二項係数の新しい公式 と 確率論への応用

寺本雅治　　柏木麻理子

関西学院高等部

1. 二項係数の新しい公式

私達は、二項係数の新しい公式を見つけた．図書館で公式集を調べ、海外の何人かの数学者にも聞いてみたが、今のところ誰もこの公式を知らないようだし、公式集にも掲載されていないので、新しいという可能性があるのではないかと思う．この論文の目的はこの公式の紹介と証明と確率論への応用である．もしこの公式が既に世界のどこかで発表されていたとしても、この応用は私達の独自な研究である可能性が高いと思う．それは、ここで考える確率の問題が私達のクラブで長年研究されてきたテーマで、海外の雑誌 [1] に掲載され、昨年は国際学会の査読を通過して、先輩が最新の成果を [2] で発表した．このことからわかるように、私達がこのテーマにおいては世界でも一番詳しいはずだからである．

まず、以下に公式の例を挙げる．N は自然数とする．

例 1. $n \geq 5$ になるような $n \in N$ に対して次の式が成り立つ．

$$\begin{aligned} &{}_{n-p}C_1 - {}_{n-2p}C_1 - {}_{n-3p}C_1 + {}_{n-4p}C_1 \\ &= (n-p) - (n-2p) - (n-3p) + (n-4p) = 0. \end{aligned} \tag{1.1}$$

例 2. $n \geq 10$ になるような $n \in N$ に対して次の式が成り立つ．

$$\begin{aligned} &{}_{n-p}C_2 - {}_{n-2p}C_2 - {}_{n-3p}C_2 + {}_{n-4p}C_2 - {}_{n-5p}C_2 + {}_{n-6p}C_2 + {}_{n-7p}C_2 - {}_{n-8p}C_2 \\ &= (n-p)(n-2p) - (n-2p)(n-3p) - (n-3p)(n-4p) + (n-4p)(n-5p) \\ &- (n-5p)(n-6p) + (n-6p)(n-7p) + (n-7p)(n-8p) - (n-8p)(n-9p) = 0. \end{aligned} \tag{1.2}$$

例 1 での加減計算は $+, -, -, +$ で例 2 での加減計算は $+, -, -, +, -, +, +, -$ となる．次に、ここで紹介する公式における $+$ と $-$ の使い方を帰納的に定義する．

定義 1. 以下のようなルール (1.3) で $+$ と $-$ を $+, 1$ と $-, +$ で置き換える

$$\{+\} \cdots > \{+, -\} \text{ かつ } \{-\} \cdots > \{-, +\}. \tag{1.3}$$

このルール (1.3) により 次のような $+$ と $-$ の列ができる．

$$\begin{aligned} &(i) +, -, -, + \\ &(ii) +, -, -, +, -, +, +, - \\ &(iii) +, -, -, +, -, +, +, -, -, +, +, -, +, -, -, + \\ &\qquad\vdots \end{aligned} \tag{1.4}$$

よって、この定義により 第 1 列は $+, -, -, +$、 第 2 列は $+, -, -, +, -, +, +, -$、第 3 列は $+, -, -, +, -, +, +, -, -, +, +, -, +, -, -, +$ となり、以降も同様である．

補題 1. $n \geq t + r$ となるような $n \in N$ において

$${}_nC_r - {}_{n-t}C_r = {}_{n-1}C_{r-1} + {}_{n-2}C_{r-1} + \ldots + {}_{n-t}C_{r-1}. \tag{1.5}$$

Proof.

$$\begin{aligned} {}_nC_r &= {}_{n-1}C_{r-1} + {}_{n-1}C_r = {}_{n-1}C_{r-1} + {}_{n-2}C_{r-1} + {}_{n-2}C_r \\ &= {}_{n-1}C_{r-1} + {}_{n-2}C_{r-1} + \ldots + {}_{n-t}C_{r-1} + {}_{n-t}C_r. \end{aligned}$$

よって (1) となる． □

私達のこの節での目標は次の公式 (1.6) を証明することである．証明方法は数学的帰納法であるが、高校生にとっては少し理解しにくい部分がある．

$$ {}_{n-p}C_r - {}_{n-2p}C_r - {}_{n-3p}C_r + {}_{n-4p}C_r - {}_{n-5p}C_r + {}_{n-6p}C_r + {}_{n-7p}C_r - {}_{n-8p}C_r, ..., {}_{n-2^{r+1}p}C_r = 0 \tag{1.6} $$

したがって、帰納法による証明に入る前に例をあげる．

例 3.

$$ \begin{aligned} &{}_{n-p}C_r - {}_{n-2p}C_r - {}_{n-3p}C_r + {}_{n-4p}C_r - {}_{n-5p}C_r + {}_{n-6p}C_r + {}_{n-7p}C_r - {}_{n-8p}C_r \\ &= ({}_{n-p}C_r - {}_{n-2p}C_r) - ({}_{n-3p}C_r - {}_{n-4p}C_r) - ({}_{n-5p}C_r - {}_{n-6p}C_r) + ({}_{n-7p}C_r - {}_{n-8p}C_r) \end{aligned} \tag{1.7} $$

