２項係数を含む和と変形パスカルの三角形

大阪星光学院高等学校　３年　大江亮輔

１　はじめに

２項係数を含む様々な和を求めてみようと思います。後で紹介しますが、参考文献[1]を読んで知った結果が面白かったので、この研究をしようと思いました。以下では、積分法、または漸化式を使って特に２項係数と分数を含むものの和を求めていきたいと思います。さらに、以下で求めるいくつかの和には関係があることがわかりました。それをイメージで捉えるためにパスカルの三角形を少し変形したものを考えることにします。

（以下　２項係数を$\binom{n}{k}=\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{k!}$と表す。）

２　２項係数が分子にあるもの

２項係数を分子に含むものとして

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{\binom{n}{k}}{k+1}=\frac{2^{n+1}-1}{n+1}$$

となるのは有名です。（命題 2.1）
これは

$$(1+x)^n=\binom{n}{0}+\binom{n}{1}x+\binom{n}{2}x^2+\cdots+\binom{n}{n}x^n$$

の両辺を区間[0,1]で定積分すると得られます。
ではこれを一つずらした

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{\binom{n}{k}}{k}$$

はどうなるでしょうか?

定理 2.2

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{\binom{n}{k}}{k}=\sum_{k=1}^{n}\frac{2^k-1}{k}$$

証明１（積分）

先に示したものと同様に２項展開

$$(1+x)^n=\binom{n}{0}+\binom{n}{1}x+\binom{n}{2}x^2+\cdots+\binom{n}{n}x^n$$

を使う。ここでは分母を１ずらすために両辺をxで割る。

$$\frac{(1+x)^n}{x}=\frac{\binom{n}{0}}{x}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}x+\cdots+\binom{n}{n}x^{n-1}$$

$$\frac{(1+x)^n-1}{(1+x)-1}=\binom{n}{1}+\binom{n}{2}x+\cdots+\binom{n}{n}x^{n-1}$$

ここで左辺は以下のように変形できる。

$$\frac{(1+x)^n-1}{(1+x)-1}=1+(1+x)+(1+x)^2+\cdots+(1+x)^{n-1}$$

よって

$$\binom{n}{1}+\binom{n}{2}x\cdots+\binom{n}{n}x^{n-1}=1+(1+x)+(1+x)^2+\cdots+(1+x)^{n-1}$$

両辺を区間[0,1]で定積分すると

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{\binom{n}{k}}{k}=1+\frac{2^2}{2}+\frac{2^3}{3}+\cdots+\frac{2^n}{n}-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\cdots-\frac{1}{n}$$

$$=1+\sum_{k=2}^{n}\frac{2^k-1}{k}=\sum_{k=1}^{n}\frac{2^k-1}{k}$$

となり得られた。

このように等比数列をあえて閉じていない形にする必要があります。

<u>証明２（漸化式）</u>

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{\binom{n}{k}}{k}$$

とおく。

$$S_{n+1}-S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{\binom{n+1}{k}-\binom{n}{k}}{k}+\frac{\binom{n+1}{n+1}}{n+1}$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\frac{\binom{n}{k-1}}{k}+\frac{1}{n+1}$$

命題 2.1 より

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{\binom{n}{k-1}}{k}=\frac{2^{n+1}-1}{n+1}-\frac{1}{n+1}=\frac{2^{n+1}-2}{n+1}$$

よって

$$S_{n+1}-S_n=\frac{2^{n+1}-1}{n+1}$$

$S_1=1$よりこの漸化式を解くことで定理２が得られる。

このように漸化式を用いても証明することができます。

次に交互に足し引きしてみたいと思います。

定理２.３

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}\binom{n}{k}}{k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

証明

定理 2.2 と同様に

$$-\frac{(1-x)^n}{x} = -\frac{\binom{n}{0}}{x} + \binom{n}{1} - \binom{n}{2}x + \cdots + (-1)^{n+1}\binom{n}{n}x^{n-1}$$

という式を考える。

$$-\frac{(1-x)^n - 1}{x} = \frac{(1-x)^n - 1}{(1-x) - 1} = 1 + (1-x) + (1-x)^2 + \cdots + (1-x)^{n-1}$$

なので

$$1 + (1-x) + (1-x)^2 + \cdots + (1-x)^{n-1} = \binom{n}{1} - \binom{n}{2}x + \cdots + (-1)^{n+1}\binom{n}{n}x^{n-1}$$

