研究テーマ（タイトル）

家事と数学の橋渡し

私立 滝高等学校 1年 名前 丹羽駿輔，細江力生

研究の動機

家で夕食の手伝いをしているとき、家族の席それぞれに一人ひとりの箸を置くという作業を時々します。この時、食器棚から箸をつかみ取り、手の上で一列に並べてそれぞれの箸を抜きとっていくのですが、次にとる1ぜんの箸が2本となりあっていると、取りやすいのです。

そこで、家族4人分の4ぜんの箸が全て「取りやすい」状態になっている箸の並び方はいくつあるのかを考えます。

また、そのような状況下の棒の組の数においての並べ方を発展して考えたいと思いました。

研究の方法

(1) 4人分の箸（2本1組の棒の組）の並べ方を探る。

(2) 配る箸の人数を増やす、一般化する

(3) 条件を付け足す

研究(1)

まず解くべき問いを明確にする。

問題(1)

それぞれ柄の異なる箸が4ぜんある。これを一列に並べ順に取っていく。取る順序が決まっているとき、箸を取るときにその箸が2本となりあっている状態が全ての箸に当てはまる箸の並べ方はいくつか。

すなわち、3ぜんのとき 1,1,3,2,2,3 という箸の並び（数字は箸を取っていく順番を表す数字）であるとき、

1,1,3,2,2,3 → 3,2,2,3 → 3,3

と順番にとっていくと、全てそれぞれの箸はとられる直前において、となりあっている。よって、これは条件を満たす並び方。

また、2,1,1,3,3,2 という並び方では、

2,1,1,3,3,2 → 2,3,3,2

と、2番目の箸がとなりあっていないので、条件を満たしていない。

これは、取っていく手順を逆向きに見て並べていくと、必ず条件を満たす並び方になると考えられる。

すなわち、

逆手順① 4番目にとる箸を並べる

逆手順② 3番目にとる箸を①の箸のどこかに1ぜんをセットで入れる。

逆手順③ 2番目にとる箸を②と同様に入れる。

逆手順④ 1番目にとる箸を②と同様に入れる。

を行う。

ここで、逆手順ⓐで箸を入れられる場所の場合の数を $f(a)$（通り）で表す（$1 \leqq a \leqq 4$）とすると、

$f(1)=1$。

$f(2)$は、①で2本の箸があるので、その両端と間に入れられる。よって、$f(2)=3$。

$f(3)$, $f(4)$は$f(2)$と同様に考えて、$f(3)=5$, $f(4)=7$。

以上より、問題(1)の答えは、

$1 \times 3 \times 5 \times 7 = \underline{105（通り）}$。

研究(2)-1

問題(2)-1

問題(1)と同じ条件を満たすような、柄の異なる n ぜんの箸の並べ方はいくつか。

研究(1)と同じ考え方を使う。

このとき、「逆手順k」を

「$(n-k+1)$ 番目にとる箸を $k-1$ に並べられた箸の列のどこかに1ぜんをセットで入れる。」(但し $1<k\leqq n$)、

「逆手順1」を「n 番目にとる箸を並べる。」と定義し、

逆手順aで箸の入れられる場所の場合の数を $f(a)$ (通り)で表す($1\leqq a\leqq n$)とすると、

研究(1)から、 $f(a)=2a-1$ が予想される。

今からそれを証明する。

〈証明〉

逆手順$k-1$まで終わっていたとする。($1<k\leqq n$)

このとき逆手順kでは$k-1$までに並べてある箸の両端と間に入れることができる。

箸は、$2(k-1)$ 本並んでいるので、

$f(k)=2(k-1)+1=2k-1$ ―①。

①に $k=1$ を代入すると、$f(1)=1$ が成り立つので、

$f(a)=2a-1$ 。 (終)

よって、n ぜんの箸の並べ方は、

$1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot \cdots (2n-3)(2n-1)$

$=\prod_{k=1}^{n}(2k-1)$

より、$\prod_{k=1}^{n}(2k-1)$ (通り)