(1.7) に補題 1 を使うと、

$$ \begin{aligned} (1.7) = &({}_{n-p-1}C_{r-1} + {}_{n-p-2}C_{r-1} + ... + {}_{n-2p}C_{r-1}) \\ &- ({}_{n-3p-1}C_{r-1} + {}_{n-3p-2}C_{r-1} + ... + {}_{n-4p}C_{r-1}) \\ &- ({}_{n-5p-1}C_{r-1} + {}_{n-5p-2}C_{r-1} + ... + {}_{n-6p}C_{r-1}) \\ &+ ({}_{n-7p-1}C_{r-1} + {}_{n-7p-2}C_{r-1} + ... + {}_{n-8p}C_{r-1}) \end{aligned} \tag{1.8} $$

(1.8) において、括弧内での 1 番目ばかりを取り出して 1 つの括弧にまとめ、次に括弧内の 2 番目ばかりを取り出して 1 つの括弧にまとめ、このことを p 回繰り返すと、次のようになる．

$$ \begin{aligned} (1.8) = &({}_{n-p-1}C_{r-1} - {}_{n-3p-1}C_{r-1} - {}_{n-5p-1}C_{r-1} + {}_{n-7p-1}C_{r-1}) \\ &+ ({}_{n-p-2}C_{r-1} - {}_{n-3p-2}C_{r-1} - {}_{n-5p-2}C_{r-1} + {}_{n-7p-2}C_{r-1}) \\ &+ ({}_{n-p-3}C_{r-1} - {}_{n-3p-3}C_{r-1} - {}_{n-5p-3}C_{r-1} + {}_{n-7p-3}C_{r-1}) \\ &\vdots \\ &+ ({}_{n-2p}C_{r-1} - {}_{n-4p}C_{r-1} - {}_{n-6p}C_{r-1} + {}_{n-8p}C_{r-1}) \end{aligned} \tag{1.9} $$

(1.7) に補題 1 を使うと (1.9) が得られるが、式の変化をよく見ると次のことがわかる．(1.7) においては、C の左の数字が p ずつ減っていて、右の数字が r であるが、(1.9) においては、C の左の数字が $2p$ ずつ減っていて、右の数字が $r-1$ である．このような計算を見ると、次のことがわかる．公式 (1.6) を変数 r についての帰納法で証明するときに、$r=1$ ならば、この公式がどんな自然数 p に対しても成り立つことは、例 1 からわかる．次に、h を自然数とするとき、$r=h$ ならば、この公式がどんな自然数 p に対しても成り立つと仮定する．上の計算を見るとわかるように、次に $r=h+1$ のときを、補題 1 を使って計算すると、$r=h$ で、しかし C の左の数字が $2p$ ずつ減っているものに帰着する．しかし、帰納法の仮定はどのような自然数 p に関しても成り立つということなので、自然数 $2p$ に関しても成り立つ．以上のことが証明のポイントである．

定理 1. $n \geq 2^{r+1}p + r$ となるような $p, r, n \in N$ において

$$ {}_{n-p}C_r - {}_{n-2p}C_r - {}_{n-3p}C_r + {}_{n-4p}C_r - {}_{n-5p}C_r + {}_{n-6p}C_r + {}_{n-7p}C_r - {}_{n-8p}C_r, ..., {}_{n-2^{r+1}p}C_r = 0. \tag{1.10} $$

なお、ここで使われている加減の計算は定義 1 の + と − の計算の第 r 列とする．

Proof. この定理を証明するために、 以下の帰納的ルール (i) 、 (ii) に基づく列 $\{a(t,r) = 1, -1 : r \in N, t = 1, 2, ..., 2^{r+1}\}$ を定義する．これは、$+, -, -, +$ とか $+, -, -, +, -, +, +, -$ などを数学的に定義するためである．

(i) $a(2k-1, r+1) = 1$ かつ $a(2k, r+1) = -1$ となるのは $a(k,r) = 1$ であるとき．

(ii) $a(2k-1, r+1) = -1$ かつ $a(2k, r+1) = 1$ となるのは $a(k,r) = -1$ であるとき．

まず、$\{a(1,1), a(2,1), a(3,1), a(4,1)\} = \{1, -1, -1, 1\}$ とおくと、帰納的ルールにより、
$\{a(1,2), a(2,2), a(3,2), a(4,2), a(5,2), a(6,2), a(7,2), a(8,2)\} = \{1, -1, -1, 1, -1, 1, 1, -1\}$.
同様に、$\{a(1,3), a(2,3), a(3,3), a(4,3), a(5,3), a(6,3), a(7,3), a(8,3), a(9,3), a(10,3), a(11,3), a(12,3)$
$, a(13,3), a(14,3), a(15,3), a(16,3)\} = \{1, -1, -1, 1, -1, 1, 1, -1, -1, 1, 1, -1, 1, -1, -1, 1\}$. いかなる $r \in N$, についても $\{a(1, r+1), a(2, r+1), a(3, r+1), ..., a(2^{r+2}, r+1)\}$ は 帰納的ルールにより、$\{a(1,r), a(2,r), a(3,r), ..., a(2^{r+1}, r)\}$

