

折り紙で新しいくす玉を作る

～多面体との関係性～

埼玉大学教育学部附属中学校 二年 C 組 宝珠山 理歩



1. 動機

折り紙を折ることが好きな私は、小さいころからいろいろ折ってきた。今はユニット折り紙、特にくす玉を作ることに夢中になっている。私がよく作るくす玉は大きさ、形、全て同じユニット（折り紙一枚から作られたパーツ）を何枚も用いる。それらを組み合わせ、1つの立体にしたものだ。

ただの折り紙が、組み合わせるだけできれいな球体になるのが楽しいので、たくさん作ってきた。しかし、実際なぜこんなふうに組み上がるのか、わからないでやっていた。くす玉の理屈を調べてみることで、仕組みを知り、新しいくす玉を作ってみたいと思った。

また、私の作るくす玉の組み合わせ方は大体同じだが、ユニットの枚数によって、ちょっとしたユニットの形の違いによって、完成品が変わってくるのはなぜか、自分で作ったくす玉から調べたいと思った。

2. 調べる方法

- ・自分の作ったくす玉を分析する。
- ・正多面体、半正多面体について調べる。
- ・Geoshapes というおもちゃで多面体を作り、関係を考える。
- ・頂点に注目し、頂点の組み方からどんな立体ができるか調べる。
- ・正多面体ではない多面体を、折り紙や Geoshapes で作ってみる。

3. 結果と考察

3.1 くす玉と多面体の関係

ユニット折り紙でのくす玉は、一枚の折り紙から作ったユニットを組み合わせ、立体を作り上げる。ユニットは、いろいろな折り方があるが、どのユニットも大体組み方は似ている。同じユニットでも、組み方、ユニットの数によって、完成品の大きさや形が変わってくる。

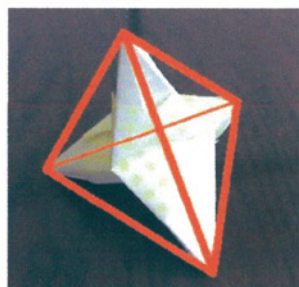
1つのユニット



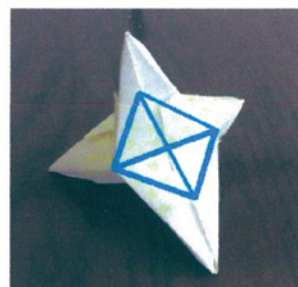
すべて、同じユニットで組んだくす玉（ユニットの数、組み方が違う）

くす玉は凸凹した形だが、その構造をみるために、頂点同士をつなげる分析と、頂点のある突起を削る分析をしてみた。

六枚で組んだもの

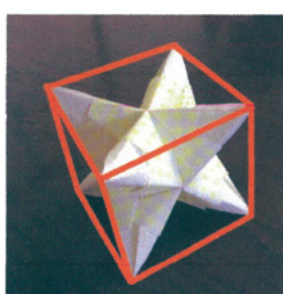


頂点を結んでみると、
正四面体



突起をなくし、
辺を結ぶと、正四面体

十二枚で組んだもの

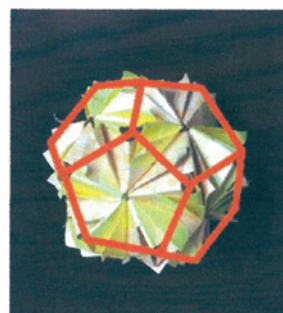
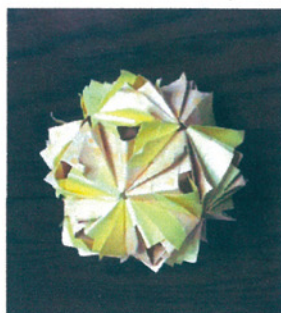


