP^2 + GS^2) + (GQ^2 + GT^2) + (GR^2 + GU^2) = 3 \cdot \frac{1}{3}(GA^2 + GB^2 + GC^2)$$

すなわち

$$GA^2 + GB^2 + GC^2 = GP^2 + GQ^2 + GR^2 + GS^2 + GT^2 + GU^2$$

となり、(b) 式を得る。■

定理 2 より、座標定義 1 における 6 交点の座標はそれぞれ以下の通り。

$$\begin{aligned}
 P &\left(\frac{2\sqrt{3}a - 3 + \sqrt{3}}{6}, \frac{2\sqrt{3}b - 3 + \sqrt{3}}{6} \right), \quad S \left(\frac{-2\sqrt{3}a - 3 - \sqrt{3}}{6}, \frac{-2\sqrt{3}b - 3 - \sqrt{3}}{6} \right) \\
 Q &\left(\frac{-(3 + \sqrt{3})a - 2\sqrt{3}}{6}, \frac{-(3 + \sqrt{3})b - 2\sqrt{3}}{6} \right), \quad T \left(\frac{-(3 - \sqrt{3})a + 2\sqrt{3}}{6}, \frac{-(3 - \sqrt{3})b + 2\sqrt{3}}{6} \right) \\
 R &\left(\frac{(3 - \sqrt{3})a + 3 + \sqrt{3}}{6}, \frac{(3 - \sqrt{3})b + 3 + \sqrt{3}}{6} \right), \quad U \left(\frac{(3 + \sqrt{3})a + 3 - \sqrt{3}}{6}, \frac{(3 + \sqrt{3})b + 3 - \sqrt{3}}{6} \right)
 \end{aligned}$$

また、三角形 ABC における「包絡線楕円」において、点 P, Q, R, S, T, U における接線をそれぞれ $l_P, l_Q, l_R, l_S, l_T, l_U$ とおく。

補題

三角形 XYZ におけるシュタイナーの外接楕円を E_c とおくと、点 X における E_c の接線は直線 YZ と平行である（点 Y, Z における接線についても同様）。

証明。三角形 $X'Y'Z'$ において、辺 $Y'Z'$ の中点を X 、辺 $Z'X'$ の中点を Y 、辺 $X'Y'$ の中点を Z とおく。

事実 3 より、三角形 $X'Y'Z'$ におけるシュタイナーの内接楕円は 3 点 X, Y, Z を通る。また、その中心は三角形 XYZ の重心と一致する。これは、事実 3 より三角形 $X'Y'Z'$ におけるシュタイナーの内接楕円の中心が三角形 $X'Y'Z'$ の重心と一致し、三角形 $X'Y'Z'$ の重心が三角形 XYZ の重心と一致するためである。

よって事実 2 より、三角形 $X'Y'Z'$ におけるシュタイナーの内接楕円は三角形 XYZ におけるシュタイナーの外接楕円 E_c と一致する。

事実 3 より、点 X における E_c の接線は直線 $Y'Z'$ であり、中点連結定理より直線 $Y'Z'$ と直線 YZ は平行であるから、補題は示された。■

定理 4

三角形 ABC における「包絡線楕円」について、2 接線 l_P, l_S の交点を D 、2 接線 l_Q, l_T の交点を E 、2 接線 l_R, l_U の交点を F とおくと、3 点 D, E, F は三角形 ABC におけるシュタイナーの外接楕円上にある。また、 $\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AG}, \overrightarrow{BE} = 2\overrightarrow{BG}, \overrightarrow{CF} = 2\overrightarrow{CG}$ が成り立つ（図 5）。

