三角形及びその辺を準線とする放物線の性質

海城中学３年　島倫太郎

1°　動機

ここ最近私は、作図に便利なツールソフトである Geogebra*を愛用している。今では我が校の数学同好会に必要不可欠なアイテムの一つともなっており、作図したオブジェクトを動かしてその美しさや面白さを仲間と競って遊んでいる。本論文で紹介する三角形と放物線に関する複数の命題も、先日この過程で不意に見つけたものであり、それらを本論文では代数なども交えながら証明していきたい。

2°　本論

ではまず本論文の発端となった命題を紹介する。

命題１　任意の三角形 ABC において、同一平面上の任意の点 P を焦点とし、三角形 ABC の３辺を延長した直線を準線とする計３つの放物線を描き、その放物線同士の交点をとる。このとき、点 P を動かすと交点の軌跡はどれも直線になる。

これでは一見すると手の付けどころがわからないが、さらに Geogebra で作図を続けると新たな予想が立った。

命題 1(改)　それらの交点はいずれも点 P の位置に関係なく∠A, B, C の二等分線上にある。

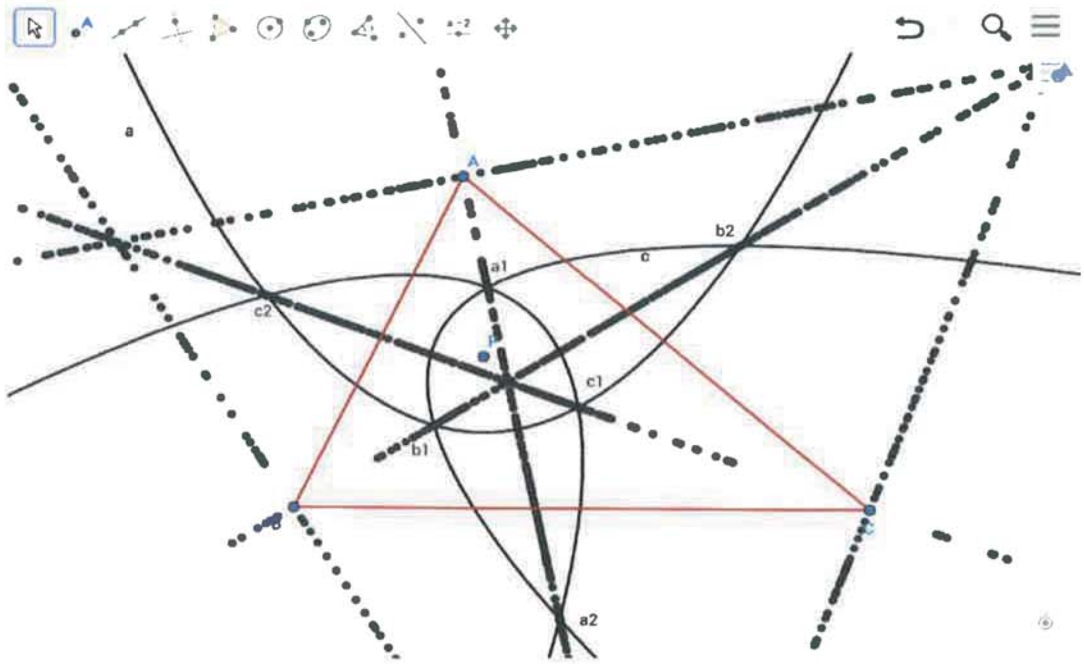
これによって、この命題の証明がとても簡単であることがわかった。

証明　点 P と直線 BC, CA, AB によってできる放物線をそれぞれ放物線 a, b, c とする。放物線 a, b の交点について考えると、放物線の定義より放物線 a 上の点は直線 BC と点 P からの距離が等しく、放物線 b 上の点は直線 CA と点 P からの距離が等しいから、その交点は直線 BC と直線 CA と点 P からの距離が等しい。よって、直線 BC, CA からの距離が等しい点の集合である∠C の二等分線上に必ず存在する。また、その他の交点についても同様に証明可能。■