頂点を結んでみると、
正六面体

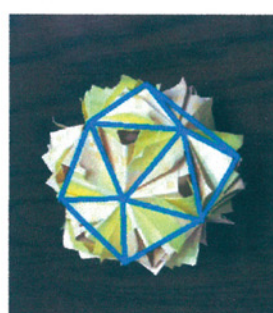


突起をなくし
辺を結ぶと、正八面体

三十枚で組んだもの

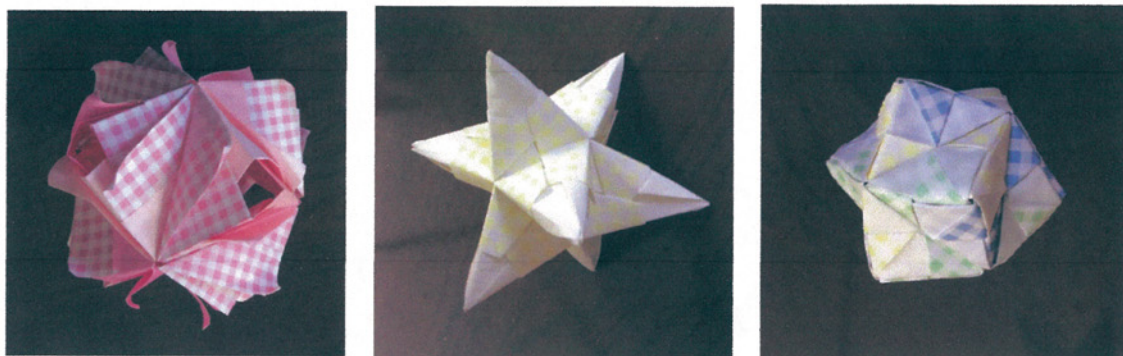


頂点を結んでみると、
正十二面体



突起をなくし
辺を結ぶと、正二十面体

この分析から、基本の形は、正四面体、正六面体、正八面体、正十二面体、正二十面体の正多面体 5 種類だけだ
ということができる。また、1つのくす玉から、二種類の見方ができた。



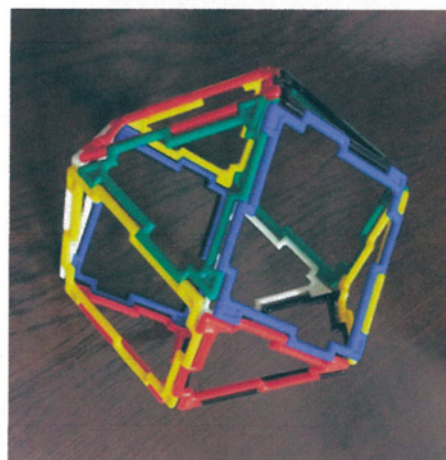
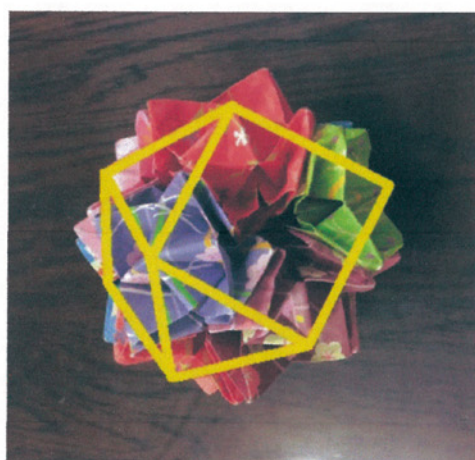
上の 3 個のくす玉はユニットが違うだけで、どれも 2 つめの分析と同じ、正六面体・正八面体としてみるこ
とができる。

同じ方法で、他のくす玉も分析してみた。ほとんどが上と同じように、正多面体として考えられたが、
それらとは違って、正多面体にならないくす玉を見つけた。

このくす玉は、四角形のユニットから組まれている。
それらを十二個組み合わせたものだ。



同じように、頂点を結んでみると・・・



正三角形と正方形が組み合わさった立体となった。

3.2 準正多面体、半正多面体

正多面体以外にも、作れる形があることが分かった。この形は何だろうと思い、調べてみた。すると、準正多面体、半正多面体というものがあることが分かった。

〈正多面体〉 条件

1. すべての面が正多角形である
2. 一種類の正多角形からなる
3. 各頂点の周りが合同である
4. 各辺の周りが合同である
5. 凸多面体である

〈準正多面体〉 1、3、4、5を満たす

〈半正多面体〉 1、3、5 を満たす

正多面体・準正多面体・半正多面体はどれも、「条件3. 各頂点の周りが合同である」を満たしているので、できる形は限られているはず。何らかのパターンがあるのでは・・・