から作られる．これは定義 1 の置き換えのルールと同様に $+$ と $-$ が決定する構造になる．よって (1.10) は以下の (1.11) と同様になる．

$$\sum_{k=1}^{2^{r+1}}(a(k,r)_{n-kp}C_r)=0 \tag{1.11}$$

(1.11) を r についての数学的帰納法を用いて証明する．$r=1$ のとき、(1.11) の右辺は $(n-p)-(n-2p)-(n-3p)+(n-4p)=0.$ と等しい．(1.11) は $r=h$ でいかなる $p\in N.$ においても成り立つと仮定する．$a(t,r)$ について 補題 1 と帰納的ルール (i) と (ii) により

$$\begin{aligned}&a(2k-1,h+1)_{n-(2k-1)p}C_{h+1}+a(2k,h+1)_{n-2kp}C_{h+1}\\&=a(k,h)({}_{n-(2k-1)p-1}C_h+{}_{n-(2k-1)p-2}C_h+\ldots+{}_{n-(2k-1)p-p}C_h).\end{aligned} \tag{1.12}$$

したがって、

$$\sum_{k=1}^{2^{h+2}}(a(k,h+1)_{n-kp}C_{h+1})=\sum_{t=1}^{p}\sum_{k=1}^{2^{h+1}}(a(k,h)_{n-(2k-1)p-t}C_h). \tag{1.13}$$

$n+p-t,\ 2p$ と $r=h$ に関する数学的帰納法の仮定により、

$$\sum_{k=1}^{2^{h+1}}(a(k,h)_{n-(2k-1)p-t}C_h)=\sum_{k=1}^{2^{h+1}}(a(k,h)_{(n+p-t)-k(2p)}C_h)=0.$$

よって $(1.13)=0.$ したがって帰納法により、

$$\sum_{k=1}^{2^{r+1}}(a(k,r)_{n-kp}C_r)=0 \tag{1.14}$$

が $n\geq 2^{r+1}p+r$ となるような $p,r,n\in N$ に関して、成り立つ．列 $a(k,r)$ の定義により (1.14) は (1.10) と同様であるから、(1.10) が証明された． □

二項係数の等式は他にもあるので紹介する．ただし、証明は要点だけにする．

定義 2. 以下のような置き換えのルール (1.15). を用いる．

$$\{+,+\}\cdots>\{+,+,-,-\}\text{ かつ }\{-,-\}\cdots>\{-,-,+,+\}. \tag{1.15}$$

置き換えのルール (1.15) により、次のような $+$ と $-$ の列ができる．

$$\begin{aligned}&(i)+,+,-,-,-,-,+,+\\&(ii)+,+,-,-,-,-,+,+,-,-,+,+,+,+,-,-\\&\qquad\vdots\end{aligned} \tag{1.16}$$

定理 2. $n\geq 2^{r+2}p+r$ となるような $p,r,n\in N$ において

$${}_{n-p}C_r+{}_{n-2p}C_r-{}_{n-3p}C_r-{}_{n-4p}C_r-{}_{n-5p}C_r-{}_{n-6p}C_r+{}_{n-7p}C_r+{}_{n-8p}C_r,\ldots,{}_{n-2^{r+2}p}C_r=0 \tag{1.17}$$

なお、ここで使われている加減の計算は定義 2 の $+$ と $-$ の計算の第 r 列とする．

Proof.

$$\begin{aligned}&{}_{n-p}C_r+{}_{n-2p}C_r-{}_{n-3p}C_r-{}_{n-4p}C_r-{}_{n-5p}C_r-{}_{n-6p}C_r+{}_{n-7p}C_r+{}_{n-8p}C_r,\ldots,{}_{n-2^{r+2}p}C_r\\&=({}_{n-p}C_r+{}_{n-2p}C_r)-({}_{n-3p}C_r+{}_{n-4p}C_r)-({}_{n-5p}C_r+{}_{n-6p}C_r)+({}_{n-7p}C_r+{}_{n-8p}C_r),\ldots,{}_{n-2^{r+2}p}C_r\\&=({}_{n-p}C_r-{}_{n-3p}C_r-{}_{n-5p}C_r+{}_{n-7p}C_r\ldots,{}_{n-(2^{r+2}-1)p}C_r) &(1.18)\\&+({}_{n-2p}C_r-{}_{n-4p}C_r-{}_{n-6p}C_r+{}_{n-8p}C_r\ldots,{}_{n-2^{r+2}p}C_r)=0. &(1.19)\end{aligned}$$

(1.18) と (1.19) に定理 1 を用いることで最後の方程式が証明される． □

二項係数の等式は他にもあるので紹介する．ただし、証明は要点だけにする．

定義 3. 以下のような置き換えのルール (1.20) を用いる．

$$\{+,-,+,-\}\cdots>\{+,-,+,-,-,+,-,+\} \text{ and } \{-,+,-,+\}\cdots>\{-,+,-,+,+,-,+,-\} \tag{1.20}$$

