竜王のニム:Wythoff Nim の変形

私立　関西学院高等部３年　　戸國 友貴

1. はじめに

1.1. 研究の動機と目的

私は関西学院高等部数理科学部に属しているが, このクラブでは近年, チョコレートゲームという組み合わせゲームを主に研究して国際学会の Proceeding[6], 情報処理学会の [5], IT 系の国際雑誌 [7] などで掲載されたが, 昨年は純粋数学で定評がある Integers 誌 [8] に掲載された.

今年になって, 組み合わせゲームに関する私達の経験と知識を用いて新しいテーマを探し, 有名な Wythoff のゲーム [1](別名 Corner the Queen) を元にして新しいゲームを作って研究することを思いついた.

Wythoff のゲームとは, ２人のプレーヤーが, 交互に２つ山から石を取る. １度に１つの山からならいくつでも取っても良く, 同時に２つの山から取る場合は同数を取らなければならない. 石の個数を０にした人が勝つ. 簡単なゲームのようであるが, 必勝手はかなり難しい計算になり, 黄金比なども関わってくるので興味を持っているアマチュアや数学者が多くいる.

Wythoff のゲームは Corner the Queen という名前でも知られている. それはチェス盤に１つの Queen を置き, チェス盤の１つのコーナーをゴールと決める. ２人のプレーヤーが, 交互に動かしていき, Queen をゴールに置いたプレイヤーが勝利者となる. ただし, ゴールから遠ざかるような動きは許されない. Queen は縦, 横, 斜にはいくつでも移動でき, 斜の移動は石とりゲームでは２つの山から同時に同じ個数取るのと数学的には同じであるから, 石とりゲームと考えても, Queen を動かす問題と考えても同じである.

Wythoff のゲームの研究は多くの数学者によって行われているが,　それらは後手必勝の状態である P-position のみを研究しており, Grundy 数については公式を作ることは難易度の高い未解決問題で, 多くの数学者は簡単な公式は存在しないと考えている. そこで私達は Queen の動きを変形することで, Grundy 数の研究ができないかと考えた.

Queen の代わりに何か良い駒がないかと考えて, 将棋の龍王 (成飛車) を使うことを思いついた. 将棋の龍王を使う理由は, まず将棋では動きに関しては最強の駒と言うべきなので, チェスの Queen を置き換えるには適していることと, 他のチェスの駒やインド将棋などに比べて, 日本の将棋の方が海外で知られていないので, 全く新しい研究になる可能性があるからである.

1.2. 研究の方法

組み合わせゲームに関しては, 既に Albert 氏達の本の翻訳 [2], 佐藤文広先生の [3], 一松信先生の [4] などがあるので, これらの本にある理論を使った. 特に Grundy 数に関しては, これらの本だけでなく, 私達のクラブが持っていて, これらの本に載っていないことも多くあるので研究には有利であった.

ある程度結果が出始めてからは, 積極的に [10] と [11] などの学会で発表して意見を聞くようにした. また, 全国から数理科学系の得意な高校生や大学生が集まり, トップレベルの研究者から指導を受ける大川セミナー [15] において, 参加者として研究発表の機会をもらうことができた. そのときいろんな意見を聞くことができてとても参考になった.

私の属する数理科学部の顧問である宮寺教諭は数学の研究者であるが, 先生がいつも言っておられるようにゲームのような具体性がある分野では, 専門の数学者よりも高校生の方が良いアイデアを出せることが多

いようだ．今回も研究の方向と法則の発見は私が行うことができた．しかし，その結果を厳密に証明するところでは博士号を持つ研究者である先生に助けてもらう必要があった．また研究にはプログラミングと数学論文ワープロの tex が必須であったが，優れたプログラマーである福井昌則さんにいろいろ教えてもらった．

研究には数式処理ソフト Mathematica を多用した．組み合わせゲームでは対戦の可能性を全て計算して，その中から法則性を見つけるので，計算機は必須の道具であり，中でも Mathematica はリスト処理において他の計算機言語に比べて優れており，組み合わせゲームに適している．組み合わせゲーム理論に Mathematica を使う方法に関しては，[12], [13], [14] で関西学院数理科学部が発表しており，私もその発表者であった．

1.3. 内容と考察

将棋の龍王 (成飛車) を使うと，Grundy 数を排他的論理和によって表せる式ができたので，組み合わせゲーム理論の専門家が出席する情報処理学会ゲーム情報研究会 [10] と [11] で，指導者の先生達と共に発表して，良い評価を取ることができた．

学会での評価が良かったことに勇気を得て，将棋の龍王を一般化した駒を考えて見た．すると Grundy 数の公式もうまく一般化することができた．これらのゲームの勝ち方はこの論文の最後にある注意 3.3 で書いた．