1つの頂点に集まっている多角形の数数を数えてみた

正十角形	正八角形	正六角形	正五角形	正方形	正三角形	
					3	正四面体（正）
				3		正六面体（正）
					4	正八面体（正）
			3			正十二面体（正）
					5	正二十面体（正）
		2			1	切頂四面体
	2				1	切頂六面体
		2		1		切頂八面体
2					1	切頂十二面体
		2	1			切頂二十面体 （サッカーボール型）
				2	2	立方八面体（準）
			2		2	二十・十二面体（準）
				3	1	斜方立方八面体
			1	2	1	斜方二十・十二面体
	1	1	1			斜方切頂立方八面体
1		1		1		斜方切頂二十・十二面体
				1	4	変形立方体
				1	4	変形十二面体

（正）・・・正多面体 （準）・・・準正多面体 記載なし・・・半正多面体

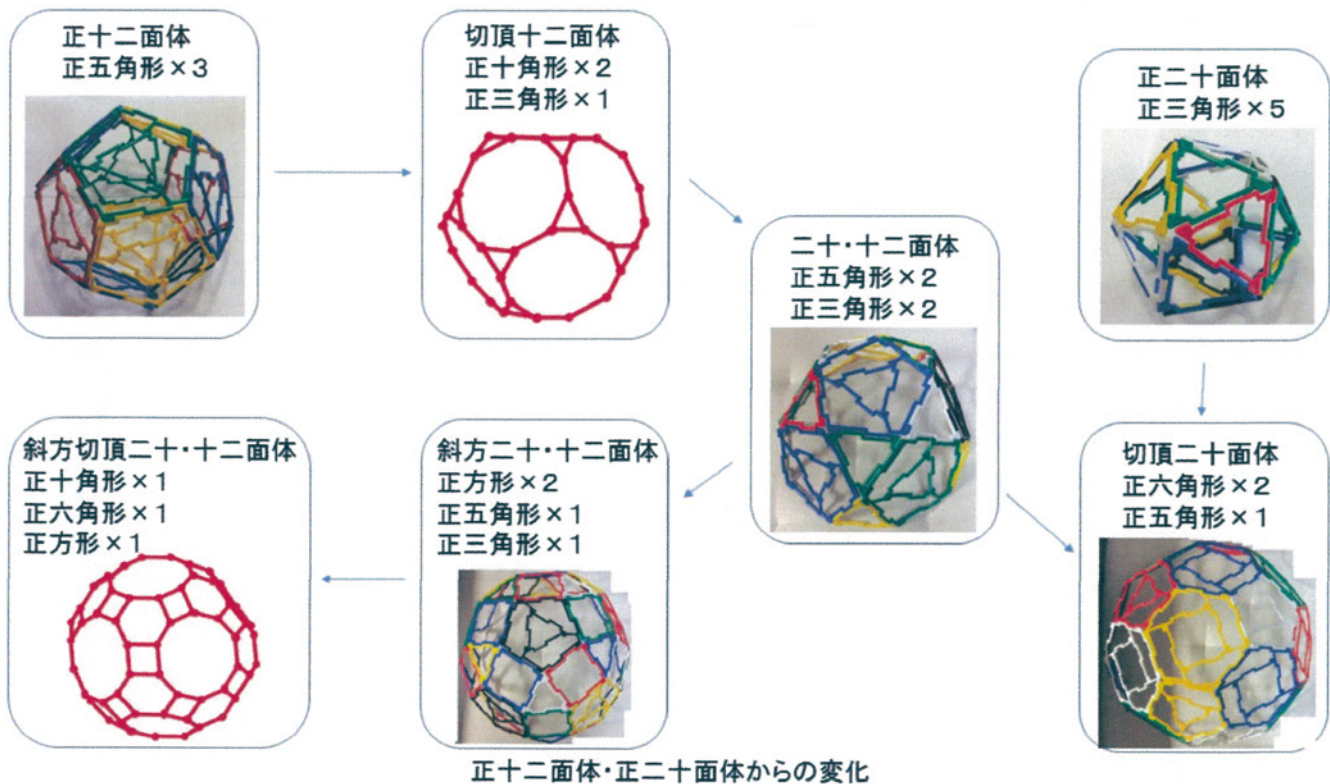
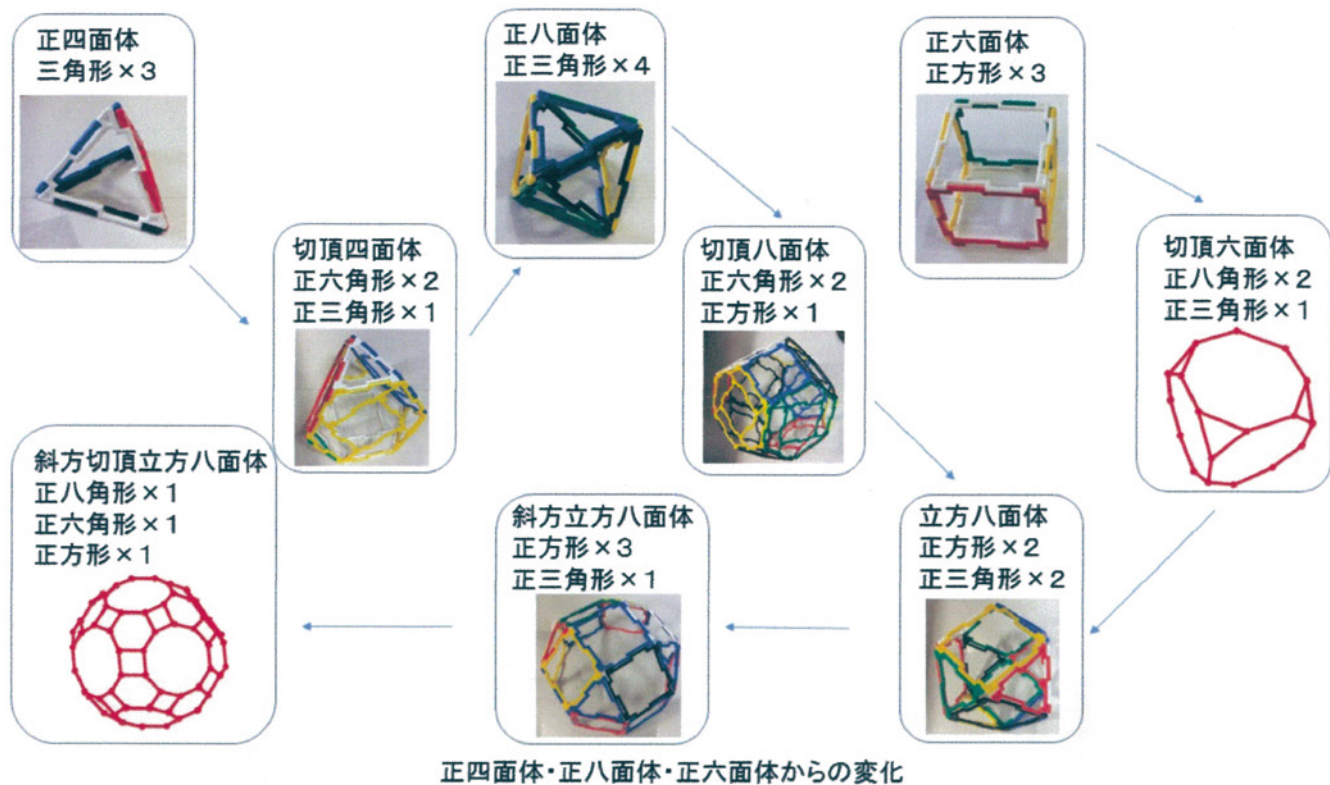


