計算ミスによって導かれた興味深い漸化式

横浜市立横浜サイエンスフロンティア高等学校
2年　池田　悠輝

私は計算ミスをした
これからそのことについて書いていく

私は迷路の研究をしている.その中である条件下での迷路の場合の数を求めていた際以下の漸化式を得た.

$$\begin{cases} a_1 = 1, a_2 = 4 \\ a_{n+1} = 4^n - \sum_{k=1}^{n-1} a_k a_{n-k} \quad (n \geqq 2) \end{cases}$$

実はこの式の一般項は実際の値と少々異なっていて、現在では正しい一般項も出ている.
それでもこの漸化式を取り上げたのは、見た目からは考えられない一般項の美しさにある.
それを私の思考手順に従って考えていく.

まずこの漸化式を観察してみる.
具体的に数値を代入することにより第5項目までを得た. 以下にそれを示す.

$$(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5) = (1, 4, 15, 56, 210)$$

実際に計算することでよりよくわかるが、この高校で習うようなものと違い、全ての項を使うことにより次の項を算出している. 言うなれば全項間漸化式のようなものである. しかも$a_k a_{n-k}$ なので項が増える度に違うペアとの積の和になる. しかもそれが4^nから引かれているので、非常に複雑なものとなっている.

しかし一つ重要な手がかりがあり、私はΣの部分の式に見覚えがあった.
それは一般にカタラン数と呼ばれ漸化式は以下の式で与えられる.

$$\begin{cases} b_0 = 1 \\ b_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} b_k b_{n-k} \end{cases}$$

またこれを計算することにより一般項を得られ、以下の式で表される.

$$b_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$$ ※ただし$\binom{n}{r}$は二項係数を表すもので$\binom{n}{r} = {}_nC_r$とする.

具体的には$(b_0, b_1, b_2, b_3, b_4, b_5) = (1, 1, 2, 5, 14, 42)$である.
見た通り非常に似た形をしている. 始めはこの漸化式を代入できるのではないかと考えたが、4^nから引かれているため値が複雑に変化し代入することは出来なかった. しかし、色々試していた中でとても興味深い関係を見つけた. 実はこの二つの数列の各項を足し合わせた数列$\{a_n + b_n\}(n \geqq 1)$は

$$\{a_n + b_n\} = 2, 6, 20, 70, 252, \ldots$$

と表せる. 一見どのような数列かわからないが私は偶然にもこの数列を知った

それは$\binom{2n}{n}$、即ちパスカルの三角形の中央列である. (次頁上図)

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
1 7 21 35 35 21 7 1
1 8 28 56 70 56 28 8 1
1 9 36 84 126 126 84 36 9 1
1 10 45 120 210 252 210 120 45 10 1

このことから$a_n = \binom{2n}{n} - b_n$予想できる．

b_nの一般項を代入し、計算すると$a_n = \binom{2n}{n+1}$

よって今回の漸化式の一般項は$\binom{2n}{n+1}$であると予想できた．

このことの衝撃がわかるだろうか．あれだけ複雑から得られる一般項がカタラン数と同じ二項係数という、非常に簡単な形で表すことができるのは、予想だにしなかった．視覚的にはパスカルの三角形の中央の両脇２列目がそれにあたる．（下図）

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
1 7 21 35 35 21 7 1
1 8 28 56 70 56 28 8 1
1 9 36 84 126 126 84 36 9 1
1 10 45 120 210 252 210 120 45 10 1

後はこれを証明するだけである．ここで実際に漸化式を足してみると

$$a_{n+1} + b_{n+1} = 4^n + \sum_{k=0}^{n}(b_k b_{n-k} - a_k a_{n-k}) + 2a_0 a_n = \binom{2n+2}{n+1}$$

が成り立つと予想される．

これを数学的帰納法を用いて証明しようと思う．しかし、二つの数列がペアとなる項を変えながら変化していくというのもあり、私の実力では証明することが出来なかった．

しかし予想段階ではあるが私的にこの一般項は非常に衝撃的な結果であり、とても希望の持てる結果となった．

ここまでカタラン数と深い関係があるのならば、今回の漸化式もカタラン数の場合と同じ方法で求められるのではないかと考えた．そのためにも一度軽く練習としてカタラン数の一般項を求めてみる．
※以下分母が 0 になるときなどの細かい検証を一部省略している．

補題：カタラン数の一般項を求める．
条件を確認する．

$$\begin{cases} b_0 = 1 \\ b_{n+1} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} b_k b_{n-k} \end{cases}$$

ここで$\mathcal{B}(x) \coloneqq \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$とする．
これは母関数と呼ばれ、その中でも最も一般的なものである．
今回はこれを用いる　具体的には母関数と数列を結びつけ、母関数の閉じた式で表し、n次の係数のみを取り出すことで一般項を求める．また細かい計算及び解説は省略する．