置き換えのルール (1.20) により、以下のような $+$ と $-$ の列ができる．

$$\begin{aligned}&(i)+,-,+,-,-,+,-,+\\&(ii)+,-,+,-,-,+,-,+,-,+,-,+,+,-,+,-\\&(iii)+,-,+,-,-,+,-,+,-,+,-,+,+,-,+,-,-,+,-,+,+,-,+,-,+,-,+,-,-,+,-,+\\&\qquad\vdots\end{aligned} \tag{1.21}$$

定理 3.

$$ {}_{n-p}C_r - {}_{n-2p}C_r + {}_{n-3p}C_r - {}_{n-4p}C_r - {}_{n-5p}C_r + {}_{n-6p}C_r - {}_{n-7p}C_r + {}_{n-8p}C_r, \dots, {}_{n-2^{r+2}p}C_r = 0. \tag{1.22}$$

なお、ここで使われている加減の計算は定義 3 の $+$ と $-$ の計算の第 $r-1$ 列とする．

Proof.

$$\begin{aligned}(1.22) &= ({}_{n-p}C_r + {}_{n-3p}C_r - {}_{n-5p}C_r - {}_{n-7p}C_r - {}_{n-9p}C_r - {}_{n-11p}C_r + {}_{n-13p}C_r + {}_{n-15p}C_r \dots) && (1.23)\\ &- ({}_{n-2p}C_r + {}_{n-4p}C_r - {}_{n-6p}C_r - {}_{n-8p}C_r - {}_{n-10p}C_r - {}_{n-12p}C_r + {}_{n-14p}C_r + {}_{n-16p}C_r \dots) && (1.24)\\ &= 0.\end{aligned}$$

(1.23) と (1.24) それぞれに定理 2 を用いることで最後の方程式が証明される． □

二項係数の等式は他にもあるので紹介する．ただし、証明は要点だけにする．

定義 4. 以下のような置き換えのルール (1.25) を用いる．

$$\begin{aligned}&\{+,-,-,+,+,-,-,+\}\cdots>\{+,-,-,+,+,-,-,+,-,+,+,-,-,+,+,-\}\\&\text{かつ } \{-,+,+,-,-,+,+,-\}\cdots>\{-,+,+,-,-,+,+,-,+,-,-,+,+,-,-,+\}.\end{aligned} \tag{1.25}$$

置き換えのルール (1.25) により、 以下のような $+$ と $-$ の列ができる．

$$\begin{aligned}&(i)+,-,-,+,+,-,-,+\\&(ii)+,-,-,+,+,-,-,+,-,+,+,-,-,+,+,-\\&(iii)+,-,-,+,+,-,-,+,-,+,+,-,-,+,+,-,-,+,+,-,-,+,+,-,+,-,-,+,+,-,-,+\\&\qquad\vdots\end{aligned} \tag{1.26}$$

定理 4. $n \geq 2^{r+2}p + r$ となるような $p, r, n \in N$ において

$$ {}_{n-p}C_r - {}_{n-2p}C_r - {}_{n-3p}C_r + {}_{n-4p}C_r + {}_{n-5p}C_r - {}_{n-6p}C_r - {}_{n-7p}C_r + {}_{n-8p}C_r, \dots, {}_{n-2^{r+2}p}C_r = 0. \tag{1.27}$$

なお、ここで使われている加減の計算は定義 4 の $+$ と $-$ の計算の第 $r-1$ 列とする．

Proof.

$$\begin{aligned}(1.27) &= ({}_{n-p}C_r - {}_{n-3p}C_r + {}_{n-5p}C_r - {}_{n-7p}C_r - {}_{n-9p}C_r + {}_{n-11p}C_r - {}_{n-13p}C_r + {}_{n-15p}C_r \dots) && (1.28)\\ &- ({}_{n-2p}C_r - {}_{n-4p}C_r + {}_{n-6p}C_r - {}_{n-8p}C_r - {}_{n-10p}C_r + {}_{n-12p}C_r - {}_{n-14p}C_r + {}_{n-16p}C_r \dots) && (1.29)\\ &= 0.\end{aligned}$$

(1.28) と (1.29) それぞれに定理 3 を用いることで最後の方程式が証明される． □

例 4. 以下は、やや例外的な二項係数の等式である．これらの公式は、和が 0 になるが、一定のパターンは持っていないように思える．二項係数を含む公式については、まだまだ未知の部分が多く、これからの研究が必要である．

$$\begin{aligned}&{}_{n-1}C_2 - {}_{n-2}C_2 - {}_{n-3}C_2 - {}_{n-4}C_2 + {}_{n-5}C_2 + {}_{n-6}C_2 + {}_{n-7}C_2 + {}_{n-8}C_2 - {}_{n-9}C_2\\&- {}_{n-10}C_2 + {}_{n-11}C_2 - {}_{n-12}C_2 - {}_{n-13}C_2 + {}_{n-14}C_2 - {}_{n-15}C_2 + {}_{n-16}C_2 = 0\end{aligned} \tag{1.30}$$

$$\begin{aligned}&{}_{n-1}C_2 - {}_{n-2}C_2 + {}_{n-3}C_2 - {}_{n-4}C_2 - {}_{n-5}C_2 + {}_{n-6}C_2 - {}_{n-7}C_2 - {}_{n-8}C_2 + {}_{n-9}C_2\\&+ {}_{n-10}C_2 + {}_{n-11}C_2 + {}_{n-12}C_2 - {}_{n-13}C_2 - {}_{n-14}C_2 - {}_{n-15}C_2 + {}_{n-16}C_2 = 0\end{aligned} \tag{1.31}$$

2. 確率論への応用

2.1. あるカードゲームの確率論

はじめに、ゲームのルールについて述べる.

