NO. 表題

DATE . .

無限等比級数（数学Ⅲ）を
小学校の算数で解く

〜$\frac{2}{3}+\frac{4}{9}+\frac{8}{27}+\frac{16}{81}+\frac{32}{243}+\cdots\cdots=?$〜

1年A組16番
深澤 亮

[研究テーマについての説明]

『無限級数』というと、数学Ⅲの「数列と極限」で履修する事項である。
この単元に登場してくる公式は、極限に関する適切な理解や、微積分の公式の利用など、高度な数学的知識を必要とする。
しかし、「使う知識が数学ⅡB以上のものである」からといって、そこへの理解を遠ざけたくないと思い、今回探究してみることにした。
今回の探究活動においては、『小学校の算数でわかる範囲で』という制約を設けて、無限級数の公式を証明してみることとする。
ただし、「小学校の算数でわかる範囲」には、中学受験塾で扱うような内容も含めることとする。

→ 速さの問題を解くときにグラフに描いて相似を利用するなどといったことは、使ってよい。

[研究の動機や目的]

中学校3年生の後期期末考査の答案返却及び解説時に、数学科担当の先生が「$\frac{2}{3} + \frac{4}{9} + \frac{8}{27} + \frac{16}{81} + \cdots\cdots +$ と、$\frac{2}{3}$の累乗をずっと足し合わせていくとある一定の値に収束するけれど、なぜだと思いますか?」と私たち生徒に問いかけた。
このとき、値が「2」になることについて説明を受けた。
そして、理由として、「足す数がだんだん小さくなるからこれ以上足せなくなるようなときが来る」という説明をされた。

この設問に対する明確な結論が出せないだろうかと思い、さらに、こういった式の一般化を小学校の算数で説明することができればいいと考えた。

算数の単元のみで説明を行うことの目的

→ 今後、ハイレベルな数学を扱っていくときに登場する様々な公式を理解しやすくするため。

※ 微積分などで極限を説明するのがわりと一般的であるが、それだけだと、印象に残りにくくて、公式を忘れてしまう。

〔研究の方法や内容〕

「無限級数」の中でも、比較的扱いやすいとされている「無限等比級数の和」について考えることとする。

→「等比数列の項をずっと足していったらどうなるのか」について.

(STEP 1) $\frac{2}{3}+\frac{4}{9}+\frac{8}{27}+\frac{16}{81}+\cdots\cdots+\left(\frac{2}{3}\right)^n$ の値を手作業で求める。

(STEP 2) $\frac{2}{3}+\frac{4}{9}+\frac{8}{27}+\frac{16}{81}+\cdots\cdots+\left(\frac{2}{3}\right)^n$ を、算数的に求める.

(STEP 3) $\frac{b}{a}+\frac{b^2}{a^2}+\frac{b^3}{a^3}+\frac{b^4}{a^4}+\cdots\cdots+\left(\frac{b}{a}\right)^n$ を算数的に求め、証明する.

(STEP 4) STEP3で出したことが利用できない場合はあるのか考え、ある場合は、なぜ使えないのかを考察する。

(STEP 5) 無限級数に関する公式(数学Ⅲ)と照らし合わせる.

〔研究の結果と考察〕

(STEP 1) $\frac{2}{3}+\frac{4}{9}+\frac{8}{27}+\frac{16}{81}+\cdots\cdots+\left(\frac{2}{3}\right)^n$ の値を手作業で求める.

まず、この問題を直接的に解くことはできない。

なぜならば、① いくつまで足していいのかが定まっていないから

② ①によって通分ができないから.

そのため、まずは、だいたいの値を求めることにする。

$\frac{2}{3} \fallingdotseq 0.666$

$\frac{2}{3}+\frac{4}{9}=\frac{10}{9} \fallingdotseq 1.111$

$\frac{2}{3}+\frac{4}{9}+\frac{8}{27}=\frac{38}{27} \fallingdotseq 1.407$

$\frac{2}{3}+\frac{4}{9}+\frac{8}{27}+\frac{16}{81}=\frac{130}{81} \fallingdotseq 1.604$

$\frac{2}{3}+\frac{4}{9}+\frac{8}{27}+\frac{16}{81}+\frac{32}{243}=\frac{422}{243} \fallingdotseq 1.786$

$\frac{2}{3}+\frac{4}{9}+\frac{8}{27}+\frac{16}{81}+\frac{32}{243}+\frac{64}{729}=\frac{1330}{729} \fallingdotseq 1.824$

$\frac{2}{3}+\frac{4}{9}+\frac{8}{27}+\frac{16}{81}+\frac{32}{243}+\frac{64}{729}+\frac{128}{2187}=\frac{4118}{2187} \fallingdotseq 1.882$