両辺を区間[0,1]で定積分すると

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}\binom{n}{k}}{k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

が得られる。

驚くべきことに調和級数が現れました。これよりnを大きくすると左辺は緩やかに発散することがわかります。

また定理 2.2 と 2.3 からただちにつぎの結果が得られます。

系 2.4

$$\binom{n}{1} + \frac{\binom{n}{3}}{3} + \frac{\binom{n}{5}}{5} + \cdots + \frac{\binom{n}{n}}{n} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \frac{2^k}{k} \qquad (n\text{: 奇数})$$

$$\binom{n}{1} + \frac{\binom{n}{3}}{3} + \frac{\binom{n}{5}}{5} + \cdots + \frac{\binom{n}{n-1}}{n-1} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \frac{2^k}{k} \qquad (n\text{: 偶数})$$

$$\frac{\binom{n}{2}}{2} + \frac{\binom{n}{4}}{4} + \frac{\binom{n}{6}}{6} + \cdots + \frac{\binom{n}{n-1}}{n-1} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \frac{2^k - 2}{k} \qquad (n\text{: 3 以上の奇数})$$

$$\frac{\binom{n}{2}}{2} + \frac{\binom{n}{4}}{4} + \frac{\binom{n}{6}}{6} + \cdots + \frac{\binom{n}{n}}{n} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \frac{2^k - 2}{k} \qquad (n\text{: 偶数})$$

つぎに分母に２項係数があるものを考えます。

3　2項係数が分母にあるもの

まず以下の定理はすでに知られていますが後の考察のために用意しておきます。

定理 3.1（参考文献[1]）

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{\binom{n}{k}}=\frac{n+1}{2^{n+1}}\sum_{k=1}^{n+1}\frac{2^k}{k}$$

参考文献[1]ではベータ関数を用いた美しい証明がなされていましたがここでは漸化式を用いて示したいと思います。

証明

$$S_n=\frac{2^{n+1}}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{\binom{n}{k}}$$

とおく。

$$S_n-S_{n-1}=\frac{2^{n+1}}{n+1}$$

であることを示したい。

まず

$$\frac{1}{\binom{n}{k}}=\frac{k!\,(n-k)!}{n!}$$

$$=\frac{n-k}{n}\frac{k!\,(n-k-1)!}{(n-1)!}$$

$$=\frac{n-k}{n}\frac{1}{\binom{n-1}{k}}$$

$$\frac{1}{\binom{n}{k+1}}=\frac{(k+1)!\,(n-k-1)!}{n!}$$

$$=\frac{k+1}{n}\frac{k!\,(n-k-1)!}{(n-1)!}$$

$$=\frac{k+1}{n}\frac{1}{\binom{n-1}{k}}$$

$\mathrm{k}=0\sim\mathrm{n}-1$まで加えたものを辺々加えて

$$\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1}{\binom{n}{k}}+\frac{1}{\binom{n}{k+1}}\right)=\frac{n+1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{\binom{n-1}{k}}$$

$$2\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{\binom{n}{k}}-2=\frac{n+1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{\binom{n-1}{k}}$$

両辺を$\frac{2^n}{n+1}$倍して整理すると

$$\frac{2^{n+1}}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{\binom{n}{k}}-\frac{2^n}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{\binom{n-1}{k}}=\frac{2^{n+1}}{n+1}$$

となり

$$S_n-S_{n-1}=\frac{2^{n+1}}{n+1}$$

が示された。

4　2と3の関係

面白いことに二項係数を分子に含む定理 2.2 と分母に含む定理 3.1 に共通して

$\sum_{k=1}^{n+1}\frac{2^k}{k}$が現れました。

すなわち定理 2.2 と 3.1 から次の結果が得られます。

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{\binom{n}{k}}=\frac{n+1}{2^{n+1}}\sum_{k=1}^{n+1}\frac{\binom{n+1}{k}+1}{k}$$

これで2項係数の逆数の和を逆数でないものの和で表すことができました。

しかし、$\binom{n}{k},\binom{n+1}{k}$とずれがあるのでこれをなくしたいと思います。

まず

$$\begin{aligned}\frac{1}{\binom{n}{k}}&=\frac{k!\,(n-k)!}{n!}\\&=\frac{n+1}{k+1}\frac{(k+1)!\,(n-k)!}{(n+1)!}\end{aligned}$$