定義 5. n, m は $m \leq n$ で自然数の定数とする. 2人のプレイヤーが交互に箱からカードを引く. 箱の中のカードは n 枚で、そのうち m 枚は赤いカードとする. プレイヤーは引くまでカードの色が分からないため、カードはランダムに引かれる. 引かれたカードは戻さないものとする. 先に1枚、赤いカードを引いたプレイヤーが負けとなり、ゲームが終わる.

普通のクジと異なるのは、赤（当り）のカードを引くと、そのプレイヤーが負けて、そこでゲームが終わることである. 実はこの研究はロシアンルーレットの確率の研究がもとになっている. ロシアンルーレットのように、二人のプレイヤーが交互に自分に向かって銃の引き金を引くとすると、わかりやすいルールだが、ロシアンルーレットがあまり高校生の問題として適切でないので、ここではカードゲームで考える.

補題 2. $R(n, m, y)$ を y 回目にゲームが終了する確率とする. すると、$R(n, m, y)$ について次のことが成り立つ.

$$R(n, m, y) = \frac{{}_{n-y}C_{m-1}}{{}_nC_m}. \tag{2.1}$$

Proof. n 枚のカードを $\{a_1, a_2, ..., a_n\}$ とおき、 これらのカードはこの順番で引かれるものとする. したがって、はじめに引かれるカードは a_1、最後に引かれるカードは a_n となる. y 回目にゲームが終わるのは赤いカードが y 番目にくるときで、 この赤いカードを含む残りのすべての $m-1$ 枚の赤のカードは $y+1$ 番目, ...,n 番目の位置にくる. このとき、${}_{n-y}C_{m-1}$ 通りの赤いカードの配置の方法がある. m 枚の赤いカードを n の位置に置く方法の総数が ${}_nC_m$ 通りあるので、ゲームが y 回目に終わる確率は $\frac{{}_{n-y}C_{m-1}}{{}_nC_m}$ となる. この証明も、ロシアンルーレットで m 発の弾丸が回転式銃の n 個のシリンダーに入っている様子を考えるとわかりやすい. しかし、箱からカードを引く場合でも、確率としてはカードが一列に並んでいると考えることは計算に適している. □

補題 3.

$$\sum_{y=1}^{n-m+1} R(n, m, y) = \sum_{y=1}^{n-m+1} \frac{{}_{n-y}C_{m-1}}{{}_nC_m} = 1. \tag{2.2}$$

Proof. m 枚の赤いカードがあるとき、 $n-m+1$ 回以内にゲームが終了する. したがって、$1, 2, ..., n-m+1$ 回にそれぞれゲームが終了する確率を足していくと、その和は1となる. □

以下のおいて、Floor 関数 (小数切り捨て関数) を使う. 実数 x について、関数 $\lfloor x \rfloor$ の値は x 以下の最大の整数を与える. 高校ではこのようなときに、ガウス記号を使うことが多いが、現代数学ではガウス記号でなく、Floor 関数を使うのが普通である.

定理 5. $F(2, n, m, 1)$ を このゲームにおいて先手が負ける確率とする. すると次のようになる.

$$F(2, n, m, 1) = \sum_{z=0}^{t} R(n, m, 1+2z) = \frac{\sum_{z=0}^{t} {}_{n-1-2z}C_{m-1}}{{}_nC_m}. \tag{2.3}$$

ここで $t = \lfloor \frac{n-m}{2} \rfloor$.

Proof. 先手は $1, 3, ..., 1+2t$ 回目に引くので、それらの場合について、$R(n, m, y)$ を足すことで、$\sum_{z=0}^{t} R(n, m, 1+2z)$ は先手が負ける確率となる. □

このカードゲームの確率論については、私達のクラブの先輩が既に研究しており、 [1] で掲載され、 [2] においてさらに発展した理論が発表されている. なお、リスト $\{ F(2, n, m, 1),\ m \leq n \text{ and } n = 1,2,3,... \}$ はパスカルの三角形に似た構造を持っていることを先輩達が発見している. 以下の図 (1) を見ていただきたい. すぐにわかるように、分母と分子がそれぞれ独立にパスカルの三角形的な性質を持っている.
図の構造は簡単に言うと、n 段目がカードの枚数が n の場合で、左から赤のカードの数が1のとき、2のとき、3のとき、... の先手が負ける確率という風に並んでいる. 例えば、上から5段目において、左から3つ目に $\frac{7}{10}$ があるが、この数字はカードの枚数が5で、赤のカードの枚数が3のときの先手が負ける確率である.