このくす玉は、立方八面体だった。

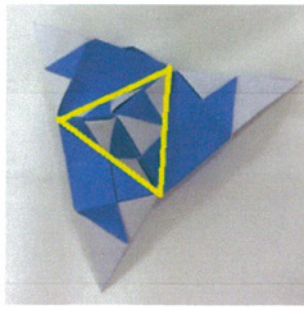
これらの多面体は、頂点を削っていくことで、他の形に導けることに気が付いた。

Geoshapes で準正多面体や半正多面体を作り、その関係を図示した。

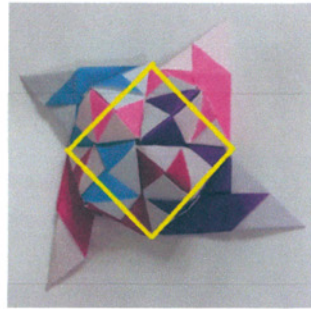
正八角形、正十角形は Geoshapes ないので、絵で描いた。



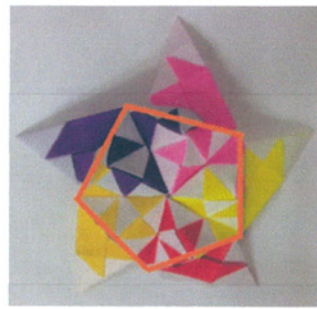
半正多面体も、正多面体と同じように多角形からできている。正多面体のくす玉と同じように、ユニットを組み合わせて多角形を作れば、半正多面体のくす玉も作れるはずだ。



三角形



四角形

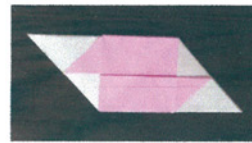


五角形



六角形

この研究では、右のユニットを使うことにする。
残念ながら、八角形、十角形はこのユニットでは作れない。



3.3 頂点の組み合わせ

全ての面が三角形から六角形で作れるくす玉は、ほかにはないか考えてみた。上のことから、組む時は頂点が大事だと考えたため、頂点に正多角形の角の和が 360 度以下になるような組み合わせを Geoshapes で作った。また、その組み合わせた頂点から多面体を作れないか組んでみた。組み合わせに漏れがないように順番に並べた。正多面体や角柱や角錐は明らかなので写真は省略する。

[正]・・・正多面体 [準]・・・準正多面体 [半]・・・半正多面体

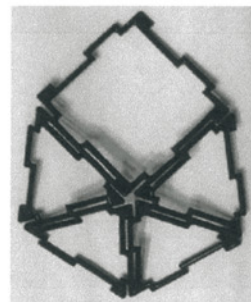
三角形×5： 正二十面体[正]

三角形×4： 正八面体[正]

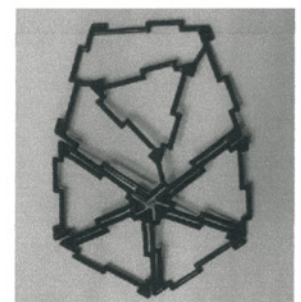
三角形×4、四角形： 変形立方体[半] 写真 A

三角形×4、五角形：変形十二面体[半] 写真 B

三角形×3： 正四面体（三角錐）[正]



A 三角形×4、四角形： 変形立方体



B 三角形×4、五角形： 変形十二面体

三角形×3、四角形： 反角柱（ねじれた柱）

三角形×3、五角形： 反角柱（ねじれた柱）

三角形×2、四角形×2： 立方八面体[準] 写真 C

三角形×2、四角形： 四角錐 （頂点が合同でない）

三角形×2、五角形： 五角錐 （頂点が合同でない）

三角形×2、五角形×2： 二十・十二面体[準] 写真 D

三角形×2、四角形、五角形： 組み上がらない。 写真 E

三角形×1、四角形×2： 三角柱

三角形×1、四角形×2、五角形： 斜方二十・十二面体[半]

三角形×1、四角形、五角形： 鋭角なので組み上がらない。

三角形×1、五角形×2： 組み上がらない 頂点を合同にできない

三角形×1、六角形×2： 切頂四面体[半] 写真 F

三角形×1、四角形×3： 斜方立方八面体[半] 写真 G

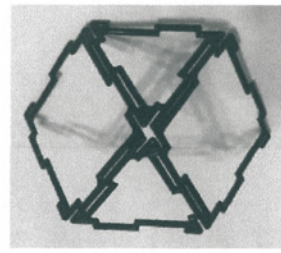
四角形×3： 正六面体（立方体）[正]