1.4. 今後の課題

組み合わせゲームにおいては，パスを一回許すとどうなるかという問題があり，3 つの山の石とりゲームのような簡単な問題であっても簡単な必勝法は見つかっていない．しかし私の属する数理科学部は新しいゲームを発見して，もうすぐ雑誌 Integers に [9] として掲載される．それは 3 つ山の石とりゲームと似ているが，必勝法の公式を持つ．

私は今回の竜王の問題もパス付きについて研究しており，これを完成させることは課題である．また，Integers 誌 [8] に掲載された研究と竜王の問題を結びつけることができ，Mathematica による計算では既に興味深い結果が出ている．この計算結果を数学的に証明することも課題である．

2. 龍王 Nim

$Z_{\geq 0}$ を非負整数の集合，N を自然数の集合とする．そして任意の x,y を $x \in Z_{\geq 0}$, $p \in N$, とし，$mod(x, p)$ を x を p で割った余りとする．

私たちは [1] にある Wythoff Nim の古典的ゲームの変形である龍王ニムというゲームをこの論文で紹介する．龍王ニムは Wythoff Nim で使われている Queen の代わりに，将棋の龍王を使ったものだ．龍王は飛車が成ったもので，動きは飛車と王の動きを合わせたものだ．つまり，龍王は縦一直線，横一直線と斜めひとマスに動かすことができる．龍王の駒は広さが決められていない盤上にあり，二人のプレイヤーが交互に動かしていくとする．盤上のマスそれぞれを二つの番号で座標をつける． 盤の左上端のマスを $(0, 0)$, (x, y) は右方向に増えて x 座標，下方向に増えて y 座標とする．(図 1)

定義 2.1. 龍王 Nim を定義する．竜王は普通左右，上下，斜に自由に動くことできるが，ここでは龍王が左方向と上方向か，または左上に一マスにしか行けないとする．(図 2). (こうしておかないと，行ったり来たりすることでゲームが永久に終わらない.) また，竜王を動かさないということは許されない (パスはない). $(0, 0)$ の所に持ってきたプレイヤーが勝ちとする．

龍王 Nim は定義 2.1 で定義される石でできた二つ山の Nim のゲームとして表現されることができる．だから，竜王を動かすゲームと考えても良いし，石とりゲームと考えてもよい．

定義 2.2. 2 つの石の山があり, 2 人のプレイヤーが 1 つの山からならいくらでも石をとれ, 2 つの山から同時に取るときは, それぞれから 1 つずつとれるゲームがある. そして石の個数を 0 にした方が勝つ.

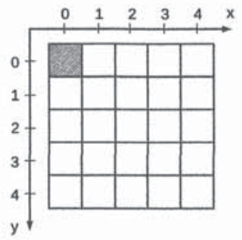

図 **1:** 座標の定義

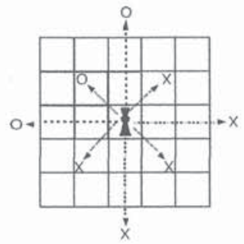

図 **2:** 龍王の動き

定義 2.3. 引き分けのないゲームであるから, すべてのマス (位置) は次のどちらかになる.
(a) $\mathcal{N}$-position とは, 先手のプレイヤーがそこから正しく動かせていけば, 勝つことができるマスとする. これは先手必勝ポジションと呼ばれることもある.
(b) $\mathcal{P}$-position とは, 後手のプレイヤー (先手の次のプレイヤー) がそこから正しく動かせていけば, 勝つことができるマスとする. 後手必勝ポジションと呼ばれることもある.

そして, ここでの研究には Grundy 数を使う. Grundy 数を定義するために, いくつかの定義をする.

定義 2.4. ゲーム G の中のマス (位置) を $\mathbf{p}$ として, $\mathbf{p}$ から一手でいける全ての位置の集合を $move(\mathbf{p})$ として表す.

定義 2.5. 竜王の動きである $move((x,y))$ を $1 \leq x+y$ を満たすような $x, y \in Z_{\geq 0}$ に対して決める.

$$M_1 = \{(u,y) : u < x\} \tag{1}$$

かつ (2)

$$M_2 = \{(x,v) : v < y\}, \tag{3}$$

と決める. ここで, $u, v \in Z_{\geq 0}$.

$$M_3 = \{(x-1, y-1)\}, \tag{4}$$

と決める. ただし $x, y \geq 1$. このとき (x,y) から動ける位置の集合を次のように決める.

$$move((x,y)) = M_1 \cup M_2 \cup M_3. \tag{5}$$

注意 2.1. 集合 (1) は左に動くことを表し, 集合 (3) は上に動くことを表している. 集合 (4) は左上の斜めに一つ動かすことを表す. 図 2 参照. もし $x=0$ のときだと M_1 は空集合, $y=0$ のときだと, M_2 は空集合であり, $x=0$ または $y=0$ のときだと M_3 は空集合である.

