2次曲線上の3点を頂点とする三角形の垂心について

愛知県立一宮高等学校　3年　鷲津　裕之

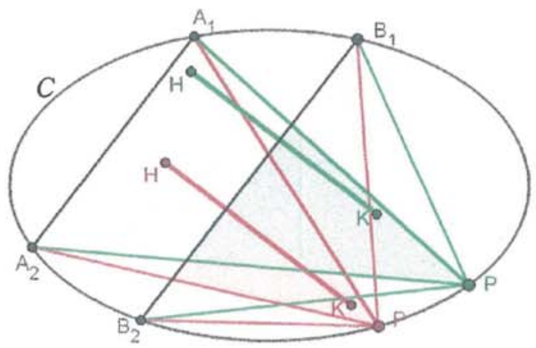
1　はじめに

GeoGebraを用いて三角形の垂心の性質を調べていて，次の定理が成り立つことを発見した。

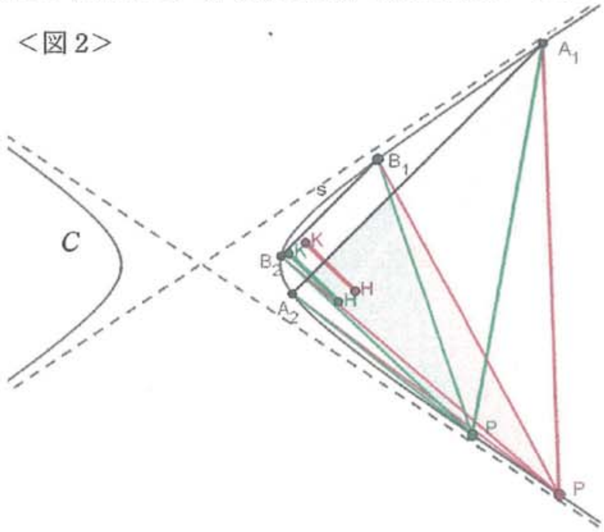
2　定　理

【定理1】　1つの2次曲線 C に対して，固定された2本の平行な弦 A_1A_2，B_1B_2 がある。C 上の動点 P に対して $\triangle A_1A_2P$ と $\triangle B_1B_2P$ の垂心をそれぞれ H，K とすると，線分 HK の長さは P の位置にかかわらず一定である（<図1><図2>の赤と緑の P に対して，赤と緑の線分 HK の長さが等しい）。

<図1>

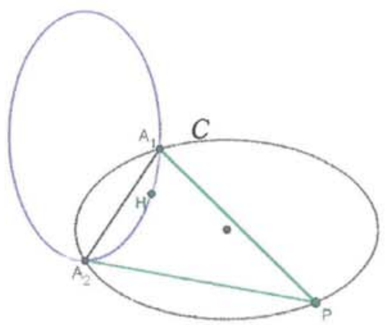


<図2>

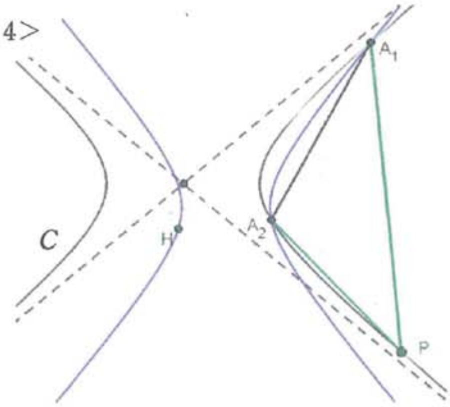


【定理2】　2次曲線 C の弦 A_1A_2 と C 上の動点 P に対して，$\triangle A_1A_2P$ の垂心 H の軌跡は，C と相似な2次曲線である。ただし，C が放物線で，弦 A_1A_2 が C の軸と垂直な場合は，H の軌跡は直線である。（<図3>～<図6>の紫が H の軌跡。なお，2点 A_1，A_2 は軌跡から除外される）