研究(2)-2

問題(2)-2

1組 p 本の棒(1組ごとに色が異なる)が n 組ある。

これを一列に並べ順に取っていく。取る順序が決まっているとき、棒を取るときにその棒の組がp本全てとなりあっている状態が全ての棒の組に当てはまる棒の並べ方はいくらか。

今までと同様に逆手順と@における$f(a)$を定義する。

ここで、$p=2$のとき、$f(a)=2a-1$で、

数列$\{f(a)\}$は初項1，公差2の等差数列。

$p=3$のとき、$f(1)=1$。

$f(2)$は、並んでいる3本の間と両端なので4。

$f(3)$は同様にして、7。

ここで、数列$\{f(a)\}$は初項1，公差3の等差数列であると考えられる。

以上より、数列$\{f(a)\}$は初項1，公差pの等差数列であると予想がたつ。これを示す。

<証明>

いずれのpにおいても$f(1)=1$。

逆手順kにおいては、$(1<k\leqq n)$

$k-1$までで$p(k-1)$本の棒が並んでいるので、

その間と両端の$\{p(k-1)+1\}$通り。

$$f(k)=p(k-1)+1$$

よって、

$$\begin{aligned}f(k)-f(k-1)&=\{p(k-1)+1\}-\{p(k-2)+1\}\\&=p\end{aligned}$$

より、$f(k)-f(k-1)$はpで一定なので

数列$\{f(a)\}$は初項1，公差pの等差数列である。(終)

よって、求める値は、

$$\begin{aligned}&f(1)\times f(2)\times f(3)\times\cdots\times f(n)\\=&1\times(p+1)\times(2p+1)\times\cdots\times(pn-n+1)\\=&\prod_{k=1}^{n}(pk-p+1)\ \text{通り}\end{aligned}$$

研究(3)

問題(3)

1組 p 本の棒(1組ごとに色が異なる)が n 組ある。これを1列に並べ、順に取っていく。取る順序が決まっているとき、棒を取るときにその棒の組が p 本全てとなりあっている状態が全ての棒の組に当てはまる棒の並べ方はいくらか。但し、最後から x 番目にとる棒の組が最初から全てとなりあっているものとする。$(1 \leqq x \leqq n)$

今までと同様に逆手順と ⓐ における $f(a)$ を定義する。このとき、ⓧ までは問題(2)-2と同じなので、

$$\prod_{k=1}^{x}(pk-p+1) \quad 通り。$$

$(x+1)$ ~ ⓝ の逆手順では、問題(2)-2における $f(a)$ から、②で入れた棒の間 $(p-1)$ ヶ所には入れることができないので、

$$f(a)=\{p(a-1)+1\}-(p-1)$$
$$=pa-2p+2。$$

よって、$(x+1)$ ~ ⓝ の入れ方は、$\prod_{k=x+1}^{n}(pk-2p+2)$ 通り。

以上より、

$$\left\{\prod_{k=1}^{x}(pk-p+1)\right\}\times\left\{\prod_{k=x+1}^{n}(pk-2p+2)\right\} \quad 通り。$$

感想

今まで解いてきた数学の問題では、グラフなどにおいては特に、問題で行われる手順通りに計算を進めれば解くことのできるものであったが、今回は手順とは逆の"逆手順"を設定することにより、より単純な方法で解くことができると思った。

また、これまでの偉人も他人には解けなかったものを解くということは、このような視点を変えることが上手で、一般の人々とは別の世界が見えていたのではないかと考えた。
今回家事を楽にするときの条件を数学を用いて切り開いてみたが、よく言われる家事のポイント、手際のよさも、"別の視点"から見れば一種の数学として見ることはできると感じた。
これからは作業が楽になる理由を数学的に考え、また、その結果から、もっと楽になる方法を発展させていくなど、家事と数学の橋渡しから効率を求めていきたい。