初等幾何と二次曲線

青木 孔 *

2016 年 2 月 15 日

概要

初等幾何的でない扱いは困難に思える Miquel 点が実は放物線の焦点であるという事実を聞いて，その完全に初等的な証明を試みた．それは対称性を崩さず対称性の高い命題を示す方法であることに気づいたので他の初等幾何の命題についても似たように示せないかを考えた．

結果として完全四辺形や完全四角形に関する命題を示すのには放物線や直角双曲線が有用であることがわかった．しかし一般の二次曲線はあまり初等幾何の（射影幾何的でない）命題を示すのにあまり使えないことがわかった．

1 はじめに—初等幾何の方法

まず初等幾何において，二次曲線が使える例を紹介する．

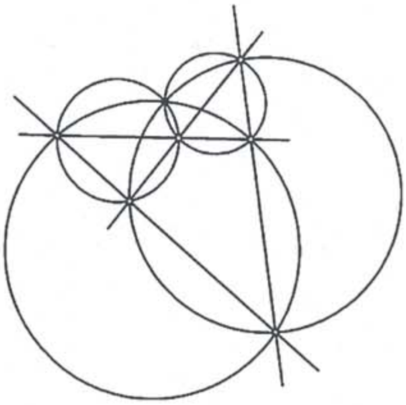
Miquel の定理という初等幾何の定理がある．同名の定理がいくつかあるが本稿において Miquel の定理と書くとき，次をさすこととする．

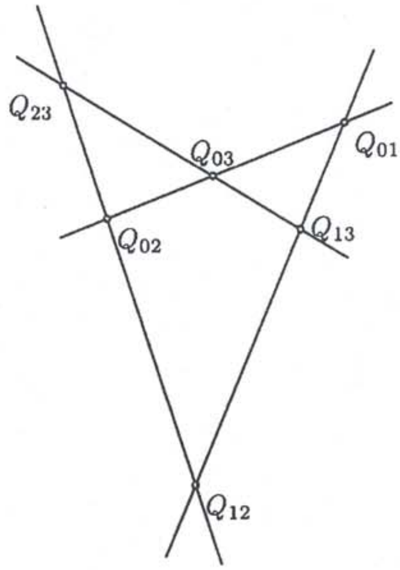
定理 1.1 (Miquel) 完全四辺形の 4 つの三角形の外接円は一点で交わる．その点を **Miquel 点**という．

定義 1.2 **完全四辺形**とはどの 2 直線も平行でなく，どの 3 直線も一点で交わらない 4 直線のことである．

Miquel の定理には，初等幾何において，次のような証明が広く知られている．

* 筑波大学附属駒場高校 2 年．





証明　直線を l_0, l_1, l_2, l_3 とし，$i < j$ に対し l_i と l_j の交点を Q_{ij} とする．$Q_{12}Q_{23}Q_{13}$ と $Q_{02}Q_{23}Q_{03}$ の外接円の交点を Q（Q_{23} と異なる）とおく．対称性から $Q_{01}Q_{13}Q_{03}$ の外接円上に Q があることを示せばよい．π を法とする角度計算をすると，

$$\begin{aligned}
\angle Q_{13}QQ_{03} &= \angle Q_{13}QQ_{23} + \angle Q_{23}QQ_{03} \\
&= \angle Q_{13}Q_{12}Q_{23} + \angle Q_{23}Q_{02}Q_{03} \\
&= \angle Q_{13}Q_{12}Q_{02} + \angle Q_{12}Q_{02}Q_{01} \\
&= \angle Q_{13}Q_{01}Q_{03}
\end{aligned}$$

となり，示された．■

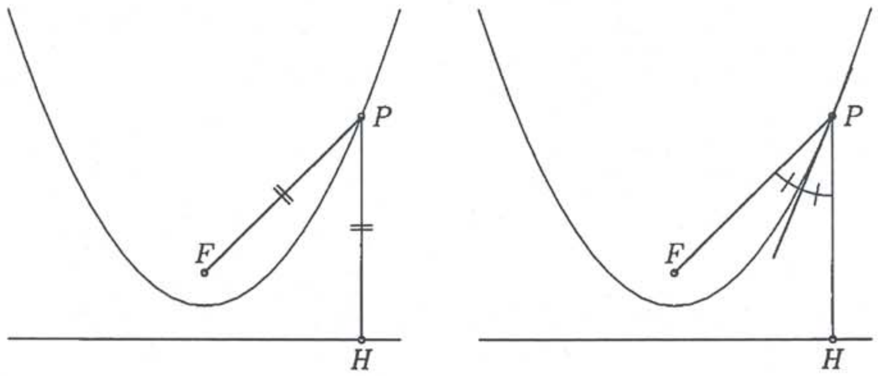
この証明では，はじめに対称性を崩しているが，それは角度計算をするためであるとかんがえられる．角度計算による証明は図を書かなくても機械的にできるという利点もあるが，対称性を保った証明をつけるためには使えないものだと考えられる．角度計算によらない方法として円錐曲線（二次曲線）を使うことを考えた．