---

* 幾何、代数、解析を１つに結びつけた数学ソフトウェア。
描画が抜群に美しく、操作も容易である。
作図したオブジェクトを移動、変形させると数式も自動的に変更され、逆に、数式を変更するとそれに応じてオブジェクトも変形する。(以上 Geogebra HP より引用)

命題 1 を表しているのが下の図である。なお、交点は a1~c2 としている。



a1~c2 の定義

まず放物線 b と c の交点のうち、点 P が三角形内部にあるときに点 A に近い方を a1 とする。ここで、a1 は直線 AC に対して点 P が点 B 側にあるときにできる放物線 b 上で a2 より上の図の矢印①方向にあることがわかる。また、直線 AB に対して点 P が点 C 側にあるときにできる放物線 c 上では a2 より上の図の矢印②方向にあるといえる。よって点 P が直線 AC に対して点 B 側にあるときは、放物線 b 上でより矢印①方向にある方の交点を a1 とし、直線 AB に対して点 C 側にあるときは放物線 c 上でより矢印②方向にある方の交点を a1 とする。最後に、点 P が上記の両条件とも満たさない場合は、点 A からより遠い方を a1 とする。b1 と b2、c1 と c2 についても同様の方法で決定するものとする。

ここで念のために、交点が全部で 6 個(但し点 P は直線 AB, BC, CA 上にない)になることを述べておこう。これはある二つの放物線を選んだ時にその交点が必ず 2 個であることを示せばよい。よって、この問いは“焦点が一致し、準線が交わる異なる二つの放物線の交点が 2 個であることを示せ”という問いに置き換えられる。以下これを証明する。

証明

まず交点が 0 個でないことを示す。交点が 0 個であるということは片方の放物線がもう片方の内部にあることになり、その場合軸の傾きが等しいことが条件となる。しかし題意よりそれはあり得ないため示された。また、1 個でないことも同様にして示される。

次に交点が 3 個以上でないことを示す。そこで命題 1 を利用して、“二つの放物線の交点が 3 個以上であることはない”という問いを“一つの放物線と二つの準線のなす角の二等分線の交点が 3 個以上であることはない”という問いに置き換えて考えたい。

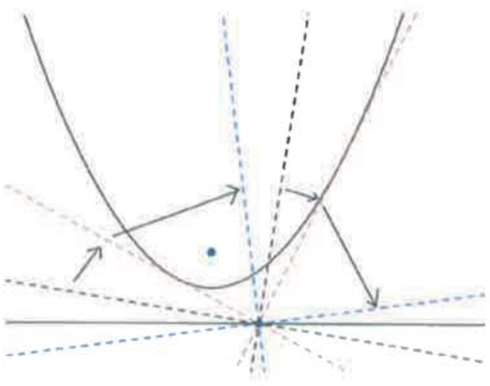
二つの準線のなす角の二等分線は二つあり、一つの角の二等分線と放物線が 3 か所以上で交わったり接したりすることはありえないから、この場合放物線は一つの角の二等分線と交わり、もう一つと接するか交わる必要がある。しかし、角の二等分線はいずれも放物線の準線上の点であり、放物線の性質として準線上の任意の点から放物線に引いた二つの接線は垂直に交わるというものがある。二つの角の二等分線は垂直に交わるから片方が接したとしたらもう一方も接することになり、二つとも交わることもない(図 1)。■

以上で示されたことになるが、ここで加えて述べておきたいのは、そもそも片方の角の二等分線が放物線に接するとき、もう一つの放物線の準線は焦点を通ることになってしまうから本来定義されないということである。その証明は以下の通りである(図 2)。