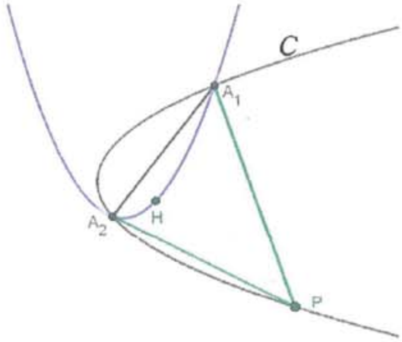
<図3>



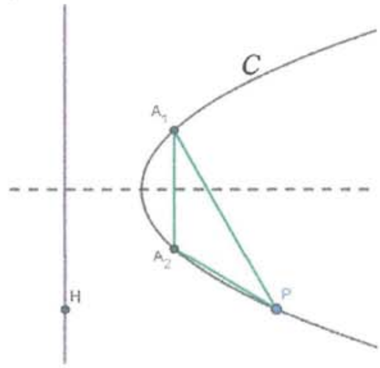
<図4>



<図5>



<図6>



3 【定理 1】の証明

xy 平面上の点 $(1, 0)$ を焦点，y 軸を準線とする離心率 $e\ (>0)$ の２次曲線 C の方程式は，

$e^2x^2=(x-1)^2+y^2$ から，$(1-e^2)x^2-2x+y^2+1=0$ … ①

直線 A1A2 の方程式が，次の(i)～(iii)の場合に分けて示す（a, m は定数)。

(i) $y=mx+a\ (m\neq 0)$ のとき　(ii) $y=a$ のとき　(iii) $x=a$ のとき

(i) $y=mx+a\ (m\neq 0)$ のとき

①と $y=mx+a$ から y を消去した x の２次方程式

$(m^2+1-e^2)x^2+2(am-1)x+a^2+1=0$ （$m^2+1-e^2\neq 0$）を解くと，

$d=(e^2-1)a^2-2ma+e^2-m^2>0$ として，$x=\dfrac{-am+1\pm\sqrt{d}}{m^2+1-e^2}$

これより

$$\mathrm{A1}\left(\frac{-am+1+\sqrt{d}}{m^2+1-e^2},\ \frac{a(1-e^2)+m(1+\sqrt{d})}{m^2+1-e^2}\right),\ \mathrm{A2}\left(\frac{-am+1-\sqrt{d}}{m^2+1-e^2},\ \frac{a(1-e^2)+m(1-\sqrt{d})}{m^2+1-e^2}\right)$$ とできる。

C 上の点 P を，P(s, t) とすると，

$(1-e^2)s^2-2s+t^2+1=0$ … ②

P を通り直線 A1A2 に垂直な直線の方程式は

$y=-\dfrac{1}{m}(x-s)+t$ … ③

直線 A2P に垂直な直線の傾きは，
$$-\frac{s-\dfrac{-am+1-\sqrt{d}}{m^2+1-e^2}}{t-\dfrac{a(1-e^2)+m(1-\sqrt{d})}{m^2+1-e^2}}=-\frac{s(m^2+1-e^2)+am-1+\sqrt{d}}{t(m^2+1-e^2)-a(1-e^2)-m(1-\sqrt{d})}$$ だから，

A1 を通り直線 A2P に垂直な直線の方程式は

$$y=-\frac{s(m^2+1-e^2)+am-1+\sqrt{d}}{t(m^2+1-e^2)-a(1-e^2)-m(1-\sqrt{d})}\left(x-\frac{-ma+1+\sqrt{d}}{m^2+1-e^2}\right)+\frac{a(1-e^2)+m(1+\sqrt{d})}{m^2+1-e^2}\quad\cdots ④$$

③，④から△A1A2P の垂心 H の x 座標は，$d=(e^2-1)a^2-2ma+e^2-m^2$ に注意すると

$$x_H=\frac{f}{(m^2+1-e^2)(ms+a-t)}\quad\cdots ⑤$$

ただし，

$$f=-(t^2+1)m^3-\{(s+2)a+(s-2)t\}m^2+\{(e^2-2)a^2+2(1-e^2)at+e^2t^2+2s-t^2-1\}m+(1-e^2)as-(1-e^2)st$$

この⑤を a の式として変形する。

$f\div(a+ms-t)$ の商と余りを計算した結果から

$$\frac{f}{a+ms-t}=(e^2-2)ma-\{e^2(m^2s+mt+s)+m^2(2-s)-s\}+\frac{m(m^2+1)(e^2s^2-s^2+2s-t^2-1)}{ms+a-t}$$