定義 2.6. (i) 非負整数の集合 S の (mex) とは S にない最小の非負整数のことである.
(ii) ゲーム G のそれぞれのマス (位置) $\mathbf{p}$ は Grundy 数をもち, それを $\mathcal{G}(\mathbf{p})$ と記す.
Grundy 数は $\mathcal{G}(\mathbf{p}) = mex\{\mathcal{G}(\mathbf{h}) : \mathbf{h} \in move(\mathbf{p})\}$ というように帰納的に計算される.

例 2.1. mex の計算の例 mex.

$$mex\{0,1,2,3\} = 4, mex\{1,1,2,3\} = 0,$$

$$mex\{0,2,3,5\} = 1 \text{ and } mex\{0,0,0,1\} = 2.$$

定理 2.1. $\mathcal{G}$ を *Grundy* 数とする. その時, マス *(位置)* $\mathbf{h}$ に対して次のことが成り立つ. $\mathcal{G}(\mathbf{h}) = 0$ のとき, そしてそのときだけ $\mathbf{h}$ は $\mathcal{P}$*-position (後手必勝ポジション)* である.

この定理の証明は [2] にある.

例 2.2. 表 1 は $0 \le x, y \le 12$ の龍王 Nim の Grundy 数 $\mathcal{G}((x,y))$ の表で, 表 2 は $0 \le x, y \le 12$ の $mod(x+y,3) + 3(\lfloor \frac{x}{3} \rfloor \oplus \lfloor \frac{y}{3} \rfloor)$ の表であり, $mod(x+y,3)$ は $x+y$ を 3 で割った余りである. 表 1 と表 2 は明らかに同じである. したがって以下を予想として挙げる.

予想 2.1. 龍王 Nim の Grundy 数は $\mathcal{G}((x,y)) = mod(x+y,3) + 3(\lfloor \frac{x}{3} \rfloor \oplus \lfloor \frac{y}{3} \rfloor)$ である.

予想 2.1 は定理 3.1 の $p = 3$ 時として証明されている.

y\x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	1	2	0	4	5	3	7	8	6	10	11	9	13
2	2	0	1	5	3	4	8	6	7	11	9	10	14
3	3	4	5	0	1	2	9	10	11	6	7	8	15
4	4	5	3	1	2	0	10	11	9	7	8	6	16
5	5	3	4	2	0	1	11	9	10	8	6	7	17
6	6	7	8	9	10	11	0	1	2	3	4	5	18
7	7	8	6	10	11	9	1	2	0	4	5	3	19
8	8	6	7	11	9	10	2	0	1	5	3	4	20
9	9	10	11	6	7	8	3	4	5	0	1	2	21
10	10	11	9	7	8	6	4	5	3	1	2	0	22
11	11	9	10	8	6	7	5	3	4	2	0	1	23
12	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	0

表 1: Grundy number

y\x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	1	2	0	4	5	3	7	8	6	10	11	9	13
2	2	0	1	5	3	4	8	6	7	11	9	10	14
3	3	4	5	0	1	2	9	10	11	6	7	8	15
4	4	5	3	1	2	0	10	11	9	7	8	6	16
5	5	3	4	2	0	1	11	9	10	8	6	7	17
6	6	7	8	9	10	11	0	1	2	3	4	5	18
7	7	8	6	10	11	9	1	2	0	4	5	3	19
8	8	6	7	11	9	10	2	0	1	5	3	4	20
9	9	10	11	6	7	8	3	4	5	0	1	2	21
10	10	11	9	7	8	6	4	5	3	1	2	0	22
11	11	9	10	8	6	7	5	3	4	2	0	1	23
12	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	0

表 2: $mod(x+y,3) + 3(\lfloor \frac{x}{3} \rfloor \oplus \lfloor \frac{y}{3} \rfloor)$

3. 龍王 Nim の一般化

次に, 龍王 Nim を一般化する. p を 1 つの自然数として固定する. 龍王 Nim で使われている龍王の代わりに, p についての一般化された龍王を使う. ゲーム中, p についての一般化された龍王は左と上と, 斜め方向は (x,y) から $(x-s, y-t)$ $(1 \le s \le x, 1 \le t \le y, s+t \le p-1,\ s,t \in Z_{\ge 0})$ の間にも動かすことができる. p についての一般化された龍王の *move* は定義 3.1 で数学的に決める.

定義 3.1. p についての一般化された龍王の $move((x,y))$ を $x, y \in Z_{\ge 0}$ で $x+y \ge 1$ に対して定義する.

$$M_{g1} = \{(u,y) : u < x\} \tag{1}$$

$$M_{g2} = \{(x,v) : v < y\}, \tag{2}$$

また, $x, y \ge 1$ のとき,

$$M_{g3} = \{(x-s, y-t) : 1 \le s \le x, 1 \le t \le y, s+t \le p-1 \text{ かつ } s,t \in Z_{\ge 0}\}, \tag{3}$$

$move((x,y)) = M_{g1} \cup M_{g2} \cup M_{g3}$.