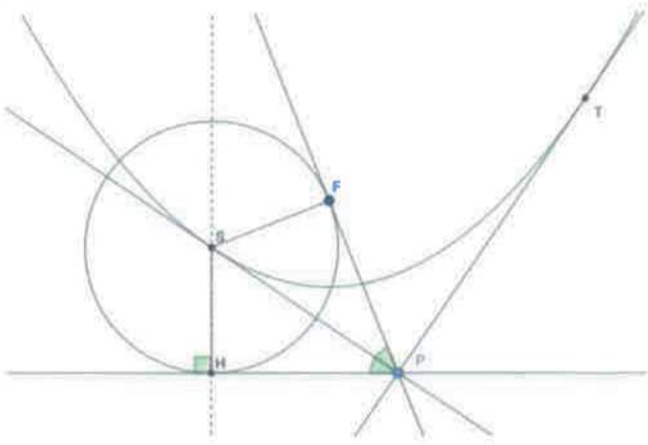
証明

準線 l と焦点 F で定義される放物線があり、l 上の任意の点 P から放物線に引いた接線の接点をそれぞれ S, T とおく。S から l に垂線の足 H を下ろす。仮定より SF＝SH。また、直線 SP が l との角の二等分線になるような直線を引き、S から下ろした垂線の足を F’とすると、SH＝SF’。故に SF＝SF’(…①)。ここで仮定より∠SF’P＝90° ＝∠SHP, ∠F’PS=∠HPS。故に∠PSF’=∠PSH。一方、放物線と接線の性質より∠PSF＝∠PSH。故に∠PSF＝∠PSF’(…②)。①,②より F と F’は一致。よって同一法で示された。■

【図 1】

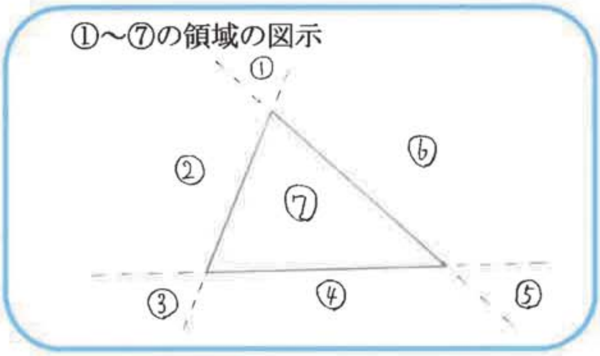


【図 2】



さらに、点 P が直線に対しどちら側にあるかで放物線の向きが変わることから、点 P がどのような領域内を動くかによってそれらの交点の軌跡も変わることは容易に推測される。ある一つの直線に対し点 P がどちら側にあるかは 2 通り考えられ、三角形 ABC を構成する三直線と焦点との位置関係について考えているから 2^3 通り、そこから点 P が直線 AB, BC, CA のすべてに対し三角形の外部側にある場合を除いた 1 通りを引いて(これは他の場合において考慮することになる) 計 7 通りの領域に場合分けすることが可能である。そこで、それぞれの領域に①～⑦の番号を振り、点 P の存在する領域と交点の位置の関係を表にまとめてみた。

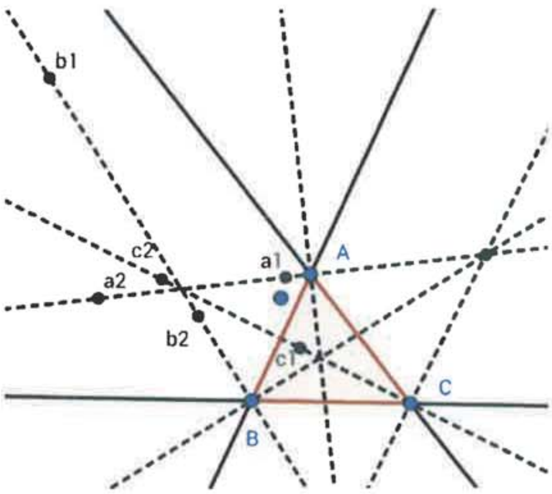
	a1	a2	b1	b2	c1	c2
①	a内	a内	b外	b外	c外	c外
②	a外	a外	b外	b外	c内	c内
③	a外	a外	b内	b内	c外	c外
④	a内	a内	b外	b外	c外	c外
⑤	a外	a外	b外	b外	c内	c内
⑥	a外	a外	b内	b内	c外	c外
⑦	a内	a内	b内	b内	c内	c内