②，⑤より

$$x_H=\frac{(e^2-2)m}{m^2+1-e^2}a-\frac{e^2(m^2s+mt+s)+m^2(2-s)-s}{m^2+1-e^2}\quad\cdots ⑥$$

また，直線 B1B2 の方程式を $y=mx+b$ とおくと，△B1B2P の垂心 K の x 座標は⑥から

$$x_K=\frac{(e^2-2)m}{m^2+1-e^2}b-\frac{e^2(m^2s+mt+s)+m^2(2-s)-s}{m^2+1-e^2}\quad\cdots ⑦$$

⑥と⑦の差は

$$|x_H-x_K|=\left|\frac{(e^2-2)m}{m^2+1-e^2}a-\frac{(e^2-2)bm}{m^2+1-e^2}b\right|=\left|\frac{(e^2-2)m}{m^2+1-e^2}(a-b)\right|$$

直線HKが傾き$-\dfrac{1}{m}$の直線であることを考慮すれば

$$\mathrm{HK}=\left|\frac{(e^2-2)m(a-b)}{m^2+1-e^2}\right|\frac{\sqrt{m^2+1}}{|m|}=\left|\frac{(e^2-2)(a-b)\sqrt{m^2+1}}{m^2+1-e^2}\right|$$

これは，Pの位置に関係しない一定の値である。

(ii) $y=a$のとき（$e\neq 1$）

①と$y=a$ から，$\mathrm{A_1}\left(\dfrac{1+\sqrt{e^2(a^2+1)-a^2}}{1-e^2},\ a\right)$，$\mathrm{A_2}\left(\dfrac{1-\sqrt{e^2(a^2+1)-a^2}}{1-e^2},\ a\right)$ とできる。

$\mathrm{P}(s,\ t)$ に対して，$\mathrm{A_1}$を通り直線$\mathrm{A_2P}$に垂直な直線の方程式は

$$y-a=-\frac{\dfrac{1-\sqrt{e^2(a^2+1)-a^2}}{1-e^2}-s}{a-t}\left(x-\frac{1+\sqrt{e^2(a^2+1)-a^2}}{1-e^2}\right)$$

Pを通り直線$\mathrm{A_1A_2}$に垂直な直線の方程式は$x=s$ だから，

$$x_H=s\ ,\quad y_H=\frac{(e^2-2)a^2-(e^2-1)at+e^2s^2-s^2+2s-1}{(a-t)(e^2-1)}$$

②から $y_H=\dfrac{(e^2-2)a^2-(e^2-1)at+t^2}{(a-t)(e^2-1)}=\dfrac{(e^2-2)a-t}{e^2-1}$ より $\mathrm{H}\left(s,\ \dfrac{(e^2-2)a-t}{e^2-1}\right)$

直線$\mathrm{B_1B_2}$の方程式を$y=b$ とすると，$\mathrm{K}\left(s,\ \dfrac{(e^2-2)b-t}{e^2-1}\right)$

$$|\mathrm{HK}|=\left|\frac{(e^2-2)a-t}{e^2-1}-\frac{(e^2-2)b-t}{e^2-1}\right|=\left|\frac{(e^2-2)(a-b)}{e^2-1}\right|$$

これは，Pの位置に関係しない一定の値である。

(iii) $x=a$のとき

①から，$y=\pm\sqrt{(e^2-1)a^2+2a-1}$

よって$\mathrm{A_1}(a,\ \sqrt{(e^2-1)a^2+2a-1})$，$\mathrm{A_2}(a,\ -\sqrt{(e^2-1)a^2+2a-1})$とできる。