四角形×2、五角形： 五角柱

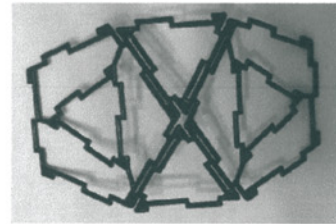
四角形×2、六角形： 六角柱

四角形×1、五角形×2： 組み上がらない

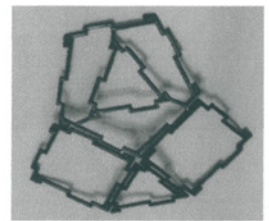
四角形×1、五角形、六角形： 組み上がらない 写真 H



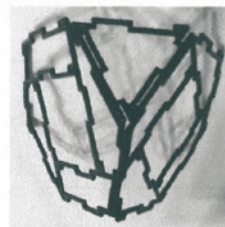
C 三角形×2、四角形
×2： 立方八面体



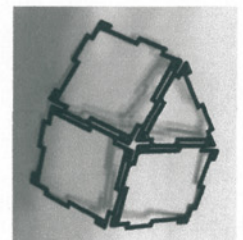
D 三角形×2、五角形×2：
二十・十二面体



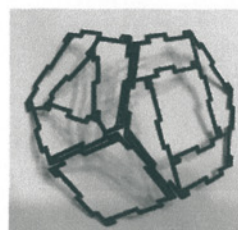
E 三角形×2、四角形、
五角形:組み上がらない



F 三角形×1、六角形
×2： 切頂四面体



G 三角形×1、四角形
×3： 斜方立方八面体



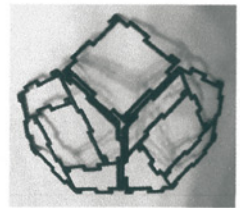
H 四角形×1、五角形、六
角形： 組み上がらない

四角形×1、六角形×2： 切頂八面体[半] 写真I

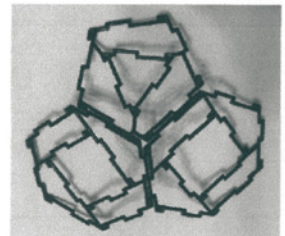
五角形×3： 正十二面体[正]

五角形×2、六角形： 組み上がらない（サッカーボールっぽいけど）

五角形×1、六角形×2： 切頂二十面体[半] サッカーボール 写真J



I 四角形×1、六角形
×2： 切頂八面体



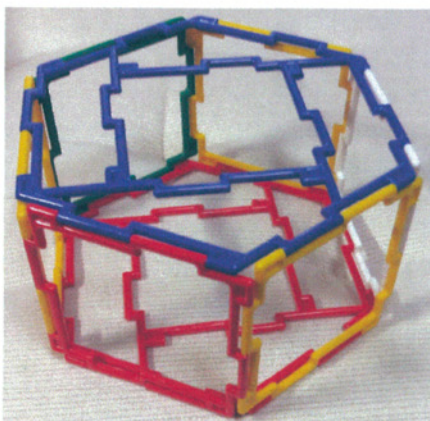
J 五角形×1、六角形×2
：切頂十二面体

組み上がりそうで組み上がらない形が結構あった。これはくす玉になりそうにない。
(ゆがんでしまう、頂点の角度が正多角形では合わなくなる)

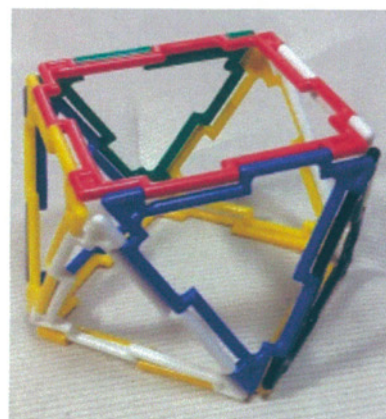
その中でも、何らかの立体になるものは、結構あった。

〈例〉

- ・角柱・・・1つの角に 正方形×2+正N角形 が集まれば、必ず角柱になる。
- ・反角柱（ねじれた柱）・・・1つの角に 正三角形×3+正N角形 が集まれば、必ずできる。



