約数の和の公式

京都府立洛北高等学校　２年　ホッジ ルネ 倫

１.研究内容

「約数の和」というものを数列のように扱って、規則正しく求めることができる公式についての研究です。
普通 約数の和を求めるには、まずその数を素因数分解して約数をすべて導出してそれらを足し合わすという方法を使いますが、この公式ではその素因数などという不規則なものを使うことなく求めることができます。

では、その公式に至るまでの道筋を追っていきます。

２.定理への道筋

まず、次のような関数を持ち出してくる。

$$F(x) = (1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)\ldots$$

この関数の微分を

$$f'(x) = \{lnf(x)\}' \cdot f(x)$$

という公式に当てはめてすると、

$$F'(x) = \{ln(1-x) + ln(1-x^2) + ln(1-x^3) + ln(1-x^4) + \cdots\}' \cdot F(x)$$

となる。
これを計算すると、

$$F'(x) = -\left(\frac{1}{1-x} + \frac{2x}{1-x^2} + \frac{3x^2}{1-x^3} + \frac{4x^3}{1-x^4} + \cdots\right)F(x)$$

となる。
両辺に$-x$をかけ F(x)で割ると、

$$-\frac{xF'(x)}{F(x)} = \frac{x}{1-x} + \frac{2x^2}{1-x^2} + \frac{3x^3}{1-x^3} + \frac{4x^4}{1-x^4} + \cdots$$

という式ができる。

この式を

$$\frac{1}{1-X}=1+X+X^2+X^3+X^4+\cdots \quad (|X|<1)$$

という公式に当てはめて展開すると、

$$\begin{array}{rcccccccl}
-\dfrac{xF'(x)}{F(x)}= & x+ & x^2+ & x^3+ & x^4+ & x^5+ & x^6+ & x^7 & +\cdots \\
 & & +2x^2 & & +2x^4 & & +2x^6 & & +\cdots \\
 & & & +3x^3 & & & +3x^6 & & +\cdots \\
 & & & & +4x^4 & & & & +\cdots \\
 & & & & & +5x^5 & & & +\cdots \\
 & & & & & & +6x^6 & & +\cdots \\
 & & & & & & & +7x^7 & +\cdots
\end{array}$$

となる。なお、ここで x の定義域は$|x|<1$であるがあとの論証に影響はない。

さて、上からｎ段目に注目すると、項が現れるのはｘの次数がｎの倍数になっているときのみである。また、係数はｎになっている。
よって、１段目から全て足し合わせたとき、x^nの係数はｎの約数の総和になる。
つまり上の式は、

$$-\frac{xF'(x)}{F(x)}=\sigma(1)x+\sigma(2)x^2+\sigma(3)x^3+\sigma(4)x^4+\sigma(5)x^5+\sigma(6)x^6+\cdots \qquad (式①)$$

と表せる。(ただし、$\sigma(n)$は約数関数で、ｎの約数の総和をσ(ｎ)と表す。　たとえば、６の約数は１, ２, ３, ６なので$\sigma(6)=1+2+3+6=12$となる。)

さて、最初に持ち出した関数に戻る。
始めに$F(x)$を積の形のまま微分したが、今度は展開してから微分する。

$$F(x)=(1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)\ldots$$

この関数の展開は「五角数定理」により、

$$F(x)=1-H_1x-H_2x^2-H_3x^3-H_4x^4-\cdots$$

と展開できる。

（H_tの定義：　$\mathrm{t}=\frac{3k^2\pm k}{2}$　（kは自然数）　を満たすとき　$H_t=(-1)^{k+1}$　、

ｔがこれ以外のときはH_t＝０、

具体的に書くと、

Ht＝	1	1	－１	—1	1	1	－１	—1	1
t＝	1	2	5	7	１２	１５	２２	２６	３５

となる。

よって具体的な数字を使って$F(x)$を書くと、

$$F(x)=1-x-x^2+x^5+x^7-x^{12}-x^{15}+\cdots$$

となる。)

$$F(x)=1-H_1x-H_2x^2-H_3x^3-H_4x^4-\cdots$$

これを微分すると、

$$F'(x)=-H_1-2H_2x-3H_3x^2-4H_4x^3-\cdots$$

すなわち、

$$-\frac{xF'(x)}{F(x)}=\frac{H_1x+2H_2x^2+3H_3x^3+4H_4x^4+\cdots}{1-H_1x-H_2x^2-H_3x^3-H_4x^4-\cdots} \qquad \text{（式②）}$$