①と③と⑤はいずれも三角形の内角の対頂角側の領域であり、②と④と⑥は外角側の領域である。本論文では便宜上これらの領域に対称性があると呼ぶことにしたい。

表の見方(②の行を例に)

a1, a2 の列が a 外とあるのは、∠A の外角の二等分線上に a1, a2 が存在することを示しており、c1, c2 の列が c 内とあるのは∠C の内角の二等分線上に c1, c2 が存在することを示す。さらに、b2 の列などが黄色で塗られているが、これは b1 と b2 では b2 の方がより点 B に近い点であることを示している。



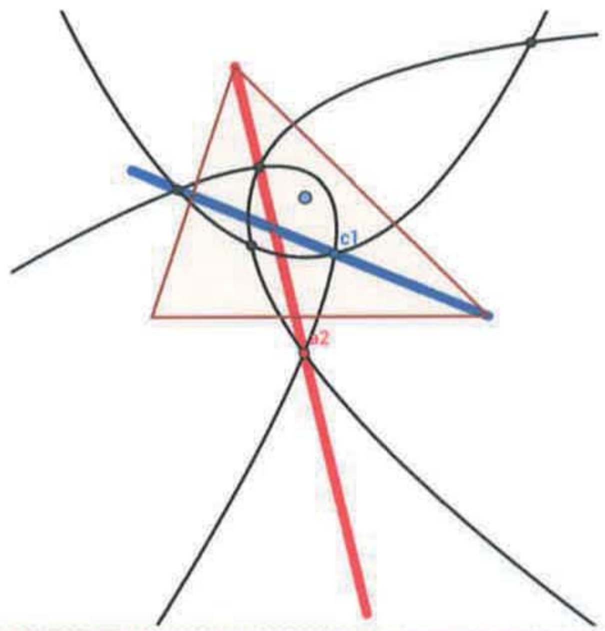
この表を見るといくつか興味深い点があることに気付く。主なところでは、

・①と④、②と⑤、③と⑥は向かい合う2つの領域の組み合わせだが、同じ組み合わせ同士を比較すると、内角の二等分線上にあるのか外角の二等分線上にあるのかという点では完全に一致している一方、黄色に塗られた列である三角形の頂点に近い方の点は正反対になっている。
・④と⑦の領域に対称性はない一方、黄色に塗られた列は一致している。

などである。

ここまで交点の軌跡がどのような理屈で直線になり、交点には他にどのような特徴があるかを紹介してきた。しかし、先ほどの⑦の領域だけで点 P を動かせば実際には交点の軌跡は線分になる。また、①~⑥で動かせば半直線になるはずである。そこで、次はそれら線分や半直線の端点がどのような特徴を持つ点なのかを調べてみよう。

下図は点 P が⑦にあるときの a2(赤)及び c1(青)の軌跡



【方針】

領域の対称性から⑦,①,②についてのみ考えればよい。

[1]点 P が領域⑦に存在する

この場合において a1, b1, c1 と a2, b2, c2 はいずれも対称性があるため、c1 と a2 を例に考えたい(選び方は自由)。

まず c1 の軌跡に関してであるが、左の図からわかるように片方の端点は点 C に限りなく近い点である。これは c1 が点 C より左上側にあることと、点 C に限りなく近い点になりうることの2つを示せばよい。