KOKUYO

このように、手作業で総和を求めていくと、値がどんどん増えていくが、足せば足すほど、「値の増え方」が小さくなっていることが分かる。

※ 値の増え方…次々と足していく $\frac{2}{3}$ の累乗の値に等しい。

∵ $\frac{2}{3}<1$ なので、累乗の値は指数が大きくなるほど小さくなる。

この作業を、さらに増やしていくと、下に示した表のようになる。

【$\frac{2}{3}$ の n 乗まで足していったときの式の値の関係】

n	1	2	3	4	5	6	7	8
値	0.666	1.111	1.407	1.604	1.736	1.824	1.882	1.922

n	9	10	11	12	13	14	15	16
値	1.948	1.965	1.977	1.985	1.990	1.993	1.995	1.997

（値は小数第3位まで）

この表から、$\frac{2}{3}$ の累乗をたくさん足していくと、「2」に近づくと考えられる。しかし、「だいたい2」であることは分かったが、「ちょうど2」であるのかどうかは、ここまでの段階では分からない。

なぜならば、式の途中（ここでは $\frac{2}{3}$ の16乗）までしかたしていないからである。

そこで、この式の値が「2」になることを、難しい数学を用いないで説明してみることにする。

（STEP 1で分かったこと）

$\frac{2}{3}+\frac{4}{9}+\frac{8}{27}+\frac{16}{81}+\cdots\cdots+\left(\frac{2}{3}\right)^n$ を計算していくと、2に近い値になる。

（STEP 2）

$\frac{2}{3}+\frac{4}{9}+\frac{8}{27}+\frac{16}{81}+\cdots\cdots+\left(\frac{2}{3}\right)^n$ を算数的に求める。

「算数的に」といっても「計算する」ということではなく、「小学生が理解できる概念にたとえて、置きかえて考える」ということである。

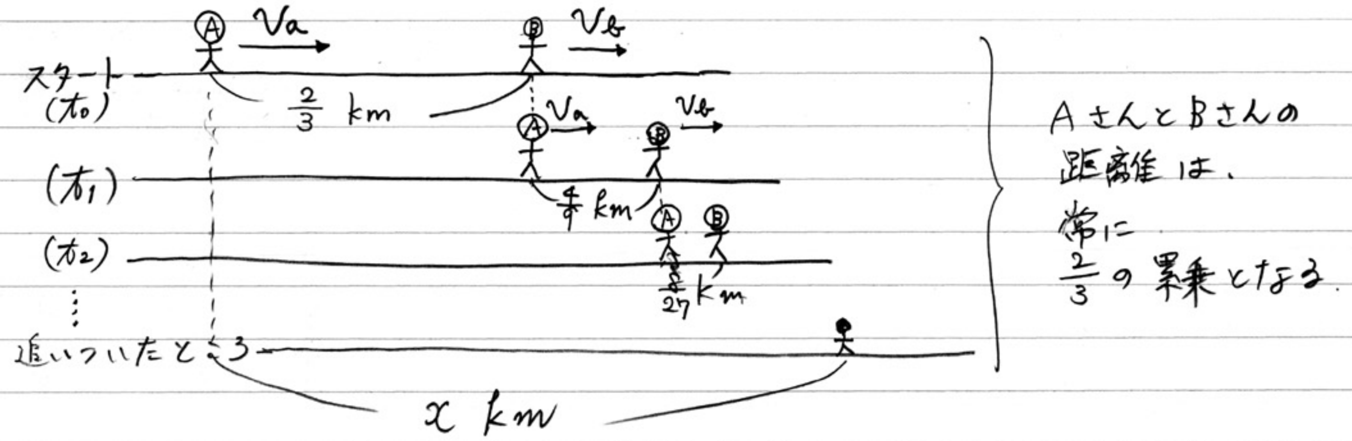
そこで、「速さ」の単元で置き換えて考えることにする。

※速さの文章題をダイヤグラフにして比を用いるのは、中学入試塾にて小学5年の後期に習うとされている。

⟹ 置き換えた後の問題設定。

『Aさんと Bさんは今 $\frac{2}{3}$ km 離れています。2人が同じ方向に進み、それぞれ一定の速度(A > B)で歩くことを考えます。2人が歩き出しました。Aさんが、Bさんのスタート地点に到達したとき、2人は $\frac{4}{9}$ km 離れていました。このとき、Aさんが Bさんに追いつくまでに Aさんは何 km 歩くことになりますか。』