2　Miquel の定理の放物線を使った証明

2.1　放物線の初等幾何的性質

次は放物線の定義である．この定義は初等幾何的に扱いやすい．

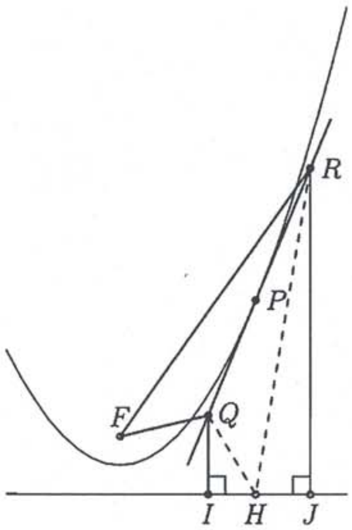
定義 2.1　直線とその上にない点が与えられたとき，点からの距離と直線からの距離が等しい点の軌跡を**放物線**という．このとき，その直線を**準線**，点を**焦点**という．また，焦点から準線におろした垂線が放物線と交わる点を**頂点**という．



命題 2.2 P を，焦点 F と準線 l から定まる放物線上の点とする．P から l におろした垂線の足を H とするとき，P における接線は $\angle FPH$ の二等分線である．

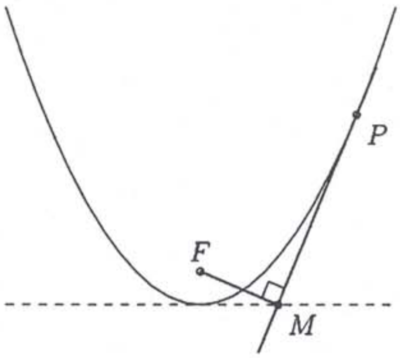
証明 $\angle FPH$ の二等分線上の P でない点が放物線上にないことを示す．

まず，図で左側の点 Q を考えると，$FQ = QH > QI$ となり放物線上にない．次に右側の点 R を考えても，$FR = RH > RJ$ となり放物線上にない． ■



FH の中点を取ることで次の系が得られる．

系 2.3 P を，焦点 F と準線 l から定まる放物線上の点とする．M を F から P における放物線の接線へおろした垂線の足とすると，M は頂点における放物線の接線上にある．



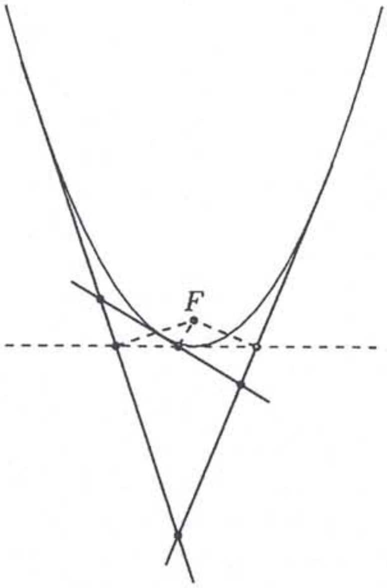
2.2 Miquel の定理の証明

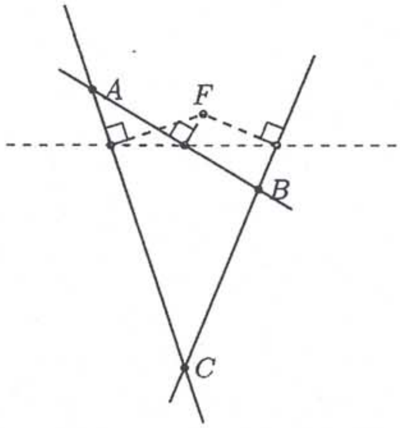
与えられた完全四辺形に放物線を関係させるために次の命題を使う．ここで放物線の別の特徴付けが役立つ．