注意 3.1. 集合 (1) は左に動くことを表し, 集合 (2) は上に動くことを表す. 集合 (3) は左上方向に動くことを表す. もし $x = 0$ のときだと M_{g1} は空集合,$y = 0$ のときだと M_{g2} は空集合であり, $x = 0$ または $y = 0$ のときだと M_{g3} は空集合である.

定義 3.2. 二人のプレイヤーが盤上の一般化された龍王を動かし, $(0,0)$ 所に持ってきたプレイヤーが勝ちとする.

定義 3.3. 二つ石の山があるとする．二人のプレーヤーは交互に片方か両方から石をとる．そしてプレイヤーはどちらか一方の山からはどれだけでも石をとることができ，プレイヤーは同時に片方の山から n 個，もう一つの山から m 個とることができ，ただし $n+m \leq p-1$ である．ここで p は固定された自然数である．

注意 3.2. 定義 3.2 と定義 3.3 は数学的に同じである．

例 3.1. 図 3 は龍王の動きを表している． 図 4 と図 5 は $p=4$ と $p=8$ の時の一般化された龍王の動きを表している．図 6 は p についての一般化された龍王の動きを表している．

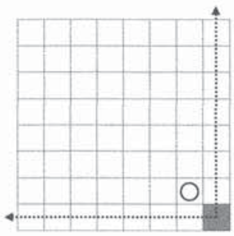

図 3: 龍王の動き

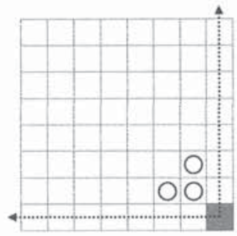

図 4: $p=4$ についての一般化龍王の動き

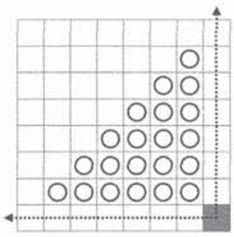

図 5: $p=8$ についての一般化龍王の動き

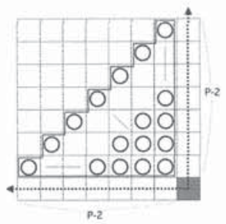

図 6: p についての一般化龍王の動き

例 3.2. 表 3 は $p=4$ についての一般化された龍王の Grundy 数の表である．表 4 は $\mathcal{G}((x,y)) = mod(x+y,4)+4(\lfloor \frac{x}{4} \rfloor \oplus \lfloor \frac{y}{4} \rfloor)$ の表である．

Y \ X	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	1	2	3	0	5	6	7	4	9	10	11	8	13
2	2	3	0	1	6	7	4	5	10	11	8	9	14
3	3	0	1	2	7	4	5	6	11	8	9	10	15
4	4	5	6	7	0	1	2	3	12	13	14	15	8
5	5	6	7	4	1	2	3	0	13	14	15	12	9
6	6	7	4	5	2	3	0	1	14	15	12	13	10
7	7	4	5	6	3	0	1	2	15	12	13	14	11
8	8	9	10	11	12	13	14	15	0	1	2	3	4
9	9	10	11	8	13	14	15	12	1	2	3	0	5
10	10	11	8	9	14	15	12	13	2	3	0	1	6
11	11	8	9	10	15	12	13	14	3	0	1	2	7
12	12	13	14	15	8	9	10	11	4	5	6	7	0

表 3: Grundy 数

Y \ X	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	1	2	3	0	5	6	7	4	9	10	11	8	13
2	2	3	0	1	6	7	4	5	10	11	8	9	14
3	3	0	1	2	7	4	5	6	11	8	9	10	15
4	4	5	6	7	0	1	2	3	12	13	14	15	8
5	5	6	7	4	1	2	3	0	13	14	15	12	9
6	6	7	4	5	2	3	0	1	14	15	12	13	10
7	7	4	5	6	3	0	1	2	15	12	13	14	11
8	8	9	10	11	12	13	14	15	0	1	2	3	4
9	9	10	11	8	13	14	15	12	1	2	3	0	5
10	10	11	8	9	14	15	12	13	2	3	0	1	6
11	11	8	9	10	15	12	13	14	3	0	1	2	7
12	12	13	14	15	8	9	10	11	4	5	6	7	0

表 4: $mod(x+y,4)+4(\lfloor \frac{x}{4} \rfloor \oplus \lfloor \frac{y}{4} \rfloor)$

図 3 と 図 4 は同じものである．よって $p=4$ についての一般化された龍王の Grundy 数は $\mathcal{G}((x,y)) = mod(x+y,4)+4(\lfloor \frac{x}{4} \rfloor \oplus \lfloor \frac{y}{4} \rfloor)$ だと予想する．一般に，予想 3.1 を提出する．