図 (1)

$$
\begin{array}{c}
\frac{1}{1}\\
\frac{1}{2},\frac{1}{1}\\
\frac{2}{3},\frac{2}{3},\frac{1}{1}\\
\frac{2}{4},\frac{4}{6},\frac{3}{4},\frac{1}{1}\\
\frac{3}{5},\frac{6}{10},\frac{7}{10},\frac{4}{5},\frac{1}{1}\\
\frac{3}{6},\frac{9}{15},\frac{13}{20},\frac{11}{15},\frac{5}{6},\frac{1}{1}\\
\frac{4}{7},\frac{12}{21},\frac{22}{35},\frac{24}{35},\frac{16}{21},\frac{6}{7},\frac{1}{1}\\
\frac{4}{8},\frac{16}{28},\frac{34}{56},\frac{46}{70},\frac{40}{56},\frac{22}{28},\frac{7}{8},\frac{1}{1}\\
\frac{5}{9},\frac{20}{36},\frac{50}{84},\frac{80}{126},\frac{86}{126},\frac{62}{84},\frac{29}{36},\frac{8}{9}\frac{1}{1}\\
\frac{5}{10},\frac{25}{45},\frac{70}{120},\frac{130}{210},\frac{166}{252},\frac{148}{210},\frac{91}{120},\frac{37}{45}\frac{9}{10}\frac{1}{1}
\end{array}
$$

2.2. 先手と後手が負ける確率が同じになるゲーム

図 (1) を見ればわかるように、すべての場合において先手のプレイヤーが負ける確率が $\frac{1}{2}$ を超えるので、後手が負ける確率よりも高い. そこで、私達は、先手のプレイヤーと後手のプレイヤーの負ける率が同じになるような、プレーのやり方を考えた. 簡単に言うと、先手と後手のプレイヤーを A, B とするときに、図 (1) ではそれぞれが、$A, B, A, B, A, B, \ldots$ という順番でカードを引く. それに対して、ここでは $A, B, B, A, B, A, A, B, \ldots$ という順番でカードを引くことで、二人の負ける率を同じにすることを目指す.

例 5. 例 2 では

$$ {}_{n-1}C_2 - {}_{n-2}C_2 - {}_{n-3}C_2 + {}_{n-4}C_2 - {}_{n-5}C_2 + {}_{n-6}C_2 + {}_{n-7}C_2 - {}_{n-8}C_2 = 0 \tag{2.4} $$

が $n \geq 10$ を満たすような、任意の $n \in N$ に対して成り立つ.

(2.4) により、

$$ {}_{n-1}C_2 + {}_{n-4}C_2 + {}_{n-6}C_2 + {}_{n-7}C_2 = {}_{n-2}C_2 + {}_{n-3}C_2 + {}_{n-5}C_2 + {}_{n-8}C_2 \tag{2.5} $$

が $n \geq 10$ を満たすような、任意の $n \in N$ に対して成り立つ.

$n = 10$ の場合に (2.5) を使うと、

$$ {}_9C_2 + {}_6C_2 + {}_4C_2 + {}_3C_2 = {}_8C_2 + {}_7C_2 + {}_5C_2 + {}_2C_2 $$

となり、したがって

$$ \frac{{}_9C_2}{{}_{10}C_3} + \frac{{}_6C_2}{{}_{10}C_3} + \frac{{}_4C_2}{{}_{10}C_3} + \frac{{}_3C_2}{{}_{10}C_3} = \frac{{}_8C_2}{{}_{10}C_3} + \frac{{}_7C_2}{{}_{10}C_3} + \frac{{}_5C_2}{{}_{10}C_3} + \frac{{}_2C_2}{{}_{10}C_3} \tag{2.6} $$

が $n \geq 10$ を満たすような、任意の $n \in N$ に対して成り立つ. (2.6) を変形すると、

$$ R(10,3,1) + R(10,3,4) + R(10,3,6) + R(10,3,7) = R(10,3,2) + R(10,3,3) + R(10,3,5) + R(10,3,8) \tag{2.7} $$

となる.

10 枚のカードがあり、その中に 3 枚のカードがあるとすると、ゲームは遅くとも、8 回目で終了する. 先手が $1, 4, 6, 7$ 回目でカードを引き、後手が $2, 3, 5, 8$ 目でカードを引くとすると、(2.7) により、それぞれが負ける確率は等しい.

以上のことをもっと一般的に考える.