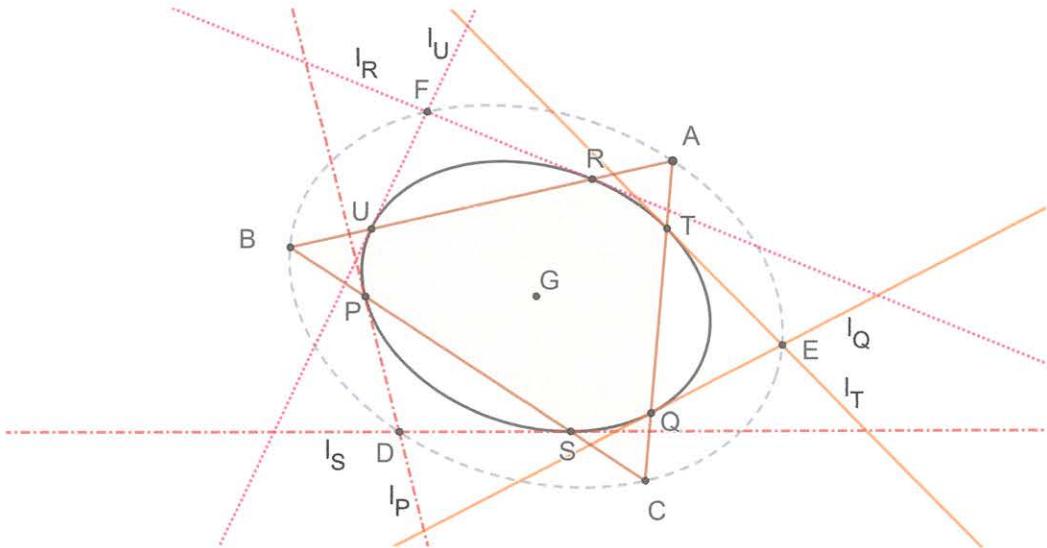


図 5. 接線 $l_P, l_Q, l_R, l_S, l_T, l_U$ および 3 点 D, E, F 。

証明。座標定義 1 を用いる。三角形 ABC における「包絡線楕円」は 3 点 P, Q, R を通り、この「包絡線楕円」の中心（三角形 ABC の重心 G ）は三角形 PQR の重心と一致する。よって、三角形 ABC における「包絡線楕円」は三角形 PQR におけるシュタイナーの外接楕円と一致する。

ゆえに補題より、点 P における「包絡線楕円」の接線 l_P は直線 QR と平行である。

直線 QR の方程式は

$$\left(b + \frac{1 + \sqrt{3}}{2} \right)x - \left(a + \frac{1 + \sqrt{3}}{2} \right)y + \frac{a - b}{2} = 0$$

であるから、接線 l_P の方程式は

$$\left(b + \frac{1+\sqrt{3}}{2} \right) \left(x - \frac{2\sqrt{3}a - 3 + \sqrt{3}}{6} \right) - \left(a + \frac{1+\sqrt{3}}{2} \right) \left(y - \frac{2\sqrt{3}b - 3 + \sqrt{3}}{6} \right) = 0$$

となる。この方程式に $(x, y) = (-1, -1)$ を代入すると成り立つので、接線 l_P は点 $(-1, -1)$ を通る。

同様にして、直線 TU の方程式は

$$\left(b + \frac{1-\sqrt{3}}{2} \right) x - \left(a + \frac{1-\sqrt{3}}{2} \right) y + \frac{a-b}{2} = 0$$

であるから、接線 l_S の方程式は

$$\left(b + \frac{1-\sqrt{3}}{2} \right) \left(x - \frac{-2\sqrt{3}a - 3 - \sqrt{3}}{6} \right) - \left(a + \frac{1-\sqrt{3}}{2} \right) \left(y - \frac{-2\sqrt{3}b - 3 - \sqrt{3}}{6} \right) = 0$$

となる。この方程式に $(x, y) = (-1, -1)$ を代入すると成り立つので、接線 l_S は点 $(-1, -1)$ を通る。

以上より、2接線 l_P, l_S の交点 D の座標は $(-1, -1)$ である。

同様にして、2接線 l_Q, l_T の交点 E の座標は $(-a, -b)$ 、2接線 l_R, l_U の交点 F の座標は $(a+1, b+1)$ である。3点 D, E, F の座標を、シュタイナーの外接楕円の方程式 $(b^2+b+1)x^2 - (2ab+a+b+2)xy + (a^2+a+1)y^2 - (a-b)^2 = 0$ に代入すると全て成り立つ。■

定理 5.