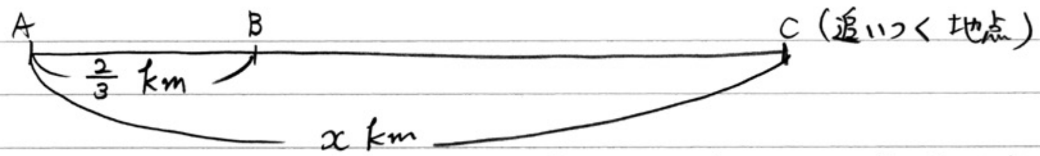
このような問題になり、図は下のようになる。



(解) t_0 から t_1 までの時間は A, B ともに共通なので、速度比 = 距離比。

$t_0 \longrightarrow t_1$ において、Aさんは $\frac{2}{3}$ km、Bさんは $\frac{4}{9}$ km 歩いたので、

速度比 ⇒ $A : B = \frac{2}{3} : \frac{4}{9} = 3 : 2$ となる。



Aさんは AC 間、Bさんは BC 間をそれぞれ同じ時間で歩いているので

$AC : BC = 3 : 2$ であることがわかる。

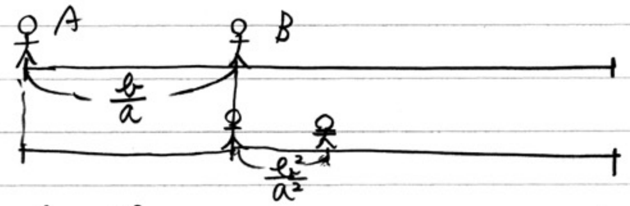
よって $AC = \frac{2}{3} \times \frac{3}{3-2} = 2$ 　つまり、2km 進んだ

(STEP 2 で分かったこと)

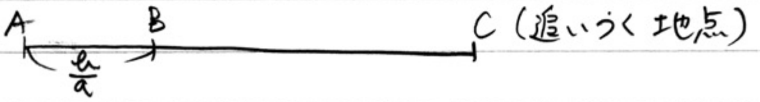
$\frac{2}{3} + \frac{4}{9} + \frac{8}{27} + \frac{16}{81} + \cdots\cdots + \left(\frac{2}{3}\right)^n = 2$ としてよい。

(STEP 3) $\frac{b}{a}+\frac{b^2}{a^2}+\frac{b^3}{a^3}+\cdots+\left(\frac{b}{a}\right)^n$ を求める。

まずは具体的な値でやったときと同様、速さの問題として処理してみる。



$\frac{b}{a}:\frac{b^2}{a^2}=a:b$ より、AとBの速度の比は $a:b$



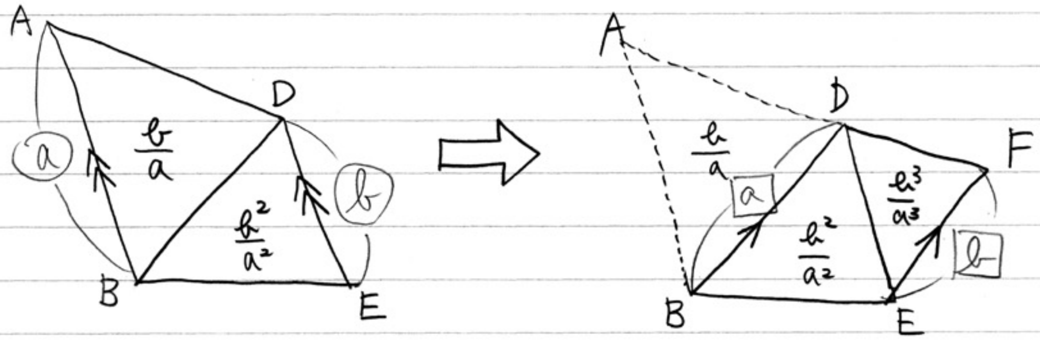
$AC:BC=a:b$ であるから、$AB:AC=a-b:b$

よって、求める AC は $a-b:b=\frac{b}{a}:x$ として

$$x=\frac{b}{a-b}$$

$\frac{b}{a}$ の累乗をすべてたしていくと、$\frac{b}{a-b}$ になることが予想される。

⇨ これを別の方法で「証明」することにする。
図形の証明の問題に置きかえていく。



面積 $\frac{b}{a}$ と面積 $\frac{b^2}{a^2}$ の三角形を AB // DE となるように並べる。
高さは等しいので面積比＝底辺比。つまり $\frac{b}{a}:\frac{b^2}{a^2}=a:b$