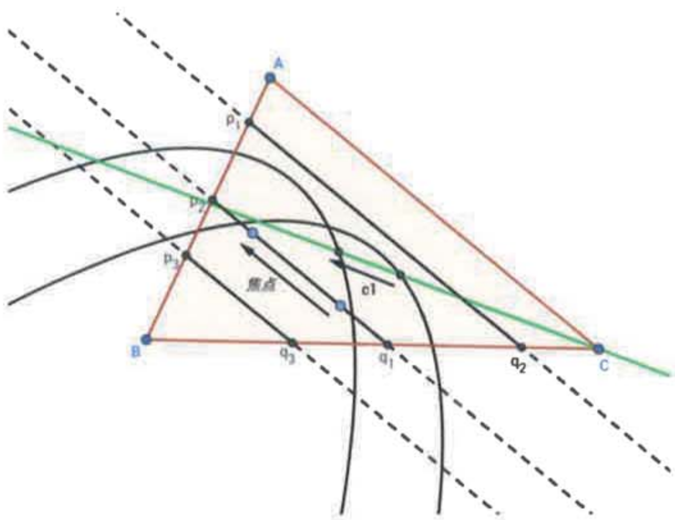
c1 は必ず∠C の内角の二等分線上にある。また、放物線 a 上の点であるから直線 BC より点 A 側にある。よってこの共通部分にある c1 は、∠C の内角の二等分線のうち点 C より左上の部分に存在する(前者)。一方、焦点が限りなく点 C に近いとき、辺 BC や辺 CA に焦点が限りなく近いから、放物線 a と b は焦点を通る辺 BC と辺 CA の垂線にそれぞれ限りなく近づく。よってその交点は限りなく点 C に近くなる(後者)。以上より示された。■

次に c1 の軌跡のもう片方の端点を求めてみよう。Geogebra を用いて実験を繰り返した結果、"c1 の軌跡の端点のうち点 C(に限りなく近い点)でない方は、焦点が辺 AB 上にあるときに c1 が通る点である"との予想が立った。以下これを証明する。

そこで再度命題 1 を利用し、c1 を∠A の内角の二等分線と放物線 b の交点として捉えて考えたいと思う。二つの放物線の交点として捉えてしまうと変動するものを二つ同時に考えなければならないが、こうすることによって変動するのは放物線一つで済むため非常に考えやすくなる。

証明

〈イメージ図〉



領域⑦内の任意の点 x(但し辺 AB 上にないとする) に関して、点 x を通り辺 CA と並行な直線と辺 AB, BC の交点をそれぞれ p, q とする。焦点を線分 pq 上で移動させても、放物線 b は準線と焦点の距離が変化しないため平行移動する。そして、放物線 b と∠C の内角の二等分線の交点が c1 であるから、放物線がより左側にある、すなわち焦点がより左側にある方が c1 は点 C と離れる。よって、点 x が焦点であるときの c1 より点 p が焦点であるときの c1 の方が点 C から離れた位置にある。点 x が三角形の内部を自由に動くと点 p の軌跡は線分 AB になることから、c1 が点 C でない方の端点をとるのは焦点が辺 AB 上にあるときである。■

次に、焦点が辺 AB 上のどこにあるときに c1 が端点をとるか考える。これも Geogebra で実験したところ、以下の 3 通りの場合があることが判明した。

(i) AC < BC…焦点が点 A に限りなく近いとき端点になる。

(ii) AC = BC…焦点が点 A または点 B に限りなく近いとき端点になる。

(iii) AC > BC…焦点が点 B に限りなく近いとき端点になる。

(AC, BC とは辺の長さのことを指すものとする)

以下これを証明する。証明は$\boxed{1}$ $\boxed{2}$の二段階で行う。

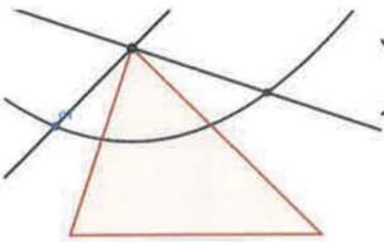
$\boxed{1}$ c1 が端点になるのは、焦点が点 A に限りなく近いときと点 B に限りなく近いときのいずれかである。