9点 I, J, K, P_i ($i = 1, 2, \dots, 6$) を以下のように定める。

I : 線分 QR, TU の交点, J : 線分 RP, US の交点, K : 線分 PQ, ST の交点

P_1 : 線分 PQ , 包絡線 $P(BCA)$ の接点, P_2 : 線分 US , 包絡線 $P(ABC)$ の接点

P_3 : 線分 QR , 包絡線 $P(CAB)$ の接点, P_4 : 線分 ST , 包絡線 $P(BCA)$ の接点

P_5 : 線分 RP , 包絡線 $P(ABC)$ の接点, P_6 : 線分 TU , 包絡線 $P(CAB)$ の接点

このとき、これらの9点は三角形 ABC におけるシュタイナーの内接楕円上にある。また、 $\vec{AI} = \frac{1}{2}\vec{AG}$, $\vec{BJ} = \frac{1}{2}\vec{BG}$, $\vec{CK} = \frac{1}{2}\vec{CG}$, $\vec{GP}_1 + \vec{GP}_4 = \vec{GP}_2 + \vec{GP}_5 = \vec{GP}_3 + \vec{GP}_6 = \vec{0}$ が成り立つ（図6）。

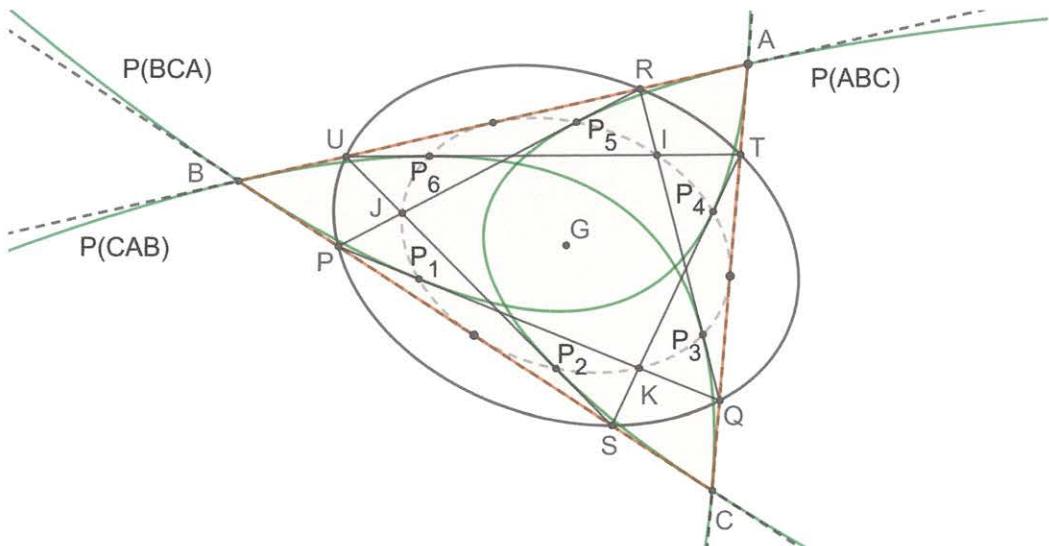


図 6. 包絡線 $P(ABC)$, $P(BCA)$, $P(CAB)$ および 9 点 I, J, K, P_i .