六角柱



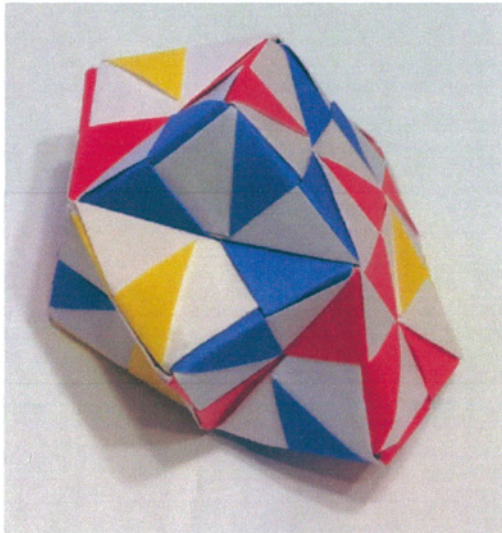
反四角柱

3.4 ジョンソンの立体

半正多面体からさらに条件「3. 各頂点の周りが合同である」を抜いて「1. 全ての面が正多角形である」と「5. 凸多面体である」だけを条件にすると、作れる形が増えるはずだと思い調べてみると、ジョンソンの立体というものがあることが分かった。

ジョンソンの立体は、角錐・角柱・反角柱など、全部で92種類ある。全ての辺が等しく、面が正多角形、凸な（へこみがない）多面体で、まさに思っていたものだ。92種類にかっこいい名前がついている。

辺の長さが等しいのならばくす玉になるのではと思い、ジョンソンの立体の中で簡単なものをユニット折り紙で作ってみた。



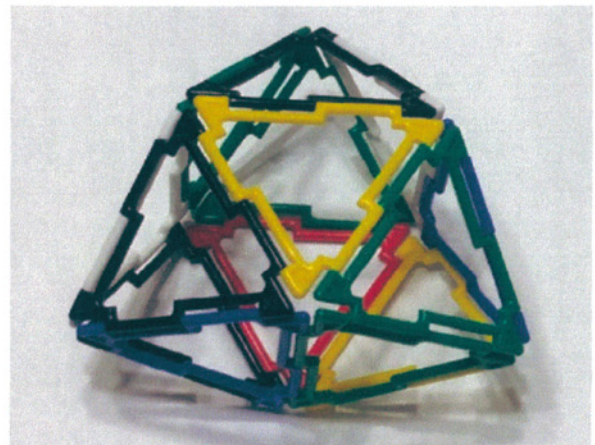
測錐三角形



同相双四角台塔



三側錐三角柱



三側錐三角柱の骨組みはこんな形

非対称でありあまり美しくないが、新しい面白い形の立体が作れた。

4. まとめ

いろいろな立体と結びつけながら多面体やくす玉を検証してきた。今回調べたユニットのくす玉は、すべての辺の長さが等しい多面体をもとにすればできることが分かった。研究の中で、本には出ていないような新しい形のくす玉をたくさん作ってみた。しかし、それらの形は非対称で、あまり美しくない。結果として、整っていて美しい正多面体や半正多面体のような形が好まれるのだと思った。

また、多面体はたくさんあるが、条件を増やしていくことでずいぶん形が限定されることを知った。(多面体→ジョンソンの立体→半正多面体→準正多面体→正多面体)

感想・課題

今回の研究で、くす玉は、組み立て方の工夫次第で作れる形がたくさんあることが分かった。今まで私は固定観念にとらわれて、きれいな球体のくす玉を作ってきた。研究を通して、全ての面が三角形から六角形でできたくす玉は、面白い形も自由に作れるようになった。しかし、八角形や十角形が含まれるものは、今回作ったユニットでは作れなかった。これらを作れるユニットで考えてみることで、私の中のくす玉の幅をもっと広げていきたい。また、今回はすべて凸の立体で検証したが、凸という条件を外せば、もっと変わった立体となり、より面白いくす玉が作れるのではないだろうか。

5. 参考文献

- ・山口 真著 「かわいい折り紙オーナメント」 ソシム株式会社 2013 年
- ・Gianna Alice 著 「アリスの不思議な立体折り紙」 日本ヴォーグ社 2003 年
- ・デビッド・S. リッチェソン著 「世界で2番目に美しい数式 上」 岩波書店 2014 年
- ・ウィキペディア 「半正多面体」 <https://ja.wikipedia.org/wiki/半正多面体> (2015 年 7~8 月)
- ・ウィキペディア 「ジョンソンの立体」 <https://ja.wikipedia.org/wiki/ジョンソンの立体> (2015 年 7~8 月)