$\boxed{2}$ 辺 AC と BC の長さの関係によって、c1 が端点になるときの焦点の位置が変わる。

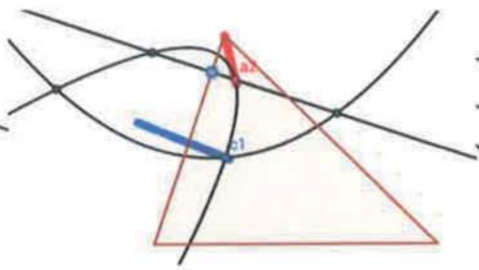
$\boxed{1}$ の証明

焦点を点 A から点 B へ近づけていくと図 3~7 のようになる。これらからは、焦点が移動するに従い c1 が図 3 の位置から一度点 C へ近づき、a2 と c1 が一致すると、その後は点 C から離れ続けることが見て取れる。これを証明すれば、c1 が点 C から最も離れるのは、焦点が点 A または点 B にあるときのいずれかに絞られる。

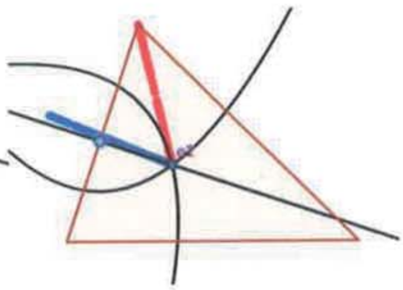
【図 3】



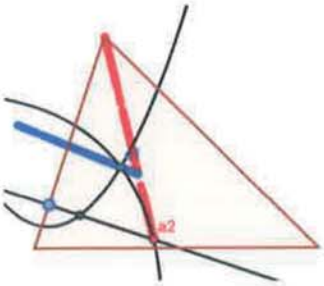
【図 4】



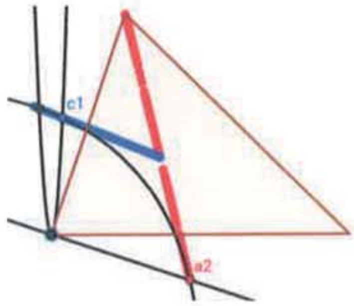
【図 5】



【図 6】



【図 7】



そこで、まず補題として次のことを証明する。

【補題】放物線 b は焦点が辺 BC 上にあるとき∠A の内角の二等分線に接する。

証明(補題)

座標平面上で考える。焦点 P が辺 AB 上の任意の点であるとき、点 P から辺 AC に下ろした垂線を y 軸とする(但し y 軸の正の方向は辺 AC に対し点 P と反対側)。また、P の座標を $P(0,-m)$、A の座標を $A(n,0)$とする$(m,\ n>0)$。今、放物線 b は焦点$(0,-{}^{m}\!/_{2})$、準線$y={}^{m}\!/_{2}$の

放物線をy軸方向に$-{}^{m}/_{2}$平行移動させたものより、整理すると方程式は$-2my=x^2+y^2$(①)となる。一方、∠BAC の内角の二等分線の方程式に関して、∠BAC$=\theta$（$0<\theta<\pi$）とおくと傾きは $\tan{}^{\theta}/_{2}$となる。三角形 APO に関する三平方の定理から $\cos\theta={}^{n}/_{\sqrt{m^2+n^2}}$ で、半角の公式$(\tan{}^{\theta}/_{2})^2={}^{(1-\cos\theta)}/_{(1+\cos\theta)}$に代入すると、$\tan{}^{\theta}/_{2}=\pm{}^{(\sqrt{m^2+n^2}-n)}/_{m}$。

θの条件から $\tan{}^{\theta}/_{2}>0$ で、これに注意すると $\tan{}^{\theta}/_{2}={}^{(\sqrt{m^2+n^2}-n)}/_{m}$。よって∠A の内角の二等分線の方程式は $y=\{{}^{(\sqrt{m^2+n^2}-n)}/_{m}\}x-\{{}^{(\sqrt{m^2+n^2}-n)}/_{m}\}n$(②)となる。今、①と②を連立すると$x^2+2(\sqrt{m^2+n^2}-n)x+m^2-2(\sqrt{m^2+n^2}-n)n=0$。この方程式の判別式を D とすると、${}^{D}/_{4}=(m^2+2n^2-2n\sqrt{m^2+n^2})-m^2+2(\sqrt{m^2+n^2}-n)n=0$。よって①と②は接する。■