なので

$$\begin{aligned}\frac{n+1}{2^{n+1}}\sum_{k=1}^{n+1}\frac{\binom{n+1}{k}+1}{k}&=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{\binom{n}{k}}\\&=\sum_{k=0}^{n}\frac{n+1}{k+1}\frac{(k+1)!\,(n-k)!}{(n+1)!}\\&=(n+1)\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{(k+1)\binom{n+1}{k+1}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{2^{n+1}}\sum_{k=1}^{n+1}\frac{\binom{n+1}{k}+1}{k}&=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{(k+1)\binom{n+1}{k+1}}\\&=\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k\binom{n+1}{k}}\end{aligned}$$

よって次の定理が得られます。

定理 4.1

$$2^n \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k\binom{n}{k}} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\binom{n}{k}+1}{k}$$

これによって２項係数を分母に含むものと分子に含むものの相互関係が与えられました。

5　パスカルの三角形を用いた考察

ところで、いたるところに現れる、

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{2^k}{k} \qquad \cdots \quad (*)$$

が一体何を表しているのか考察してみることにします。

まず二項係数について考察しているので（＊）を二項係数で表すことにします。

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} \frac{2^k}{k} &= \sum_{k=1}^{n} \frac{(1+1)^k}{k} \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \sum_{m=0}^{k} \binom{k}{m} \end{aligned}$$

となります。

ここで次のようなパスカルの三角形を変形したものを考えます。

$$\begin{array}{c} 1 \quad 1 \\ 1 \quad 2 \quad 1 \\ 1 \quad 3 \quad 3 \quad 1 \\ 1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1 \\ 1 \quad 5 \quad 10 \quad 10 \quad 5 \quad 1 \end{array}$$

の n 段目を n で割ります。（変形三角形 1）

$$\begin{array}{c} 1 \quad 1 \\ \frac{1}{2} \quad 1 \quad \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} \quad 1 \quad 1 \quad \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} \quad 1 \quad \frac{3}{2} \quad 1 \quad \frac{1}{4} \\ \frac{1}{5} \quad 1 \quad 2 \quad 2 \quad 1 \quad \frac{1}{5} \end{array}$$

すると

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \sum_{m=0}^{k} \binom{k}{m}$$

は変形三角形 1 の n 段目までの総和を表します。

次に図で示したようにパスカルの三角形に k 列目というものを考え、k 列目を k で割ったものを考えます。ただし、0 列目は除きます。（変形三角形 2）

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 1 & & & & \\
 & & & 2 & & \frac{1}{2} & & & \\
 & & 3 & & \frac{3}{2} & & \frac{1}{3} & & \\
 & 4 & & 3 & & \frac{4}{3} & & \frac{1}{4} & \\
5 & & 5 & & \frac{10}{3} & & \frac{5}{4} & & \frac{1}{5}
\end{array}
$$

1列目 2列目 …

このとき

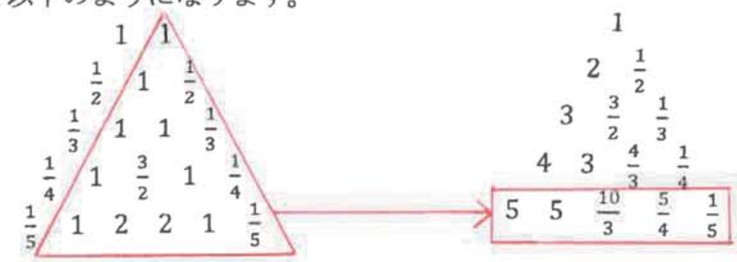
$$\sum_{k=1}^{n}\frac{\binom{n}{k}}{k}$$

は変形三角形２のｎ段目の和を表します。

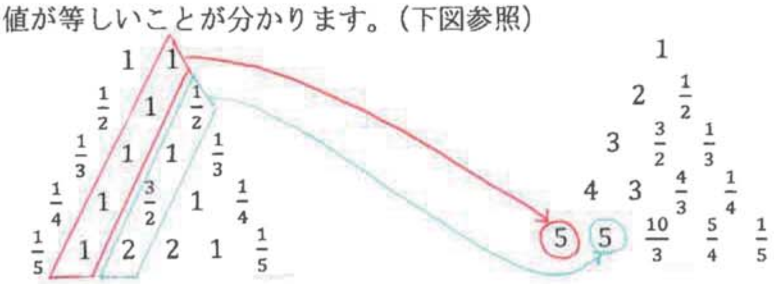
つまり、

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{\binom{n}{k}}{k}=\sum_{k=1}^{n}\frac{2^k-1}{k}$$