予想 3.1. p についての一般化された龍王 Nim の Grundy 数は $\mathcal{G}((x,y)) = mod(x+y,p)+p(\lfloor \frac{x}{p} \rfloor \oplus \lfloor \frac{y}{p} \rfloor)$

予想 3.1 を 定理 3.1 として証明するが，そのために幾つかの補題が必要である．

補題 3.1. $k, h \in Z_{\geq 0}$ とする．そのとき，

$$k \oplus h = mex(\{(k-t) \oplus h : t = 1, 2, ..., k\}$$
$$\cup \{k \oplus (h-t) : t = 1, 2, ..., h\}). \tag{4}$$

証明. この補題はニム *Nim* 和についての事実としてよく知られているので証明は省略する．例えば *[16]* の *Proposition 1.4. (p.181)* にある．

補題 3.2. $k, h \in Z_{\geq 0}$ で $A_{k,h} = \bigcup_{u=0}^{p-1}\{p((k-t) \oplus h) + u : t = 1, 2, ..., k\} \cup \bigcup_{u=0}^{p-1}\{p(k \oplus (h-t)) + u : t = 1, 2, ..., h\}$ とすると，以下のことが成り立つ．
(a) 任意の $v = 1, ..., p-1$ について

$$p(k \oplus h) + v = mex(A_{k,h} \cup \{p(k \oplus h) + w : w = 0, .., v-1\}). \tag{5}$$

(b) (a) の議論は $v = 0$ について使うことができて，$p(k \oplus h) = mex(A_{k,h})$ が得られる．

証明. (a) 補題 *3.1* と定義 *2.6* により，

$$k \oplus h \notin \{(k-t) \oplus h : t = 1, 2, ..., k\}$$
$$\cup \{k \oplus (h-t) : t = 1, 2, ..., h\}, \tag{6}$$

したがって，どの $v = 0, 1, ..., p-1$ についても，

$$p(k \oplus h) + v \notin \{p((k-t) \oplus h) + v : t = 1, 2, ..., k\}$$
$$\cup \{p(k \oplus (h-t)) + v : t = 1, 2, ..., h\}. \tag{7}$$

$u \neq v$ について $p(k \oplus h) + v \neq p((k-t) \oplus h) + u, p(k \oplus (h-t)) + u$ であるから，

$$p(k \oplus h) + v \notin A_{k,h}. \tag{8}$$

したがって，$p(k \oplus h) + v \notin A_{k,h} \cup \{p(k \oplus h) + w : w = 0, .., v-1\}$.
　s を任意の非負整数とし，

$$p(k \oplus h) + v > s \geq 0 \tag{9}$$

とする．
　$s \in A_{k,h} \cup \{p(k \oplus h) + w : w = 0, .., v-1\}$ を証明する．
もし $s \in \{p(k \oplus h) + w : w = 0, .., v-1\}$ とすると，

$$s \in A_{k,h} \cup \{p(k \oplus h) + w : w = 0, .., v-1\}. \tag{10}$$

$s \notin \{p(k \oplus h) + w : w = 0, .., v-1\}$ とする．そして，$s = pt + u$ かつ $0 \leq u \leq p-1$ の非負整数である t, u を選ぶ．すると明らかに，$k \oplus h > t \geq 0$，で，補題 *3.1* と定義 *2.6 (mex* の定義 *mex)* により，

$$t \in \{(k-t) \oplus h : t = 1, 2, ..., k\}$$
$$\cup \{k \oplus (h-t) : t = 1, 2, ..., h\}, \tag{11}$$

$$s = pt + u \in \{p((k-t) \oplus h) + u : t = 1, 2, ..., k\}$$
$$\cup \{p(k \oplus (h-1)) + u : t = 1, 2, ..., h\} \subset A_{k,h}. \tag{12}$$

である.

したがって *(8), (9), (10), (12)* と 定義 *2.6 (mex の定義 mex)* により, $p(k\oplus h)+v = mex(A_{k,h}\cup\{p(k\oplus h)+w : w=0,..,v-1\})$.

(b) *(a)* の議論は $v=0$ の場合も扱うことができ, したがって $p(k\oplus h) = mex(A_{k,h})$ である.

補題 3.3. $x,y,k\in Z_{\geq 0}$ とする. もし, $0\leq k < mod(x+y,p)$ であると,

$$k\in\{mod(x-s+y-t,p): 0\leq s\leq x, 0\leq t\leq y \ and\ 1\leq s+t\leq p-1\} \text{ である.} \tag{13}$$

証明. $0\leq k < mod(x+y,p)$ で $k\in Z_{\geq 0}$ とする. そして二つの場合を考える.