上の補題から、辺 AB 上の点を焦点とするときに、c1 が∠A の内角の二等分線より点 C 側にあることはないことがわかる。また、c1 が接点となるとき∠A 及び∠C の内角の二等分線上にあることになるから、c1 は三角形 ABC の内心である。さらに、c1 が内心と一致するときの焦点は、三角形 ABC の内接円と辺 AB の接点と一致するといえる。その証明は以下の通りである。

c1 が内心となるとき、c1 から辺 AB, CA に下ろした垂線の足をそれぞれ H1, H2 とし、焦点を F とすると、仮定から c1 は Fc1＝H2c1(∵c1 は放物線 b 上)かつ H1c1＝H2c1(∵c1 は∠A の内角の二等分線上)を満たす点より Fc1＝H1c1 である。F と H1 はともに辺 AB 上で、∠c1H1A=90° だから F と H1 は一致する。また、H1 は三角形 ABC の内接円と辺 AB の接点と同じ点であるから、上記の命題は証明された。■

焦点が点 A に限りなく近いとき、放物線 b は点 A を通り辺 AC に垂直な半直線に限りなく近くなる。よって、そのときの c1 は点 A を通り辺 AC に垂直な直線と∠C の内角の二等分線との交点に限りなく近くなる。今、焦点が三角形 ABC の内接円と辺 AB の接点(以下 H1)に一致するまで動かしていくと、放物線 b の軸は点 C に近づき、放物線 b の形は直線から U 字型に近くなる。よって、c1 もそれに伴い点 C へ近づいていくことになり、焦点が点 A と H1 の間にあるときに c1 が最も点 C と離れるのは、焦点が点 A のときであるとわかる。また、今と同様に考えていくと、焦点が点 B と H1 の間の範囲にあるときに c1 が点 C と最も離れるのは、焦点が点 B にあるときであるとわかる。以上から、$\boxed{1}$は証明された。

$\boxed{2}$の証明

ⅰ~ⅲはどれもほぼ同様に示されるので、ⅰについてのみ証明する。点Aを通り直線ACに垂直な直線と∠Cの内角の二等分線の交点をX、点Bを通り直線BCに垂直な直線と∠Cの内角の二等分線の交点をYとする。焦点が点Aに限りなく近いときc1は限りなくXに近く、点Bに限りなく近いときc1は限りなくYに近い。三角形XACと三角形YBCについて、仮定より∠XAC＝∠YBC, ∠ACX＝∠BCYで、二角相等より相似。各辺の長さの比は等しく、AC＜ABよりCX＜CY。よってYの方が点Cから離れている。以上より、焦点が点Bに限りなく近いときに、c1は点Cでない方の端点になる。

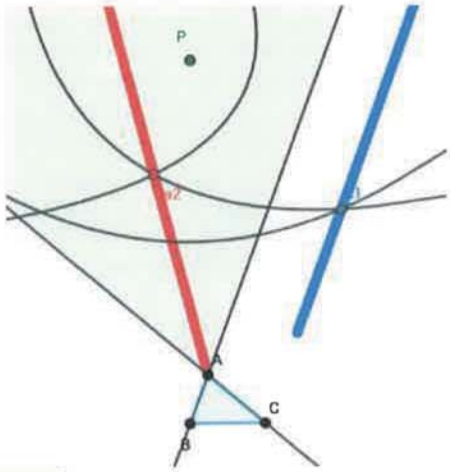
次にa2の軌跡についてである。a2の軌跡の片方の端点は限りなく点Aに近く、c1のときと同様に示すことができる。一方もう片方の端点については、∠Cの外角の二等分線上にあるとの予想が立った。以下簡単にその説明をしよう。