定理 1 から、次のようになる.

$$
\begin{aligned}
&{}_{n-1}C_r - {}_{n-2}C_r - {}_{n-3}C_r + {}_{n-4}C_r - {}_{n-5}C_r + {}_{n-6}C_r + {}_{n-7}C_r - {}_{n-8p}C_r, \ldots, {}_{n-2^{r+1}}C_r \\
&= \sum_{k=1}^{2^{r+1}} (a(k,r)_{n-k}C_r) = 0.
\end{aligned} \tag{2.8}
$$

ここで $K_+ = \{k : a(k,r) = 1\}$ かつ $K_- = \{k : a(k,r) = -1\}$ と決めると、(2.8) により次の式が成り立つ.

$$\sum_{k \in K_+}^{2^{r+1}} (a(k,r)_{n-k}C_r) = {}_{n-1}C_r + {}_{n-4}C_r + {}_{n-6}C_r + {}_{n-7}C_r, ...,$$

$$= {}_{n-2}C_r + {}_{n-3}C_r + {}_{n-5}C_r + {}_{n-8p}C_r, ... = \sum_{k \in K_-}^{2^{r+1}} (-a(k,r)_{n-k}C_r). \tag{2.9}$$

定理 6. m 枚の赤いカードを含む n 枚のカードでゲームを行う. ただし、赤のカードを最初に引いたプレイヤーが負けるということは同じで、 $n = 2^m + m - 1$ とする. 先手と後手がカードを引く順番は次のようにする. 先手が k 回目に引くのは、 $k \in K_+ = \{k : a(k, m-1) = 1\}$ のときで、後手が k 回目 に引くのは、$k \in K_- = \{k : a(k, m-1) = -1\}$ のときとすると、2 人のプレイヤーが負ける可能性は等しくなる.

Proof. 補題 3 と (2.9) により、

$$\sum_{k \in K_+} R(n,m,k) = \sum_{k \in K_-} R(n,m,k) = 1/2. \tag{2.10}$$

□

定理 6 においては、カードの枚数が $n = 2^m + m - 1$ という特殊な状況だが、枚数に制限をつけずに、引く順番を、二人のプレイヤー A, B が、A を先手として、$A, B, B, A, B, A, A, B, ...$ という順番でカードを引く場合を考えると、図 (2) ができる. 図 (1) と比べると、確かに 1/2 に近い場合が多い.

ただし、この図についてはまだ十分に研究していない. また、この図でもパスカルの三角形的な性質が成り立っているが、そのこともまだ研究していない.

図 (2)

$$\frac{1}{1}$$
$$,\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{1}{1}$$
$$\frac{2}{4},\frac{3}{6},\frac{3}{4},\frac{1}{1}$$
$$,\frac{2}{5},\frac{5}{10},\frac{6}{10},\frac{4}{5},\frac{1}{1}$$
$$\frac{3}{6},\frac{7}{15},\frac{11}{20},\frac{10}{15},\frac{5}{6},\frac{1}{1}$$
$$\frac{4}{7},\frac{10}{21},\frac{18}{35},\frac{21}{35},\frac{15}{21},\frac{6}{7},\frac{1}{1}$$
$$\frac{4}{8},\frac{14}{28},\frac{28}{56},\frac{39}{70},\frac{36}{56},\frac{21}{28},\frac{7}{8},\frac{1}{1}$$
$$\frac{4}{9},\frac{18}{36},\frac{42}{84},\frac{67}{126},\frac{75}{126},\frac{57}{84},\frac{28}{36},\frac{8}{9},\frac{1}{1}$$
$$\frac{5}{10},\frac{22}{45},\frac{60}{120},\frac{109}{210},\frac{142}{252},\frac{132}{210},\frac{85}{120},\frac{36}{45},\frac{9}{10},\frac{1}{1}$$

2.3. 赤のカードが 3 枚の場合に起こる特別な状態について.

赤のカードが 3 枚の場合に限定すると、いくつか面白い事実を発見することができた. これらの事実を、もっと多い数の赤のカードの場合に拡張することは可能だと思われる.

補題 4.

$$(i)\ {}_7C_2 - {}_6C_2 - {}_5C_2 + {}_4C_2 - {}_3C_2 + {}_2C_2 = 0. \tag{2.11}$$

$$(ii)\ {}_8C_2 - {}_7C_2 - {}_6C_2 + {}_5C_2 - {}_4C_2 + {}_3C_2 + {}_2C_2 = 0. \tag{2.12}$$

この補題の結果は計算によって確かめることができる.

定理 7. カードの枚数が $8h + 8$ または $8h + 9$ で、赤のカードが 3 枚あるとする. ただし、 $h \in N$. カードを 1 回目から $8h$ 回目までは、A, B が A, B, B, A, B, A, A, B という順を繰り返しながらカードを引き、残りの $8h+1, 8h+2, 8h+3, 8h+4, 8h+5, 8h+6$ 番目、または $8h+1, 8h+2, 8h+3, 8h+4, 8h+5, 8h+6, 8h+7$ 番目では、 A, B, B, A, B, A または、 A, B, B, A, B, A, A というルールでカードを引くと、二人の負ける率は同じになる. 最初の $8h$ 回目までをもう少し正確に言うと、$k = 0, 1, ..., h-1$ に対して、二人のプレイヤー A,B が $8k+1, 8k+2, ..., 8k+8$ 番目には A, B, B, A, B, A, A, B という順でカードを引く.