$\mathrm{P}(s,\ t)$に対して，$\mathrm{A_1}$を通り直線$\mathrm{A_2P}$に垂直な直線の方程式は

$$y-\sqrt{(e^2-1)a^2+2a-1}=-\frac{s-a}{t+\sqrt{(e^2-1)a^2+2a-1}}(x-a)$$

Pを通り直線$\mathrm{A_1A_2}$に垂直な直線の方程式は$y=t$ だから，

$$x_H=\frac{(e^2-2)a^2+(s+2)a-t^2-1}{s-a}$$

②より $x_H=\dfrac{(e^2-2)a^2+(s+2)a+\{(1-e^2)s^2-2s\}}{s-a}=\dfrac{(s-a)\{(2-e^2)a+(1-e^2)s-2\}}{s-a}=(2-e^2)a+(1-e^2)s-2$

だから $\mathrm{H}((2-e^2)a+(1-e^2)s-2,\ t)$

直線$\mathrm{B_1B_2}$の方程式を$x=b$ とすると，$\mathrm{K}((2-e^2)b+(1-e^2)s-2,\ t)$

$$|\mathrm{HK}|=\left|(2-e^2)a+(1-e^2)s-2-\{(2-e^2)b+(1-e^2)s-2\}\right|=\left|(2-e^2)(a-b)\right|$$

これは，Pの位置に関係しない一定の値である。

以上で，【定理1】が証明された。

4 【定理 2】の証明

【定理 1】の (i), (ii), (iii) の場合について，それぞれ証明する。設定は 3 の証明のまま。

(i) $y=mx+a\ (m\neq 0)$ のとき

H の x 座標 X は，⑥から

$$X=\frac{(e^2-2)ma-\{e^2(m^2s+mt+s)+m^2(2-s)-s\}}{m^2+1-e^2}=\frac{-(e^2-1)(m^2+1)s-e^2mt+(e^2-2)am-2m^2}{m^2+1-e^2}\quad\cdots\ ⑧$$

H が③上にあるから，代入して y 座標 Y を計算すると

$$Y=\frac{e^2ms+(m^2+1)t-(e^2-2)a+2m}{m^2+1-e^2}\quad\cdots\ ⑨$$

⑧，⑨を $s,\ t$ について解くと，

$$s=-\frac{(m^2+1)X+e^2mY-m\{a(e^2-2)-2m\}}{e^2m^2-m^2-1},\quad t=\frac{e^2mX+(e^2-1)(m^2+1)Y-a(e^2-2)+2m}{e^2m^2-m^2-1}$$

これを②へ代入すれば，H の軌跡の方程式が得られる。

代入して整理した式を結果だけを記すと

$$(m^2+1-e^2)X^2-2\{(e^2-2)ma-m^2+1\}X+(m^2+1-e^2)(1-e^2)Y^2-2(e^2-2)\{(e^2-1)a-m\}Y$$
$$+(e^2-2)^2a^2-2(e^2-2)ma-e^2m^2+m^2+1=0\quad\cdots\ ⑩$$

⑩を平方完成すると，$e\neq 1$ のとき

$$\left\{X+\frac{(e^2-2)ma-m^2+1}{e^2-m^2-1}\right\}^2+(1-e^2)\left\{Y+\frac{(e^2-2)((e^2-1)a-m)}{(1-e^2)(e^2-m^2-1)}\right\}^2=\frac{e^2(e^2m^2-m^2-1)}{(1-e^2)(e^2-m^2-1)}\quad\cdots\ ⑪$$

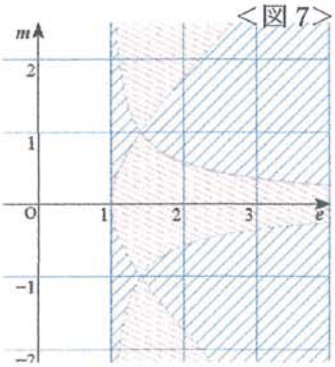
$X^2,\ Y^2$ の係数を①と見比べると

(ア) $0<e<1$ （横長の楕円）のとき，⑪は縦長の楕円で①と相似（長軸が C の長軸と直交）。

(イ) $1<e$ （主軸が X 軸の双曲線 ）のとき

Y^2 の係数は負で，右辺で $\dfrac{e^2}{1-e^2}<0$ だが，$\dfrac{e^2m^2-m^2-1}{e^2-m^2-1}$ の符号によって，⑪の主軸の方向が変わる。