面積 $\frac{b^2}{a^2}$ と面積 $\frac{b^3}{a^3}$ の三角形を BD // EF となるように並べる。
$BD:EF=\triangle BDE:EFD=\frac{b^2}{a^2}:\frac{b^3}{a^3}=a:b$

⇨ ここまでで分かったこと、

$$\begin{cases} AB:DE=a:b \\ BD:EF=a:b \end{cases}$$

ここで、3点A・D・Fが一直線上にあることを示す。

△ABDと△DEFにおいて、

$AB /\!/ DE$, $BD /\!/ EF$ より、$\angle ABD = \angle DEF$ —— ①

$BD : EF = AB : DE = a : b$ —— ②

①, ②より、2辺の比と間の角が等しいので、$\triangle ABD \sim \triangle DEF$ —— ③

また、$DE /\!/ EF$ より、$\angle BDE = \angle FED$ (錯角) —— ④

③より、$\angle ADB = \angle DFE$ —— ⑤

また、$\angle EDF = \angle EDF$ —— ⑥ (共通角)

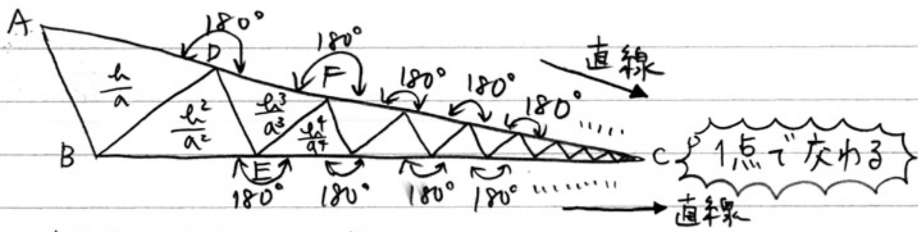
④〜⑥をたすと、$\angle BDE + \angle ADB + \angle EDF = \angle FED + \angle DFE + \angle EDF$

$\angle ADF = 180°$ (三角形の内角の和)

よって、A・D・Fは一直線上に存在する。

同様にして、他の角も180°となり、AD∦BEは明らかであるから、

直線ADとBEは一点で交わることが言える。(ADとBEの交点をCとする)



この図の△ABCと△DECにおいて

$AB /\!/ DE$ であるから、

$\angle BAC = \angle EDC$, $\angle ABC = \angle DEC$ —— ⑦ (同位角)

⑦より、三角形の2角が等しいから、$\triangle ABC \sim \triangle DEC$ …… (*)

また、$AB : DE = a : b$ であるから、

△ABCと△DECの相似比は $a : b$ である。

相似な図形の面積比は相似比の2乗だから $\triangle ABC : \triangle DEC = a^2 : b^2$

よって、$\triangle ABC : \square ABED = a : (a^2 - b^2)$

「△ABCの面積 = $\frac{b}{a}$ の累乗の総和」であるから、△ABCの面積をxとすると

$$x : \left(\frac{b}{a} + \frac{b^2}{a^2}\right) = a^2 : (a^2 - b^2)$$

$$x(a^2 - b^2) = a^2\left(\frac{ab}{a^2} + \frac{b^2}{a^2}\right)$$

$$x = \frac{ab + b^2}{a^2 - b^2}$$

$$x = \frac{b}{a - b}$$ (証明終)

(STEP3でわかったこと)

$\frac{b}{a}$ の累乗の総和は $\frac{b}{a-b}$ である。

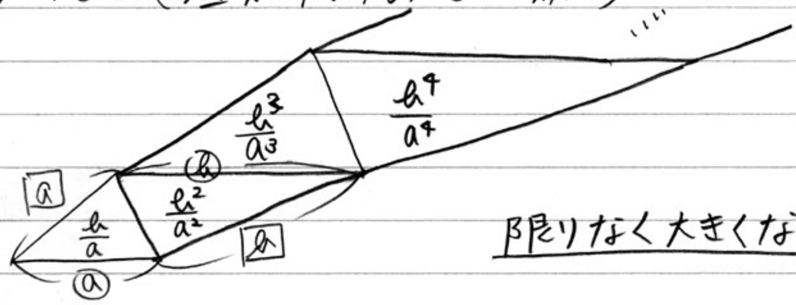
(STEP 4) $\left(\frac{b}{a}\right)^n$ の和が $\frac{b}{a-b}$ でない場合は存在するか。

a と b の大小関係、すなわち、底が 1 より大きいか小さいかが関係していると考えられる。

(i) $a < b$ のとき $\frac{b}{a} > 1$
(ii) $a = b$ のとき $\frac{b}{a} = 1$
(iii) $a > b$ のとき $\frac{b}{a} < 1$