Case (a) はじめに, $x+y\leq p-1$ とする. . $0\leq k < mod(x+y,p) = x+y$ より, $k\in\{x+y-u : 1\leq u\leq x+y\} = \{mod(x+y-u,p) : 1\leq u\leq x+y\leq p-1\} = \{mod(x-s,y-t,p) : 0\leq s\leq x, 0\leq t\leq y$ かつ $1\leq s+t\leq p-1\}$ である.

Case (b) 次に $x+y>p-1$ とする. そのとき $q\leq p-1$ で $x+y=pw+q$ となる $q,w\in Z_{\geq 0}$ が存在する. そして $0\leq k < mod(x+y,p) = q$ である.

よって, $k\in\{q-u : 1\leq u\leq q\} = \{mod(x+y-u,p) : 1\leq u\leq q\} \subset \{mod(x+y-u,p) : 1\leq u\leq p-1\} \subset \{mod(x-s+y-t,p) : 0\leq s\leq x, 0\leq t\leq y \ and\ 1\leq s+t\leq p-1\}$ である.

補題 3.4. V を $Z_{\geq 0}$ の部分集合とし, $v\in Z_{\geq 0}$ で

$$v = mex(V) \text{ とする.} \tag{14}$$

もし, W が $V\subset W$ で $Z_{\geq 0}$ の部分集合で $v\notin W$ ならば, $v = mex(W)$.

証明. この補題は mex の定義 *(定義 2.6))* から示される.

補題 3.5. $k,h,v,w\in Z_{\geq 0}$ が $0\leq v,w\leq p-1$ であると,

$$\begin{aligned} C_{k,h,v,w} = &\{p(k\oplus h)+mod(v+w-t,p) : 1\leq t\leq v\},\\ &\cup\{p(k\oplus h)+mod(v+w-t,p) : 1\leq t =\leq w\},\\ &\cup\{p(\lfloor\frac{pk+v-s}{p}\rfloor\oplus\lfloor\frac{ph+w-t}{p}\rfloor)+mod(v+w-s-t,p) :\\ &1\leq s,t \ and\ s+t\leq p-1\} \end{aligned} \tag{15}$$

とする. そのとき, 以下の二つのことが成り立つ.

(a) $p(k\oplus h)+mod(v+w,p)\notin C_{k,h,v,w}$.

(b)

$$0\leq u < mod(v+w,p). \tag{16}$$

で, 任意の $u\in Z_{\geq 0}$ について $p(k\oplus h)+u\in C_{k,h,v,w}$.

証明. *(a)* $t\in Z_{\geq 0}$ で $1\leq t\leq v$ とする. そのとき, $t\leq v\leq p-1$ で, $mod(v+w,p)\neq mod(v+w-t,p)$ となる. $1\leq t\leq w$ を満たす任意の $t\in Z_{\geq 0}$ について同様に $mod(v+w,p)\neq mod(v+w-t,p)$ である. $1\leq s+t\leq p-1$ より, $mod(v+w,p)\neq mod(v+w-s-t,p)$ である. したがって $p(k\oplus h)+mod(v+w,p)\notin C_{k,h,v,w}$ となる.

(b) $0\leq u < mod(v+w,p)$ とする. そのとき, 補題 *3.3* より, $s\leq v, t\leq w$ かつ $1\leq s+t\leq p-1$ となるような $s,t\in Z_{\geq 0}$ があって, $u = mod(v-s+w-t,p)$ である. ここで *3* つの場合が考えられる.

Case (b.1) $s=0$ とすると, $p(k\oplus h)+u$.

$= p(k \oplus h) + mod(v + w - t, p) \in C_{k,h,v,w}$ である．

<u>*Case (b.2)*</u> $t = 0$ とすると，$p(k \oplus h) + u$

$= p(k \oplus h) + mod(v + w - s, p) \in C_{k,h,v,w}$ である．

<u>*Case (b.3)*</u> $1 \leq s, t$ とすると，$p(k \oplus h) + u = p(k \oplus h) + mod(v - s + w - t, p)$

$= p(\lfloor \frac{pk+v-s}{p} \rfloor \oplus \lfloor \frac{ph+w-t}{p} \rfloor) + mod(v - s + w - t, p) \in C_{k,h,v,w}$ である．

定理 3.1. p についての一般化された龍王の *Grundy* 数は

$$\mathcal{G}((x,y)) = mod(x+y,p) + p(\lfloor \frac{x}{p} \rfloor \oplus \lfloor \frac{y}{p} \rfloor) \tag{17}$$