まず母関数の両辺を二乗する．

$$\begin{aligned} &\{\mathcal{B}(x)\}^2 \\ &= b_0 b_0 + (b_0 b_1 + b_1 b_0)x + (b_0 b_2 + b_1 b_1 + b_2 b_0)x^2 + \cdots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \left(\sum_{k=0}^{n} b_k b_{n-k} \right) x^n \right\} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} b_{n+1} x^n \end{aligned}$$

両辺にxをかけると

$$\begin{aligned} x\{\mathcal{B}(x)\}^2 &= \sum_{n+1=0+1}^{\infty} b_{n+1} x^{n+1} \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} b_m x^m \qquad ※n+1=m\text{とおく．} \\ &= \mathcal{B}(x) - \mathcal{B}(0) \end{aligned}$$

$$\therefore x\{\mathcal{B}(x)\}^2 - \mathcal{B}(x) + 1 = 0 \quad \because \mathcal{B}(0) = 1$$

これを解いて

$$\mathcal{B}(x) = \frac{1 \pm \sqrt{1-4x}}{2x}$$

ここで$x = 0$のとき$\mathcal{B}(0) = 1$を考慮すると分子が 0 でなければいけないので

$$\mathcal{B}(x) = \frac{1 - \sqrt{1-4x}}{2x}$$

これを母関数の閉じた式といい、ここからn次の係数を抽出する．

ここで$\sqrt{1-4x} = \mathcal{C}(x) \coloneqq \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$とする．

$$\mathcal{B}(x) = \frac{1 - \mathcal{C}(x)}{2x}$$

$$2x\sum_{n=0}^{\infty}b_n x^n = 1-\sum_{n=0}^{\infty}c_n x^n$$

$$2b_0x+2b_1x^2+2b_2x^3+\cdots=(1-c_0)-c_1x-c_2x^2-c_3x^3-\cdots$$

係数比較をすることにより

$$\begin{cases} c_0 = 1 \\ b_n = -\dfrac{1}{2}c_{n+1} \end{cases} \qquad \cdots(\mathrm{i})$$

これにより問題はc_nを求めることに帰着した.

ここで$C(x)=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}c_n x^n$においてマクローリン展開し、

$x=0$ を代入することで$c_n=\dfrac{C^{(n)}(0)}{n!}$を得る.　　$\cdots(\mathrm{ii})$

また$C(x)=\sqrt{1-4x}$を微分していくことにより

$$C^{(n+1)}(x)=-2\frac{(2n)!}{n!}(1-4x)^{-\frac{2n+1}{2}}$$

が成り立つと予想される. このことは数学的帰納法によって容易に証明される.

$x=0$のとき

$$C^{(n+1)}(0)=-2\frac{(2n)!}{n!} \quad \cdots(\mathrm{iii})$$

(ⅰ)(ⅱ)(ⅲ)より

$$b_n=\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$$

このようにしてカタラン数は求められる.

これをそのまま今回の漸化式に使用してみる. しかし私自身この方法を一般によく知られているもの以外使ったことがなく、ほぼ初の試みである.

条件を確認する.

$$\begin{cases} a_1 = 1, a_2 = 4 \\ a_{n+1} = 4^n - \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} a_k a_{n-k} \quad (n \geqq 2) \end{cases}$$

同様に$\mathcal{A}(x) \coloneqq \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$とおき計算する.

$$\{\mathcal{A}(x)\}^2=\sum_{n=0}^{\infty}\left\{\left(\sum_{k=0}^{n}a_k a_{n-k}\right)x^n\right\}$$

ここまでは順調に求められる.

しかし今回の漸化式の初項はｎ＝１であり第０項が定義されていないため第０項が残ってしまう.

なのでこれより第０項を決定する.

ここで使うのが先程予想されたカタラン数との関係式である.

先程の式に $\mathrm{n}=0$ を代入すると $0! \coloneqq 1$ を考慮し $a_0 = \binom{0}{0} - b_0 = 0$

となり第 0 項は 0 であると決定でき、これを用いることで今回の漸化式を以下のような形に変形できる.

$$\begin{cases} a_0 = 0 \\ a_{n+1} = 4^n - \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k a_{n-k} \end{cases}$$

$$\therefore \sum_{k=0}^{n} a_k a_{n-k} = 4^n - a_{n+1}$$

上記の式を代入し

$$\{\mathcal{A}(x)\}^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \{(4^n - a_{n+1})x^n\}$$

ここで $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} 4^n x^n$ は公比 $4x$ の無限等比級数の和とみなすことで $\dfrac{1}{1-4x}$ と計算できる.

$$\therefore \{\mathcal{A}(x)\}^2 = \frac{1}{1-4x} - \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1}x^n$$

$$x\{\mathcal{A}(x)\}^2 = \frac{x}{1-4x} - \sum_{n+1=1}^{\infty} a_{n+1}x^{n+1}$$

$m = n + 1$ とおきカタラン数同様に計算し

$$x\{\mathcal{A}(x)\}^2 = \frac{x}{1-4x} - \mathcal{A}(x)$$

$$\therefore \mathcal{A}(x) = \frac{-1 \pm \dfrac{2x-1}{\sqrt{1-4x}}}{2x}$$

カタラン数同様の検証をすることで $\mathcal{A}(x) = \dfrac{-1 - \dfrac{2x-1}{\sqrt{1-4x}}}{2x}$ を得る.