を図式化すると以下のようになります。



さらに注意深く観察すると、変形三角形１のｎ段目までの ｋ 列目の和と変形三角形２のｎ段目, k 列目の値が等しいことが分かります。（下図参照）



つまり、上で得られた結果の背景には次の公式が隠れていたことが分かります。

$$\sum_{m=k}^{n}\frac{\binom{m}{k}}{m}=\frac{\binom{n}{k}}{k}$$

証明

$$\sum_{m=k}^{n}\frac{\binom{m}{k}}{m}=\sum_{m=k}^{n}\frac{m!}{m\cdot k!\,(m-k)!}$$

$$=\sum_{m=k}^{n}\frac{(m-1)!}{k!\,(m-k)!}$$

$$=\frac{1}{k}\sum_{m=k}^{n}\frac{(m-1)!}{(k-1)!\,(m-k)!}$$

$$=\frac{1}{k}\sum_{m=k}^{n}\binom{m-1}{k-1}$$

$$=\frac{\binom{n}{k}}{k}$$

また、

$$2^n\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k\binom{n}{k}}$$

が現れる変形三角形３を考えます。これはパスカルの三角形の各数字を逆数にしたものの k 列目を k で割り（ただし、k＝０は除く）、さらに n 段目を2^n倍した三角形を考えます。すると変形三角形３の n 段目の和に上式が現れます。

$$2$$

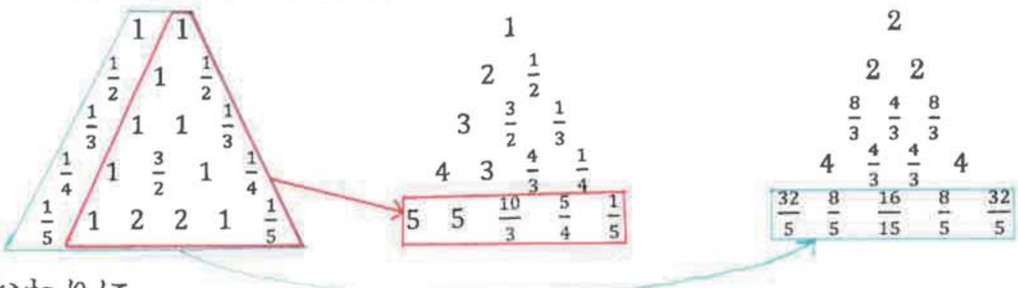
$$2 \quad 2$$

$$\frac{8}{3} \quad \frac{4}{3} \quad \frac{8}{3}$$

$$4 \quad \frac{4}{3} \quad \frac{4}{3} \quad 4$$

$$\frac{32}{5} \quad \frac{8}{5} \quad \frac{16}{15} \quad \frac{8}{5} \quad \frac{32}{5}$$

この三角形の n 段目の和が変形三角形１の n 段目までの和が等しいことが分かります。
こちらの場合も細分化できないかと考えましたが、見つけることが出来ませんでした。
しかし、$\frac{\binom{n}{k}}{k}$と$\frac{\binom{n}{k}}{n}$及び$\frac{1}{k\binom{n}{k}}$の和にこういったシンプルな関係があるのは面白いと思いました。
まとめておくとつぎのようになります。



6　おわりに

今回の研究では２項係数の様々な和を求めてみました。すると、相互関係が見つかり、驚きました。すべて$\sum_{k=1}^{n}\frac{2^k}{k}$を介して得られたので、今後はこれらをシグマを使わずに n の式で表せないかどうか考えてみたいと思います。また、n の式で表せないとしても、何か特徴付けができるような式で評価できないか考えてみたいと思います。さらに、今回のようにイメージを使って、視覚化してみると、別の事実に気づくようなことがあると分かったので、これからも何かを調べる際には、積極的にイメージを使っていきたいと思います。

7　参考文献

[1]. Tiberiu Trif. “Combinatorial Sums and Series Involving Inverses of Binomial Coefficients.” The Fibonacci Quarterly