である．ここで，$mod(x+y,p)$ とは $x+y$ を p で割った余りのことである．

証明. 数学的帰納法により証明する．$u < x$ または $v < y$ のとき (u, v) について，*(17)* が成り立つと仮定する． $(x, y) = (pk + v, ph + w)(0 \leq v \leq p-1\ ,\ 0 \leq w \leq p-1)$ とすると．

$$move((x,y))$$
$$= \{(pk + v - t, ph + w) : 1 \leq t \leq v\} \tag{18}$$
$$\cup \{(pk + v, ph + w - t) : 1 \leq t \leq w\} \tag{19}$$
$$\cup \{(pk - t, ph + w) : t = 1, 2, ..., pk\} \cup \{(pk + v, ph - t) : t = 1, 2, ...ph\}$$
$$\cup \{(pk + v - s, ph + w - t) : 1 \leq s, t \text{ and } s + t \leq p - 1\}.$$

である．もし，$v = 0$ のときは集合 *(18)* が空集合であり $w = 0$ のとき，集合 *(19)* は空集合である．

Grundy 数の定義により，

$$\mathcal{G}((x,y)) = mex(\{\mathcal{G}((pk + v - t, ph + w)) : 1 \leq t \leq v\} \tag{20}$$
$$\cup \{\mathcal{G}((pk + v, ph + w - t)) : 1 \leq t \leq w\} \tag{21}$$
$$\cup \{\mathcal{G}((pk - t, ph + w)) : t = 1, 2, ..., pk\} \tag{22}$$
$$\cup \{\mathcal{G}((pk + v, ph - t)) : t = 1, 2, ..., ph\} \tag{23}$$
$$\cup \{\mathcal{G}((pk + v - s, ph + w - t)) : 1 \leq s, t \text{ and } s + t \leq p - 1\}). \tag{24}$$

次に，*(22)* と *(23)* の *Grundy* 数の集合を考える． $\{mod(v,p), mod(v+1,p), ..., mod(v+p-1,p)\} = \{mod(w,p), mod(w+1,p), ..., mod(w+p-1,p)\} = \{0, 1, ..., p-1\}$ から，数学的帰納法の仮定により，

$$\{\mathcal{G}((pk - t, ph + w)) : t = 1, 2, ..., pk\} \cup \{\mathcal{G}((pk + v, ph - t)) : t = 1, 2, ..., ph\}$$
$$= \{mod(pk - t + ph + w, p) + p(\lfloor \frac{pk - t}{p} \rfloor \oplus \lfloor \frac{ph + w}{p} \rfloor) : t = 1, 2, ..., pk\}$$
$$\cup \{mod(pk + v + ph - t, p) + p(\lfloor \frac{pk + v}{p} \rfloor \oplus \lfloor \frac{ph - t}{p} \rfloor) : t = 1, 2, ..., ph\}$$
$$= \{p((k-1) \oplus h) + mod(w + p - 1, p), p((k-1) \oplus h) + mod(w + p - 2, p),$$
$$..., p((k-1) \oplus h) + mod(w, p), ..., p(0 \oplus h) + mod(w + p - 1, p),$$

$$p(0 \oplus h) + mod(w + p - 2, p), ..., p(0 \oplus h) + mod(w, p)\}$$
$$\cup \{p(k \oplus (h-1)) + mod(v + p - 1, p), p(k \oplus (h-1)) + mod(v + p - 2, p), ...$$
$$p(k \oplus (h-1)) + mod(v, p), ..., p(k \oplus 0) + mod(v + p - 1, p), p(k \oplus 0) +$$
$$mod(v + p - 2, p), ..., p(k \oplus 0) + mod(v, p)\}$$

$$= \bigcup_{u=0}^{p-1} \{p((k-t) \oplus h) + u : t = 1, 2, ..., k\}$$
$$\cup \bigcup_{u=0}^{p-1} \{p(k \oplus (h-t)) + u : t = 1, 2, ..., h\} = A_{k,h}. \tag{25}$$

ここで, $A_{k,h}$ は補題 *3.2* で定義されている集合である.

次に, *(20)* と *(21)* と *(24)* の *Grundy* 数の集合を考える. 数学的帰納法の仮定により,

$$\{\mathcal{G}((pk + v - t, ph + w)) : 1 \leq t \leq v\}$$
$$\cup \{\mathcal{G}((pk + v, ph + w - t)) : 1 \leq t \leq w\}$$
$$\cup \{\mathcal{G}((pk + v - 1, ph + w - 1))\}$$

$$= \{p(k \oplus h) + mod(v - t + w, p) : 1 \leq t \leq v\}$$
$$\cup \{p(k \oplus h) + mod(v + w - t, p) : 1 \leq t \leq w\}$$
$$\cup \{p(\lfloor \frac{pk + v - s}{p} \rfloor \oplus \lfloor \frac{ph + w - t}{p} \rfloor) + mod(v - s + w - t, p) :$$
$$1 \leq s, t \ and \ s + t \leq p - 1\} = C_{k,h,v,w}. \tag{26}$$