さて（式①）と（式②）はどちらも$-\frac{xF\prime(x)}{F(x)}$　で同じ値なので、

$$\sigma(1)x+\sigma(2)x^2+\sigma(3)x^3+\ \sigma(4)x^4+\sigma(5)x^5+\sigma(6)x^6+\cdots$$
$$=\frac{H_1x+2H_2x^2+3H_3x^3+4H_4x^4+\cdots}{1-H_1x-H_2x^2-H_3x^3-H_4x^4-\cdots}$$

が成り立つ。

この式を変形すると、

$$\mathrm{H}_1x+2\mathrm{H}_2x^2+3\mathrm{H}_3x^3+4\mathrm{H}_4x^4+\cdots=\{\sigma(1)x+\sigma(2)x^2+\sigma(3)x^3+$$
$$\sigma(4)x^4+\sigma(5)x^5+\sigma(6)x^6+\cdots\}$$
$$\cdot(1-H_1x-H_2x^2-H_3x^3-H_4x^4-\cdots)$$

となる。

右辺を展開すると、

$$
\begin{aligned}
H_1x + 2H_2x^2 + 3H_3x^3 + 4H_4x^4 + \cdots = \quad & \sigma(1)x \\
& + \{\sigma(2) - \sigma(1)H_1\}x^2 \\
& + \{\sigma(3) - \sigma(2)H_1 - \sigma(1)H_2\}x^3 \\
& + \{\sigma(4) - \sigma(3)H_1 - \sigma(2)H_2 - \sigma(1)H_3\}x^4 \\
& + \ldots
\end{aligned}
$$

x^nについて係数比較することで、

$$
\begin{aligned}
H_1 &= \sigma(1) \\
2H_2 &= \sigma(2) - \sigma(1)H_1 \\
3H_3 &= \sigma(3) - \sigma(2)H_1 - \sigma(1)H_2 \\
4H_4 &= \sigma(4) - \sigma(3)H_1 - \sigma(2)H_2 - \sigma(1)H_3 \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

と分かる。
これらを整理すると、

$$
\begin{aligned}
\sigma(1) &= H_1 \\
\sigma(2) &= 2H_2 + \sigma(1)H_1 \\
\sigma(3) &= 3H_3 + \sigma(2)H_1 + \sigma(1)H_2 \\
\sigma(4) &= 4H_4 + \sigma(3)H_1 + \sigma(2)H_2 + \sigma(1)H_3 \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