<図 7>



その符号が正（<図 7>の青領域）のとき主軸は Y 軸方向，負（<図 7>の赤領域）のとき主軸は X 軸方向。

しかし，いずれの場合でも⑪は C と相似である。

(ウ) $e=1$ （C が左に凸の放物線 ）のとき，⑩は

$$m^2X^2+2(m^2+ma-1)X-2mY+a^2+2ma+1=0\quad\cdots\ ⑫$$

$m\neq 0$ より，これは上または下に凸の放物線で，C と相似（軸が C の軸と直交）である。

(ii) $y=a$ のとき

$\mathrm{H}\left(s,\ \dfrac{(e^2-2)a-t}{e^2-1}\right)$ だから，$X=s,\ Y=\dfrac{(e^2-2)a-t}{e^2-1}$ として，$s=X,\ t=(e^2-2)a-(e^2-1)Y$ を②へ代入して整理し，平方完成すると

$$\left(X-\frac{1}{1-e^2}\right)^2+(1-e^2)\left(Y-\frac{(2-e^2)a}{1-e^2}\right)^2=\frac{e^2}{(1-e^2)^2}\quad\cdots\ ⑬$$

$X^2,\ Y^2$ の係数を①と見比べると

(ア) $0<e<1$ （横長の楕円）のとき，⑬は縦長の楕円で①と相似（長軸が C の長軸と直交）。

(イ) $1<e$ （主軸が X 軸の双曲線 ）のとき，Y^2 の係数は負で右辺 >0 だから，⑬は主軸が X 軸方向の双曲線で，係数から C と相似である。

ちなみに，この場合 C は放物線とはなり得ない。

(iii) $x=a$ のとき

$\mathrm{H}((2-e^2)a+(1-e^2)s-2,\ t)$ だから，$X=(2-e^2)a+(1-e^2)s-2,\ Y=t$ として，$s=\dfrac{X-(2-e^2)a+2}{1-e^2}$，$t=Y$ を②へ代入して整理し，平方完成すると

$\{X+1-(2-e^2)a\}^2+(1-e^2)Y^2=e^2$ … ⑭

$X^2,\ Y^2$ の係数を①と見比べると

(ア) $0<e<1$ （横長の楕円）のとき，⑭は縦長の楕円で①と相似（長軸が C の長軸と直交）。

(イ) $1<e$ （主軸が X 軸の双曲線 ）のとき，Y^2 の係数は負で右辺> 0 だから，⑭は主軸が X 軸方向の双曲線で，係数から C と相似である。

(ウ) $e=1$ のとき $\mathrm{H}(a-2,\ t)$ であり，H の軌跡は X 軸に垂直な直線である。したがって，C が放物線で，弦 A_1A_2 が C の軸と垂直な場合は，H の軌跡は直線である（＜図 6＞）。

以上で，【定理 2】が証明された。

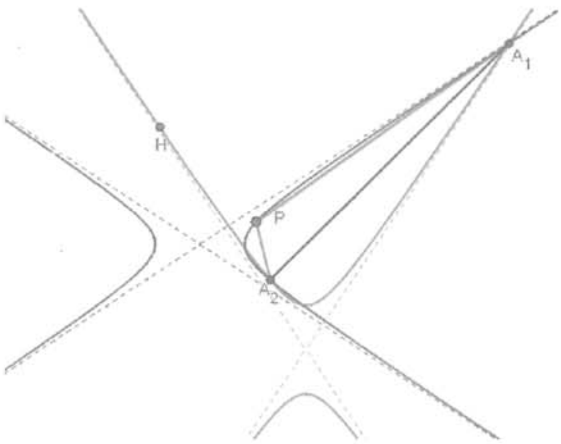
実際に GeoGebra で曲線を描いてみると，例えば(i)の場合，H が曲線⑪または⑫上を動き，軸の方向なども確認できた。

(i)(ア)の図は＜図 3＞

(i)(イ)の主軸が X 軸方向のままの場合の図は＜図 4＞

(i)(イ)の主軸が Y 軸方向へ変わる場合の図

＜図 8＞



(i)(ウ)の図は＜図 5＞

5 感想と今後の課題

計算が非常に煩雑であったため，初等幾何的手法で証明ができないかを調べたい。

6 参考文献

特になし。