一見複雑な式であるが、この結果は非常に安心できた.
それは平方根の中身の式がカタラン数の母関数の閉じた式にもでてきたからである.

このことから $\mathcal{C}(x)$ の結果を引用でき、$\dfrac{1}{\mathcal{C}(x)} \coloneqq \mathcal{D}(x) \coloneqq \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} d_n x^n$ を用いて

$$\mathcal{A}(x) = \frac{-1 - (2x-1)\mathcal{D}(x)}{2x}$$

$$2x\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n + 1 = (1-2x)\sum_{n=0}^{\infty} d_n x^n$$

$$1 + 2a_0x + 2a_1x^2 + \cdots = d_0 + (d_0 - 2d_1)x + (d_1 - 2d_2)x^2 + \cdots$$

$$\therefore \begin{cases} d_0 = 1 \\ a_n = \dfrac{d_{n+1} - 2d_n}{2} \end{cases}$$

またカタラン数と同様に

$$d_n = \frac{\mathcal{D}^{(n)}(0)}{n!}$$

ここで$\mathcal{C}'(x) = -2(1-4x)^{-\frac{1}{2}}$であり、$\mathcal{D}(x) = (1-4x)^{-\frac{1}{2}}$なので

$$\mathcal{C}'(x) = -2\mathcal{D}(x)$$

$$\mathcal{D}^{(n)}(x) = -\frac{\mathcal{C}^{(n+1)}(x)}{2}$$

$$\therefore \mathcal{D}^{(n)}(0) = \frac{(2n)!}{n!}$$

これらを代入し計算すると

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{\binom{2n+2}{n+1} - 2\binom{2n}{n}}{2} \\ &= \frac{(n+1)(2n+1)! - (2n)!\,(n+1)^2}{\{(n+1)!\}^2} \\ &= \frac{(2n)!}{\{(n+1)!\}^2} \\ &= \binom{2n}{n+1} \end{aligned}$$

よって一般項は$\binom{2n}{n+1}$である.

これは予想の式と完全に一致する.
正直成功するか半信半疑で計算していたので、この式が出たときはとても嬉しかった.
最後の最後まで計算が正しいか確信が持てないので、確信が持てたときの喜びは本当に大きかった.

今回は完全に想定外の発見だったためこのような形でまとめた.
まさかちょっとした計算ミスがこのような美しい数学を見せてくれるとは思いにもよらなかった.
余談ではあるが計算ミスをしなかった場合の一般項、即ち本来導かれるはずであった一般項$\mathcal{W}_n$を以下に示す.

$$\mathcal{W}_n = \frac{\left(2+\sqrt{3}\right)^n - \left(2-\sqrt{3}\right)^n}{2\sqrt{3}}$$

見た通り簡単な３項間漸化式を解くことによって導かれる形の式である.
しかしながら私は何故計算ミスに中々気づかなかったのか.
それを調べるため、試しに今回の数列と本来の数列の各項の差を計算してみた.
以下に第５項までの誤差を示す.

n	0	1	2	3	4	5
誤差	0	0	0	0	0	1

見た通り第４項まで完全に一致していた.
私は第５項までは数え上げていなかったため、この間違いに気づかなかった.
しかしもっとｎを大きくしてみると

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
誤差	0	0	0	0	0	1	12	92	576	3213	16644

となり途中までいいオーダーであったのに一気に差が開いてしまった.
数列をいくつか書き出しただけで一般項を確定できない理由がよくわかった.

今回の発見で私は漸化式と母関数の閉じた式に非常に興味を持った.
例えばカタラン数の漸化式は示したもの以外に

$$b_{n+1} = \frac{2(2n+1)}{n+2} b_n$$

という表し方があり、複数の漸化式で表せることに驚き、今回の漸化式もこのように簡単な形にならないのかと思った.
また未解決なこととして、最初に断念した二つの数列を足し合わせたものの証明もある.
また需要があるかわからないが個人的に気になったこととして、パスカルの三角形の各列の母関数の閉じた式に何かしらの関係性がないかが気になった.
今回わかったのは中央列とその両脇２列目である.
これらには明らかに$\sqrt{1-4x}$が関係してそうである.
また母関数だけでなく、その漸化式にもなにかしら特徴がないかが疑問に思った.
これは母関数と数列の練習問題を作るときくらいしか需要がなさそうだが、楽しそうなので今後も研究をしてみようと思う.

参考文献：

結城浩(2007)『数学ガール』ソフトバンククリエイティブ株式会社

カタラン数 Wikipedia
https://ja.wikipedia.org/wiki/%E3%82%AB%E3%82%BF%E3%83%A9%E3%83%B3%E6%95%B0