一般的に書くと、

$$\sigma(n) = nH_n + \sigma(n-1)H_1 + \sigma(n-2)H_2 + \sigma(n-3)H_3 + \cdots$$

総和記号を用いて、

$$\sigma(n) = nH_n + \sum_{t=1}^{n-1} \sigma(n-t)H_t \qquad \textbf{（定理①）}$$

（定理①より）

$\sigma(1) = H_1$

$\sigma(2) = 2H_2 + \sigma(1)H_1$

$\sigma(3) = 3H_3 + \sigma(2)H_1 + \sigma(1)H_2$

$\sigma(4) = 4H_4 + \sigma(3)H_1 + \sigma(2)H_2 + \sigma(1)H_3$

⋮

これを視覚的に見やすくするため、このH_tを実際に数字におこして書き直すと、

$\sigma(1) = 1$

$\sigma(2) = 2 + \sigma(1)$

$\sigma(3) = \sigma(2) + \sigma(1)$

$\sigma(4) = \sigma(3) + \sigma(2)$

$\sigma(5) = -5 + \sigma(4) + \sigma(3)$

$\sigma(6) = \sigma(5) + \sigma(4) - \sigma(1)$

$\sigma(7) = -7 + \sigma(6) + \sigma(5) - \sigma(2)$

$\sigma(8) = \sigma(7) + \sigma(6) - \sigma(3) - \sigma(1)$

⋮

となる。

さて、２段目の右辺の構成要素は2、$\sigma(1)$であるが、１段目により$\sigma(1)$は 1なので

$\sigma(2)$は 2 と 1 のみで表せる。

３段目は構成要素は$\sigma(2)$、$\sigma(1)$であるがさっきと同様に$\sigma(3)$は 2 と 1のみで表すことができる。

これを続けていくことで、 $\sigma(n)$はH_1からH_nまでで表せることが分かる。

そうして実際に計算していくと、

$\sigma(1) = 1$

$\sigma(2) = 2 + 1 = 1 + 2$

$\sigma(3) = (1 + 2) + (1) = 1 \times 2 + 2$

$\sigma(4) = (1 \times 2 + 2) + (1 + 2) = 1 \times 3 + 2 \times 2$

$\sigma(5) = -5 + (1 \times 3 + 2 \times 2) + (1 \times 2 + 2) = 1 \times 5 + 2 \times 3 - 5$

$\sigma(6) = (1 \times 5 + 2 \times 3 - 5) + (1 \times 3 + 2 \times 2) - (1) = 1 \times 7 + 2 \times 5 - 5$

$\sigma(7) = -7 + (1 \times 7 + 2 \times 5 - 5) + (1 \times 5 + 2 \times 3 - 5) - (1 + 2) = 1 \times 11 + 2 \times 7 - 5 \times 2 - 7$

⋮

整理すると、

$\sigma(1) = 1\times\ 1$

$\sigma(2) = 1\times\ 1\ + 2\times 1$

$\sigma(3) = 1\times\ 2\ + 2\times 1$

$\sigma(4) = 1\times\ 3\ + 2\times 2$

$\sigma(5) = 1\times\ 5\ + 2\times 3 - 5\times 1$

$\sigma(6) = 1\times\ 7\ + 2\times 5 - 5\times 1$

$\sigma(7) = 1\times 11 + 2\times 7 - 5\times 2 - 7\times 1$

⋮

この 1，2，－5，－7，. . . の係数は 1，1，2，3，5，7，11，15，22，. . . と続いていく。
この 1，1，2，3，5，7，11，. . . と続く数列をJ_tと呼ぶことにする。

J_t	1	1	2	3	5	7	11	15	22
t	0	1	2	3	4	5	6	7	8

この係数（数列J_t）はどのような増え方をしているのか。
具体的に、$\sigma(7)$の右辺の「１」の１１という係数は、
$\sigma(6)$の右辺の１の係数「７」＋$\sigma(5)$の右辺の１の係数「５」－ $\sigma(2)$の右辺の１の係数「１」
という式で導かれた。
一般的に J_t は、

$$J_t = J_{t-1} + J_{t-2} - J_{t-5} - J_{t-7} + J_{t-12} + \cdots = \sum_{i=1}^{t} H_i\, J_{t-i} \qquad \text{（式③）}$$

という式で求められる。なお、$J_0 = 1$ と定義する。

J_tが定義できたので、$\sigma(n)$を書き直してみると

$\sigma(1) = 1\times J_0$

$\sigma(2) = 1\times J_1\ + 2\times J_0$

$\sigma(3) = 1\times J_2\ + 2\times J_1$

$\sigma(4) = 1\times J_3\ + 2\times J_2$

$\sigma(5) = 1\times J_4\ + 2\times J_3 - 5\times J_0$

$\sigma(6) = 1\times J_5\ + 2\times J_4 - 5\times J_1$

$\sigma(7) = 1\times J_6 + 2\times J_5 - 5\times J_2 - 7\times J_0$

⋮

一般的に書くと、

$$\sigma(n) = \sum_{t=1}^{n} t\, J_{n-t} H_t \qquad \text{（式④）}$$

ところで、分割数というものがある。ｔの分割数を$p(t)$と表す。
さて、この分割数$p(t)$は

$$p(t) = p(t-1) + p(t-2) - p(t-5) - p(t-7) + \cdots = \sum_{i=1}^{t} H_i\, p(t-i)$$