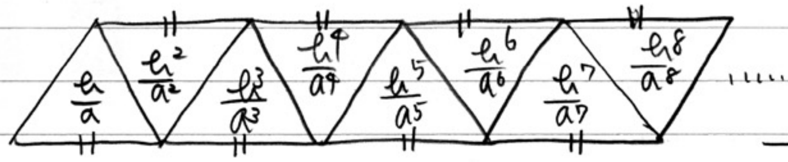
のすべての場合において、(STEP 3 で導いた公式を)使えるかどうか確かめる。

(i) $a < b$ のとき.(底が 1 よりも大きい場合)



限りなく大きくなっていく。

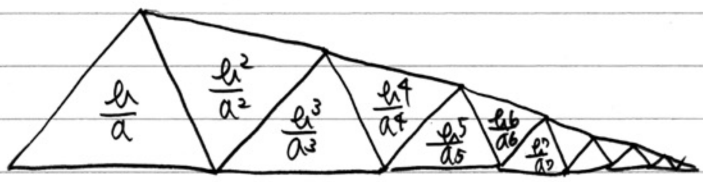
(ii) $a = b$ のとき(底が 1 のとき)



……

限りなく大きくなっていく.

(iii) $a > b$ のとき(底が 1 よりも小さい場合)



$\frac{b}{a-b}$
$\Uparrow$
一定の値に収束する

(STEP 4 からわかったこと)

「$\left(\frac{b}{a}\right)^n$ の和が $\frac{b}{a-b}$ となる」という公式は

$\frac{b}{a} < 1$ のとき(すなわち $a > b$ のとき)のみ使える。

※ $\frac{b}{a} \geqq 1$ ($\Leftrightarrow a \leqq b$) のときは、値が無限大に発散する.

(STEP5) 無限級数に関する公式(数学Ⅲ)と照らし合わせる。

《数学Ⅲで学習する事項》

無限等比級数 $a+ar+ar^2+\cdots$ は

$-1<r<1$ のとき収束し、その値は $\dfrac{a}{1-r}$

$r \leqq -1$, $1 \leqq r$ のときに発散する。 ただし、$a \neq 0$ とする。

これと、$\left(\dfrac{b}{a}\right)^n$ の総和 $= \dfrac{b}{a-b}$ を照らし合わせてみる.

(公式) $a + ar + ar^2 + ar^3 \cdots = \dfrac{a}{1-r}$

(導出) $+ 1\cdot\frac{2}{3} + 1\cdot\frac{4}{9} + 1\cdot\frac{8}{27} \cdots = \dfrac{1}{1-\frac{2}{3}} - 1 = 2$

～公式と導出した式の相違点について～

(1) 公式の変域は $-1<r<1$ であるが、今回導出した式においては1未満とした。(面積・速さの問題にしたので負の数を考えていなかった)

(2) 公式 $a+ar+ar^2+\cdots$ における「a」の項を、今回考えた式では入れていなかった。また、$a=1$ に制限していた。

※ $r+r^2+r^3+r^4+\cdots$ $(r<1)$ を考えたことになる。

～なぜこのような導出になったのか～

「小学校の算数の知識で」という制約を設けたので、数として考えて良い範囲が「0と正の数で有理数」としていた。
(自然と「実体の伴うモノ」に置き換えてしまっていた。)

〔研究してみての感想と今後の課題〕

$\frac{2}{3}+\frac{4}{9}+\frac{8}{27}+\frac{16}{81}+\cdots\cdots+\left(\frac{2}{3}\right)^n$ というように、今回、$\frac{2}{3}$の累乗を次々とたしていくとどんな値になるのかについて考えたが、それから発展させた式 $\left(\frac{b}{a}\right)^n$の和 $=\frac{b}{a-b}$ というのはあまりにも範囲が狭すぎたものであったことに気がついた。

実際の公式で $a+ar+ar^2+\cdots$ となっているが、そもそも $a=1$ を前提としていたことと rが負のときを考慮していなかったこと。そして、初項のa（すなわち、今回でいえば1）を足さない式で考えたという点、について、範囲を狭めてしまった。

今後の課題

① $a+ar+ar^2+ar^3+\cdots\cdots+ar^n=\frac{a}{1-r}$ $(-1<r<1)$
　を、「そのままの式の形で」算数的に解く方法を見つける。

② 無限等比級数だけに限定せず、無限級数全般についていえるような考えを算数的な解法で導く。

〔参考文献〕

吉田信夫（2011）『ガウスとオイラーの整数論～中学入試算数が語るもの』（技術評論社）

佐藤敏明（2010）『図解雑学　指数・対数』（ナツメ社）

KOKUYO