命題 2.4 どの 2 直線も平行でなく，どの 3 直線も一点で交わらない 4 直線に対してその 4 直線すべてに接する放物線がただ 1 つ存在する．

証明 放物線とは無限遠直線と接する円錐曲線である．4 直線すべてに接する放物線とは無限遠直線と与えられた 4 直線の 5 直線に接する円錐曲線であり，5 直線は一般の位置にあるのでただ 1 つ存在する． ■

放物線の 3 接線を見ると次の定理が使えそうな状況にあることがわかる．



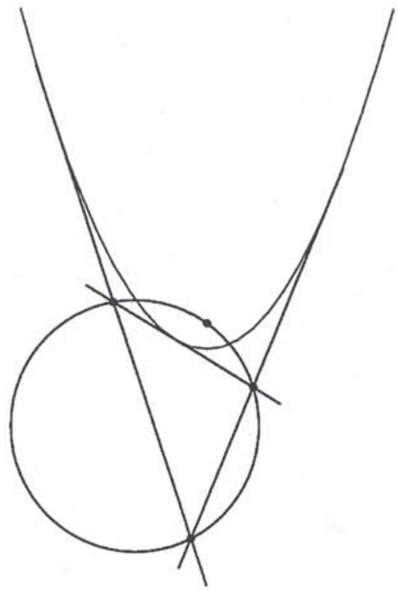


定理 2.5 (Simson) 三角形 ABC と辺上にない点 F に対して，F が三角形 ABC の外接円上

にあることと，F から直線 AB, BC, CA におろした垂線の足が共線であることは同値．その線を **Simson** 線という．

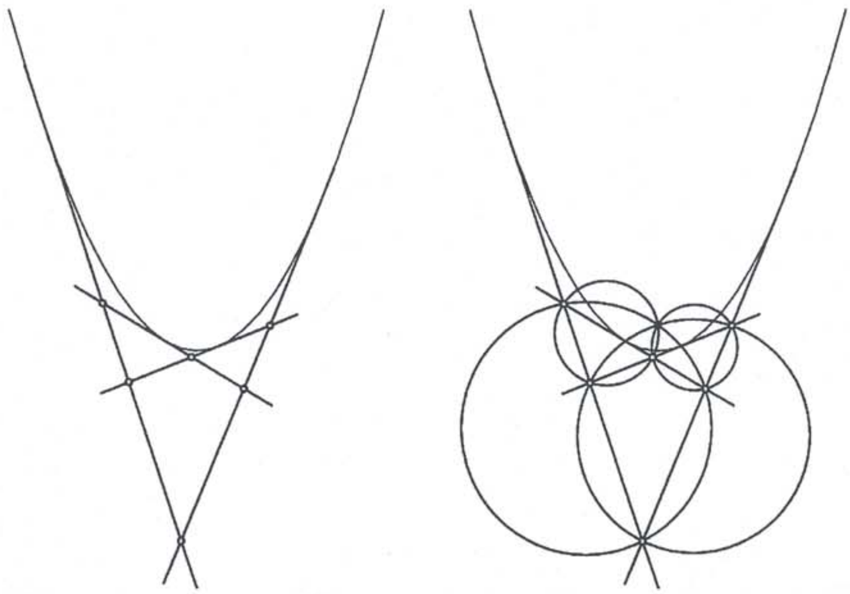
命題 2.6 焦点を F とする放物線と 3 点 A, B, C があり，AB, BC, CA は放物線に接しているとする．このとき A, B, C, F は共円である．

証明 系 2.3 と定理 2.5 から得る．この場合 Simson 線は放物線の頂点における接線である．■



この命題から Miquel の定理の証明が得られる．この証明は確かに対称性を崩していない．

証明 与えられた完全四辺形に対し命題 2.4 により定まる放物線をとる．4 接線のうちの各 3 接線に命題 2.6 を適用すると 4 つの外接円が放物線の焦点で交わることがわかる．■



3　放物線を使って示せる他の命題

Miquel の定理以外にも放物線を使って次の命題が証明できることがわかった.

命題 3.1　完全四辺形の 4 つの三角形の垂心は共線である.