という性質があり、さらに$p(1) = 1$ である。
これは（式③）のJ_t の性質と一致し、J_1も$p(1)$も 1 であるので、すなわち、

$$J_t = p(t)$$

なのである。（なおここでは特別に$p(0) = 1$と定義している）
よって、（式④）のJ_tは$p(t)$に書き直せる。つまり、

$\sigma(1) = p(0)H_1$
$\sigma(2) = p(1)H_1 + 2p(0)H_2$
$\sigma(3) = p(2)H_1 + 2p(1)H_2 + 3p(0)H_3$
$\sigma(4) = p(3)H_1 + 2p(2)H_2 + 3p(1)H_3 + 4p(0)H_4$
$\vdots$

一般的に書くと、

$$\sigma(n) = \sum_{t=1}^{n} t\, p(n-t)\, H_t \qquad \textbf{（定理②）}$$

３.考察

$$\sigma(n) = nH_n + \sum_{t=1}^{n-1} \sigma(n-t)H_t \qquad \textbf{（定理①）}$$

この定理は、ある数の約数の総和はその数以下の約数の総和を用いて規則正しく求められるということを示している。
すなわち、約数の総和というものに漸化式を与えられたのである。

この式で注目してほしいのは、“約数”という素数をはらむものに数列としての性質を導き出したことである。
この数式の右辺は漸化式になっているが、H_tというややこしい数列を含んでいるため残念ながらこの式から$\sigma(n)$について解くことは困難である。
しかし研究が進めばH_tをうまくまとめて$\sigma(n)$に閉じた式を与えることができるかもしれない。

$$\sigma(n) = \sum_{t=1}^{n} t\, p(n-t)\, H_t \qquad \textbf{（定理②）}$$

数を積で分割して生まれる約数、それに対して数を和で分割して生まれる分割数、この２つの要素を結び付けてシンプルな式を作り出せたのは重要な意味を持つのではないだろうか。

約数について考えようとするとどうしても素数をはらむが、この式では約数の和を比較的扱いやすい分割数を用いることで求めることができる。
この先 分割数の性質がわかってくれば、そこからこの（定理②）を用いて約数に結び付けて、そこから素数の未知のふるまいが発見されるかもしれない。

４.まとめ

（定理①）

$$\sigma(n) = nH_n + \sum_{t=1}^{n-1} \sigma(n-t)H_t$$

（定理②）

$$\sigma(n) = \sum_{t=1}^{n} t\, p(n-t)\, H_t$$

（補足）

$\sigma(n)$は約数関数で、nの約数の総和を$\sigma(n)$で表す。

$$H_t = \begin{cases} (-1)^{k+1} & if \quad t = \dfrac{3k^2 \pm k}{2} \quad k \in \mathbb{N} \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

$p(n)$ は分割数で、ｎの分割数を $p(n)$ で表す。

定理を見やすくまとめました

（定理①）

$$
\begin{aligned}
\sigma(1) &= 1\\
\sigma(2) &= 2+\sigma(1)\\
\sigma(3) &= \sigma(2)+\sigma(1)\\
\sigma(4) &= \sigma(3)+\sigma(2)\\
\sigma(5) &= -5+\sigma(4)+\sigma(3)\\
\sigma(6) &= \sigma(5)+\sigma(4)-\sigma(1)\\
\sigma(7) &= -7+\sigma(6)+\sigma(5)-\sigma(2)\\
\sigma(8) &= \sigma(7)+\sigma(6)-\sigma(3)-\sigma(1)\\
\sigma(9) &= \sigma(8)+\sigma(7)-\sigma(4)-\sigma(2)\\
\sigma(10) &= \sigma(9)+\sigma(8)-\sigma(5)-\sigma(3)\\
&\vdots
\end{aligned}
$$

（定理②）

$$
\begin{aligned}
\sigma(1) &= 1\times 1\\
\sigma(2) &= 1\times 1+2\times 1\\
\sigma(3) &= 1\times 2+2\times 1\\
\sigma(4) &= 1\times 3+2\times 2\\
\sigma(5) &= 1\times 5+2\times 3-5\times 1\\
\sigma(6) &= 1\times 7+2\times 5-5\times 1\\
\sigma(7) &= 1\times 11+2\times 7-5\times 2-7\times 1\\
\sigma(8) &= 1\times 15+2\times 11-5\times 3-7\times 1\\
\sigma(9) &= 1\times 22+2\times 15-5\times 5-7\times 2\\
\sigma(10) &= 1\times 30+2\times 22-5\times 7-7\times 3\\
&\vdots
\end{aligned}
$$