証明. 座標定義 1 を用いる. 直線 PQ , QR , RP , ST , TU , US の方程式はそれぞれ以下の通り.

$$\begin{aligned} \text{直線 } PQ : & \left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}b - \frac{1-\sqrt{3}}{2} \right)x - \left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}a - \frac{1-\sqrt{3}}{2} \right)y - \frac{a-b}{2} = 0 \\ \text{直線 } QR : & \left(b + \frac{1+\sqrt{3}}{2} \right)x - \left(a + \frac{1+\sqrt{3}}{2} \right)y + \frac{a-b}{2} = 0 \\ \text{直線 } RP : & \left(\frac{1-\sqrt{3}}{2}b + 1 \right)x - \left(\frac{1-\sqrt{3}}{2}a + 1 \right)y - \frac{a-b}{2} = 0 \\ \text{直線 } ST : & \left(\frac{1-\sqrt{3}}{2}b - \frac{1+\sqrt{3}}{2} \right)x - \left(\frac{1-\sqrt{3}}{2}a - \frac{1+\sqrt{3}}{2} \right)y - \frac{a-b}{2} = 0 \\ \text{直線 } TU : & \left(b + \frac{1-\sqrt{3}}{2} \right)x - \left(a + \frac{1-\sqrt{3}}{2} \right)y + \frac{a-b}{2} = 0 \\ \text{直線 } US : & \left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}b + 1 \right)x - \left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}a + 1 \right)y - \frac{a-b}{2} = 0 \end{aligned}$$

よって, 3 点 D , E , F の座標はそれぞれ以下の通り.

$$I \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right), \quad J \left(\frac{a}{2}, \frac{a}{2} \right), \quad K \left(\frac{-a-1}{2}, \frac{-a-1}{2} \right)$$

また, 包絡線 $P(ABC)$, $P(BCA)$, $P(CAB)$ は 3 点 A , B , C を制御点とする 2 次ベジエ曲線であるから, 事実 5 より P_i の座標はそれぞれ以下の通り.

$$\begin{aligned} P_1 & \left(\frac{a-1}{2\sqrt{3}}, \frac{b-1}{2\sqrt{3}} \right), \quad P_2 \left(-\frac{a+2}{2\sqrt{3}}, -\frac{b+2}{2\sqrt{3}} \right), \quad P_3 \left(-\frac{2a+1}{2\sqrt{3}}, -\frac{2b+1}{2\sqrt{3}} \right) \\ P_4 & \left(-\frac{a-1}{2\sqrt{3}}, -\frac{b-1}{2\sqrt{3}} \right), \quad P_5 \left(\frac{a+2}{2\sqrt{3}}, \frac{b+2}{2\sqrt{3}} \right), \quad P_6 \left(\frac{2a+1}{2\sqrt{3}}, \frac{2b+1}{2\sqrt{3}} \right) \end{aligned}$$

9 点 I , J , K , P_i の座標を, シュタイナーの内接楕円の方程式 $4(b^2 + b + 1)x^2 - 4(2ab + a + b + 2)xy + 4(a^2 + a + 1)y^2 - (a - b)^2 = 0$ に代入すると全て成り立つ. ■

6 今後の展望

重心座標により, 三角形におけるシュタイナーの内接楕円および外接楕円の方程式を簡潔に表現でき, それぞれの楕円に成り立つ諸定理を証明できることが知られている. 今後, 本研究で直交座標を用いて証明した「包絡線楕円」に関する諸定理を, 重心座標を用いた異なる方法で証明することを考えている. また, 重心座標を用いて「包絡線楕円」の新たな性質を明らかにしたい.

さらに, n 角形 ($n \geq 3$) において n 個の包絡線としての放物線が存在するため, n 角形における「包絡線楕円」を三角形と同様にして定義できる. 今後, n 角形における「包絡線楕円」を研究し, 一般的な定理を証明したい.

7 参考文献

- [1] E. ハイラー, G. ヴァンナー『解析教程 上 新装版』(2011) シュプリンガー・ジャパン株式会社, pp. 117-121.
- [2] 一松信, 畠柳和生『重心座標による幾何学』(2014) 株式会社 現代数学社.
- [3] 高木貞治『解析概論』(1970) 岩波書店, pp. 318-320.