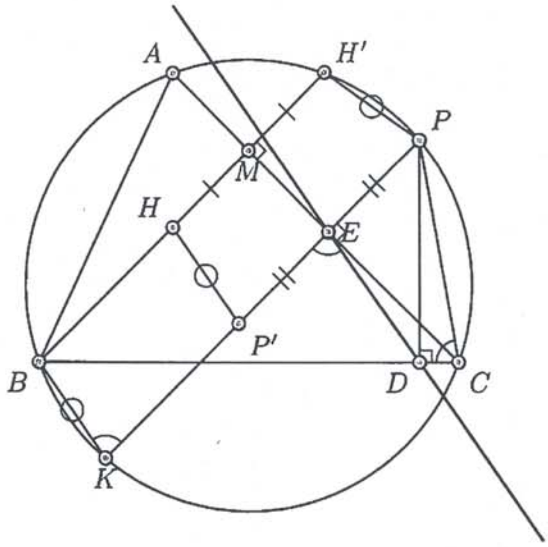
命題 3.2　完全四辺形の 6 交点について，同一直線上にない 2 点の組 3 つに対し中点を取ると共線である.

それぞれの証明を与える.

3.1　命題 3.1 の証明

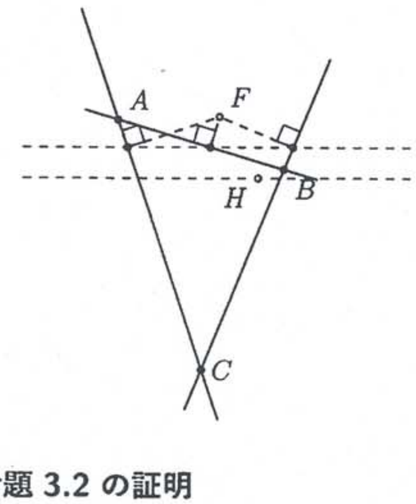
垂心と Simson 線に関して，次が成立する．証明は図からわかるだろう.

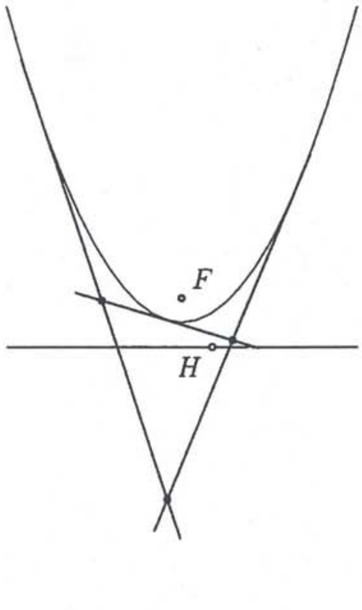
命題 3.3　m を三角形 ABC とその外接円上の点 F に関する Simson 線とし，F を中心に m を 2 倍相似拡大してできる直線を l とする．このとき，l は三角形 ABC の垂心 H を通る.



この命題を用いて命題 3.1 が証明できる．

証明　与えられた完全四辺形に対し命題 2.4 により定まる放物線をとる．4 接線のうちの各 3 接線のなす三角形に関して，命題 2.6 の証明と命題 3.3 から垂心が放物線の準線上にあることがわかる．■