Proof. 補題　4 から、

$${}_7C_2 + {}_4C_2 + {}_2C_2 = {}_6C_2 + {}_5C_2 + {}_3C_2.$$
$${}_8C_2 + {}_5C_2 + {}_3C_2 + {}_2C_2 = {}_7C_2 + {}_6C_2 + {}_4C_2.$$

となる．すると、補題 2 により、

$$R(8h+8,3,8h+1)+R(8h+8,3,8h+4)+R(8h+8,3,8h+6)=$$
$$R(8h+8,3,8h+2)+R(8h+8,3,8h+3)+R(8h+8,3,8h+5).$$
$$R(8h+9,3,8h+1)+R(8h+9,3,8h+4)+R(8h+9,3,8h+6)+R(8h+9,3,8h+7)$$
$$=R(8h+9,3,8h+2)+R(8h+9,3,8h+3)+R(8h+9,3,8h+5)$$

となる． したがって、$8h+1$ 回目以後は A,B が負ける率は同じになる．
カードを 1 回目から $8h$ 回目までの A,B が負ける率は (2.5) から

$$_{n-1}C_2+{}_{n-4}C_2+{}_{n-6}C_2+{}_{n-7}C_2={}_{n-2}C_2+{}_{n-3}C_2+{}_{n-5}C_2+{}_{n-8}C_2 \qquad (2.13)$$

となり、上の式に $n=8h-8k+7$ と $n=8h-8k+8$ を当てはめると、

$$R(8h+8,3,8k+1)+R(8h+8,3,8k+4)+R(8h+8,3,8k+6)+R(8h+8,3,8k+7)$$
$$=R(8h+8,3,8k+2)+R(8h+8,3,8k+3)+R(8h+8,3,8k+5)+R(8h+8,3,8k+8).$$
$$R(8h+9,3,8k+1)+R(8h+9,3,8k+4)+R(8h+9,3,8k+6)+R(8h+9,3,8k+7)$$
$$=R(8h+9,3,8k+2)+R(8h+9,3,8k+3)+R(8h+9,3,8k+5)+R(8h+9,3,8k+8)$$

となるので、A,B が負ける率は同じである．したがって、定理の証明が終わる． □

補題 5.

$$(i)_{11}C_2-{}_{10}C_2-{}_9C_2+{}_8C_2+{}_7C_2-{}_6C_2-{}_5C_2+{}_4C_2-{}_3C_2-{}_2C_2=0.$$
$$(ii)\ {}_{12}C_2-{}_{11}C_2-{}_{10}C_2+{}_9C_2+{}_8C_2-{}_7C_2-{}_6C_2+{}_5C_2-{}_4C_2+{}_3C_2-{}_2C_2=0.$$

この補題の結果は計算によって確かめることができる．

定理 8. カードの枚数が $8h+12$ または $8h+13$ で、赤のカードが 3 枚あるとする．ただし、 $h\in N$．さて、$k=0,1,...,h$ に対して、二人のプレイヤー A,B が $8k+1,8k+2,...,8k+8$ 番目には A,B,B,A,B,A,A,B という順でカードを引き、 残りの $8h+1,8h+2,8h+3,8h+4,8h+5,8h+6,8h+7,8h+8,8h+9,8h+10$ 番目、または $8h+1,8h+2,8h+3,8h+4,8h+5,8h+6,8h+7,8h+8,8h+9,8h+10,8h+11$ 番目では、A,B,B,A,A,B,B,A,B,B または、 A,B,B,A,A,B,B,A,B,A,B というルールでカードを引くと、二人の負ける率は同じになる．

Proof. 補題 5 を用いて、定理 7 の方法とほぼ同じ方法で証明できる． □

定理 9. $4h+11$ 枚のカードがあり、赤のカードは 3 枚あるとする．ここで $h\in N$ とする．このとき、二人のプレイヤー A,B が負ける率を同じにすることはできない．

Proof. 二人の負ける確率を同じにするには、

$$\{R(4h+11,3,1),...R(4h+11,3,4h+9)\}$$

を 2 つのグループに分けて、和が同じになるようにすれば良いが、そのためには補題 2 によって

$$\{{}_{4h+10}C_2,{}_{4h+9}C_2,{}_{4h+8}C_2,...,{}_2C_2\}$$

を 2 つのグループに分けて、和が同じになるようにすれば良い．しかし、

$$\{{}_{4h+10}C_2,{}_{4h+9}C_2,{}_{4h+8}C_2,...,{}_2C_2\}$$
$$\{(4h+10)(4h+9)/2,(4h+9)(4h+8)/2,(4h+8)(4h+7)/2,...,2*1/2\}$$

であって、この $4h+9$ 個の数字の中には、偶数が $2h+4$ 個あり、残りの $2h+5$ 個は奇数である．したがって、和が等しいような 2 つのグループに分けることはできない． □

二項係数の等式や不等式に関してはまだまだ未知のことが多く、それらを調べることで、このカードゲームの確率論の研究も発展していくと思われる．まだまだ多くの課題がある．

References

[1] Matsui, H., Minematsu, D., Yamauchi T., Miyadera, R.: Pascal-like triangles and Fibonacci-like sequences, Mathematical Gazette, pp. 27–41, 2010.

[2] Miyadera,R., Kitagawa,M., Suzuki,S., Tokuni,Y., Nakaya, Y. and Fukui,M.: Pascal-Like Triangles and Fibonacci-Like Sequences, Japan Conference on Discrete and Computational Geometry, Graphs, and Games, 2017.