まず、a2が点Aから遠くなるには、6ページの証明とほぼ同様の方法を使うことによって、焦点が辺BC上にあるときとわかる。次に、焦点が辺BC上の点であるとき∠Cの外角の二等分線と放物線bが接することを示すことができれば、a2が放物線b上の点であることから∠Cの外角の二等分線より点Aと反対側に存在することがないことと、∠Cの内角の二等分線上の点になりうることが同時にわかる。今、先ほどの補題の$\boldsymbol{\theta}$を$\boldsymbol{\pi}-\boldsymbol{\theta}$に変え外角の二等分線の傾きを$\tan{}^{(\pi-\theta)}/_{2}$として考えると、やはり同様にして∠Aの外角の二等分線と放物線bの連立方程式の判別式が0になり、接することがわかる。よって対称性から∠Cの外角の二等分線と放物線bが接することも証明される。以上より∠Cの外角の二等分線と∠Aの内角の二等分線の交点、すなわち三角形ABCの傍心(I_A)が端点である。

次に、a2が点Aでない方の端点になるときの焦点の位置を考えてみよう。焦点をF、I_Aから直線AB, CAに下ろした垂線の足をH1, H2とする。このとき、a2が端点をとるならば上記の結果より$H1I_A = F\,I_A = H2\,I_A$が成り立つ。今I_Aを中心とし、直線ABに接する円を考えると、F, H1, H2はこの円周上にあることがわかり、Fは辺BC上よりI_Aから直線BCに下ろした垂線の足であることがわかる。

[2]点 P が領域①に存在する

このときについても c1 と a2 の軌跡についてみてみよう。但し、[2], [3]の結果に関しては、紙面の関係上証明を省かせていただきたい。



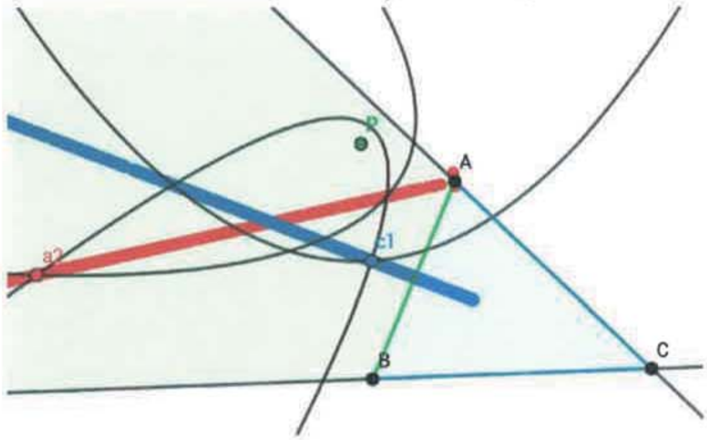
(1) c1 の軌跡

∠C の外角の二等分線のうち、三角形 ABC の傍心 I_B より点 C と反対側の部分の半直線。

(2) a2 の軌跡

∠A の内角の二等分線のうち、領域①内の部分の半直線。

[3]点 P が領域②に存在する



(1) c1 の軌跡

∠C の内角の二等分線のうち、三角形 ABC の内心 I より点 C と反対側の部分の半直線。

(2) a2 の軌跡

∠A の外角の二等分線のうち、直線 AC に対し点 B 側の部分の半直線。

また、最後にもう一つ、三角形と放物線に関しての性質を紹介しておく。証明は放物線の定義から簡単に行うことが可能であり、ここではしない。

傍心 I_C を中心とする傍接円 C 上に焦点があるとき、放物線 a, b, c は一点で交わり、その交点は焦点が円周上のどこにあるかに関わらず、傍心 I_C と一致する。

3° 感想と考察

本論文では、論理を構築する際に一つ一つ証明していくことに重点を置いた。そのため、時間はかかったが研究を着実に進めていくことが出来た。また、本論文を書いていて興味深かったのは、ここで扱ってきた数学の命題が数式をあまり使わずとも証明できたことであった。自分としてはあまり数学らしくないと感じたが、このような証明方法は初体験で、楽しみながらできた。なお今後の展開としては、三角形 ABC が鈍角・直角三角形の場合についての考察や、放物線以外の二次曲線と三角形の関係についての考察などが考えられる。