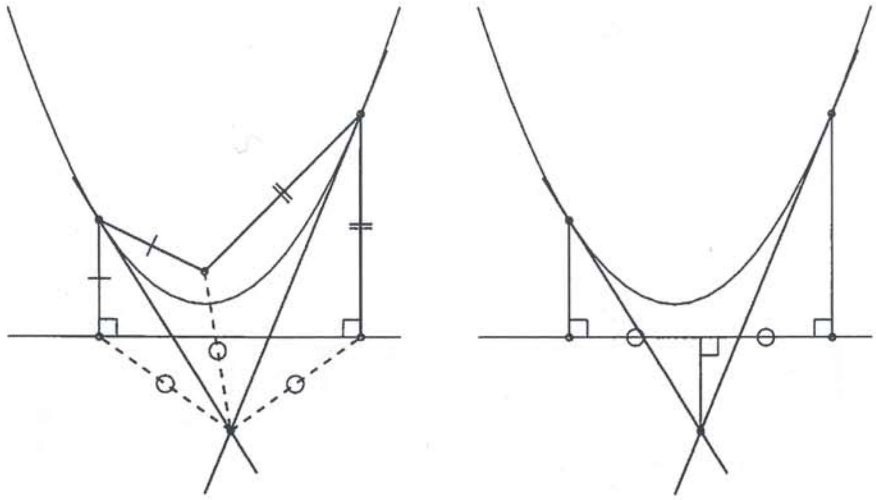
3.2　命題 3.2 の証明

放物線と中点に関する性質として次がわかった．

命題 3.4　P, Q を放物線上の点とし，l, m を P, Q における放物線の接線とする．l, m の交

点を X とすると，X の準線への射影（おろした垂線の足）は P, Q の準線への射影の中点である．

証明　図参照．命題 2.2 を用いると X が，P, Q の射影および焦点の 3 点を通る円の中心であることがわかる．■



これにより，命題 3.2 の証明が得られる．

証明　完全四辺形の 4 直線 l_0, l_1, l_2, l_3 に接する放物線を命題 2.4 により取り，各接点の準線への射影（の座標）を H_0, H_1, H_2, H_3 とする．このとき，命題 3.4 を用いると，l_0, l_1 の交点の準線への射影は $\frac{1}{2}(H_0 + H_1)$ であり，l_0, l_1 の交点と l_2, l_3 の交点の中点の準線への射影は $\frac{1}{4}(H_0 + H_1 + H_2 + H_3)$ である．これは対称なので示された．■

4　他の二次曲線を使って示せるか

ここまで見ると放物線がたまたま初等幾何的にいい性質を持っていて完全四辺形に関する命題を示せるように思える．他の二次曲線を用いることを考える．

4.1　直角双曲線を用いる

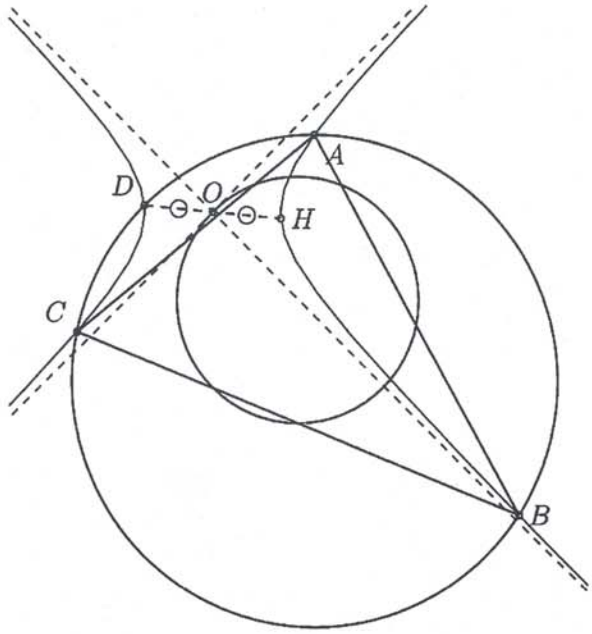
直角双曲線，つまり漸近線の直交する双曲線を使って次のような初等幾何の命題が示せる．

命題 4.1　完全四角形の 4 つの三角形の九点円は一点で交わる．

命題 4.2　完全四角形を考える．各頂点に対し，その頂点を含まない 3 直線に垂線をおろし，その足全てを通る円を考える．これによりできる 4 円は一点で交わる．

定義 4.3　完全四角形とはどの 3 点も一直線上にない 4 点のことである．

証明は載せないが次の図のようにする．Pascal の定理，および直角双曲線の別の特徴付けからわかる命題 2.4 のような命題を使う以外，完全に初等的に示せる．



4.2 一般の二次曲線を用いる

今までしたことを省察する．放物線・双曲線を用いて示せる命題は完全四辺形または完全四角形に関するものだった．また初等幾何の命題には三角形に関するものが多い．これには次の事実が関係していると思われる．

- 一般の円錐曲線は 5 つの点を決めると一意に定まる．
- 放物線や直角双曲線は 4 つの点を決めると一意に定まる．（離心率を固定しているためである．）
- 円は 3 つの点を決めると一意に定まる．

ここから，五角形に関する命題が示せそうであると考えられる．次の命題は証明を先に考えて後から主張を作ったものである．

命題 4.4 任意の凸五角形に対して，点の対 $\{P, Q\}$ で次をみたすものがただ一つ存在する：

五角形の各頂点 A に対して AP, AQ は直線として A の二等分線に関し対称である．

この命題の主張はあまり初等幾何らしくないと個人的に思った．円が出てこないためである．では円が現れるものはあるのかというと，五角形に関する命題において対称に外接円を取

ろうとすると，それだけで円が $\binom{5}{3} = 10$ 個出てくることになり，そのときは対称性を崩したほうが楽であり，あまり便利さがない．

とはいえ，便利さはなくてもそのような命題で示せるものがあってもよさそうではある．発見できなかった理由として，円，放物線，直角双曲線は全て相似になるが一般の二次曲線はそうならないため，ということを考えた．