ただし, $C_{k,h,v,w}$ は補題 *3.5* で使われているものである. *(20), (21), (22), (23), (24), (25)* , *(26)* より,

$$\mathcal{G}((x, y)) = mex(A_{k,h} \cup C_{k,h,v,w}). \tag{27}$$

補題 *3.5* より,

$$C_{k,h,v,w} \supset \{p(k \oplus h) + u : 0 \leq u < mod(v + w, p)\}. \tag{28}$$

補題 *3.5* により, $p(k \oplus h) + mod(v + w, p) \notin C_{k,h,v,w}$, となり, 明らかに $p(k \oplus h) + mod(v + w, p) \notin A_{k,h}$. したがって

$$p(k \oplus h) + mod(v + w, p) \notin A_{k,h} \cup C_{k,h,v,w}. \tag{29}$$

補題 *3.2* より

$$p(k \oplus h) + mod(v + w, p) = mex(A_{k,h} \cup \{p(k \oplus h) + u : 0 \leq u < mod(v + w, p)\}). \tag{30}$$

$A_{k,h} \cup \{p(k \oplus h) + u : 0 \leq u < mod(v + w, p)\} \subset A_{k,h} \cup C_{k,h,v,w}$ から, *(27), (29), (30)* と補題 *3.4* より,

$$p(k \oplus h) + mod(v + w, p) = mex(A_{k,h} \cup \{p(k \oplus h) + u : 0 \leq u < mod(v + w, p)\})$$
$$= mex(A_{k,h} \cup C_{k,h,v,w}) = \mathcal{G}((x, y)).$$

注意 3.3. 定理 2.1 と定理 3.1 により, 位置 (x, y) は

$$\mathcal{G}((x, y)) = mod(x + y, p) + p(\lfloor \frac{x}{p} \rfloor \oplus \lfloor \frac{y}{p} \rfloor) = 0 \tag{31}$$

を満たすときに, p についての一般化された龍王の P-position(後手必勝ポジション) である. したがって, プレイヤーは自分の位置が (31) を満たしているときは, 相手がうまくすると, 勝つことはできない. プレー自分の位置が (31) を満たしていないときは, 先手必勝ポジションにいるので, (31) を満たしている位置へ移動することを毎回行えば勝てる.

参考文献

[1] W.A. Wythoff, A modification of the game of Nim, Nieuw Arch. Wiskd. 7 (1907), 199202.

[2] M. H. Albert 他 (川辺治之訳), 組み合わせゲーム入門 勝利の方程式 , 共立出版, 2011

[3] 佐藤文広, 石取りゲームの数学, ゲームと代数の不思議な関係, 数学書房,2014

[4] 一松信, 石とりゲームの数理 POD 版 (数学ライブラリー 教養篇),) 森北出版,2003

[5] 小笠航, 宮寺良平 他"Chocolate games that are variants of Nim" , 数理パズル特集号, 情報処理学会論文誌 53(6), 2012.

[6] M. Naito, T. Yamauchi, T. Inoue et al., "Discrete Mathematics and Computer Algebra System," Proceedings ASCM-MACIS, ,Kyushu University, 2009

[7] R. Miyadera, S. Nakamura, Y. Okada, T. Ishikawa, and R. Hanafusa, "Chocolate Games," The Mathematica Journal, 2013.

[8] M. Inoue, M. Fukui and R. Miyadera, IMPARTIAL CHOCOLATE BAR GAMES WITH A PASS, Integers to appear

[9] S. Nakamura and R. Miyadera, Impartial Chocolate Bar Games, Integers Volume 15, 2015.

[10] 福井昌則, 中屋 悠資, 戸國 友貴 他, A Generalized Ryuoh - Nim : A Variant of the classical game of Wythoff Nim, 情報処理学会ゲーム情報学研究会, 2016

[11] 宮寺良平, 福井昌則, 井上 理哲人, 中屋 悠資, 戸國 友貴「Corner the Queen problem の変種についての研究」第 35 回情報処理学会ゲーム情報学研究会, 2016

[12] 宮寺 良平, 福井 昌則, 戸國 友貴 他, 創造的な数学教育とプログラミング教育の実践, ゲーム学会第 13 回合同研究会, 2015.

[13] 宮寺 良平, 福井 昌則, 戸國 友貴 他, 数学的ゲームと教育, ゲーム学会「ゲームと教育」研究部会第 9 回研究会, 2015.

[14] 宮寺 良平, 福井 昌則, 戸國 友貴 他, 数式処理システム Mathematica を活用した数学的ゲームの研究, 日本数式処理学会 Mathematica 分科会教育分科会, 2016.

[15] 戸國 友貴による「竜王問題の研究」発表,「数理の翼」大川セミナー 2016

[16] A.N.Siegel, Combinatorial Game Theory (Graduate Studies in Mathematics), American Mathematical Society (2013).