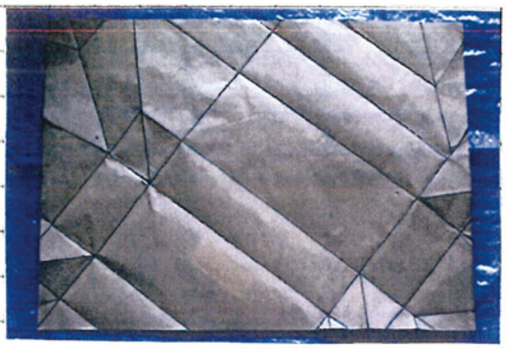
立方体・直方体の包装

東京学芸大学附属高校
2年　柳 美帆

〈動機〉



私は、デパートで母と買い物をするたびに、商品の包装に疑問を抱いていた。特に直方体や立方体の箱を包む時である。だいたいの店員さんが箱を包装紙と平行でなく少し斜めに置いてから包んでおり、中にはさらに紙の端から少し角を出して置いている方も見たことがあった。私はいくつかのデパートを利用したことがあるが、そのほとんどにこの置き方が共通していた。また、複数のラッピングの本に載っているデパート包みの方法を見てみると、どれもが箱を包装紙に対して斜めに置いていた。これは何のためであるのか知りたいとともに、身近な場面にも数学が活かされていそうなことがあふれていることに感動したため、今回立方体や直方体の包装について調べてみることにした。

〈方法〉

私は、箱を斜めに置くことによって、必要な包装紙の面積が減るから斜めに置くのではないかと予想したため、立方体や立方体を二つ繋げた直方体を置く位置や向きを変えて、それら全面を包むのに必要な紙の面積を比較し、その最小面積を求める。

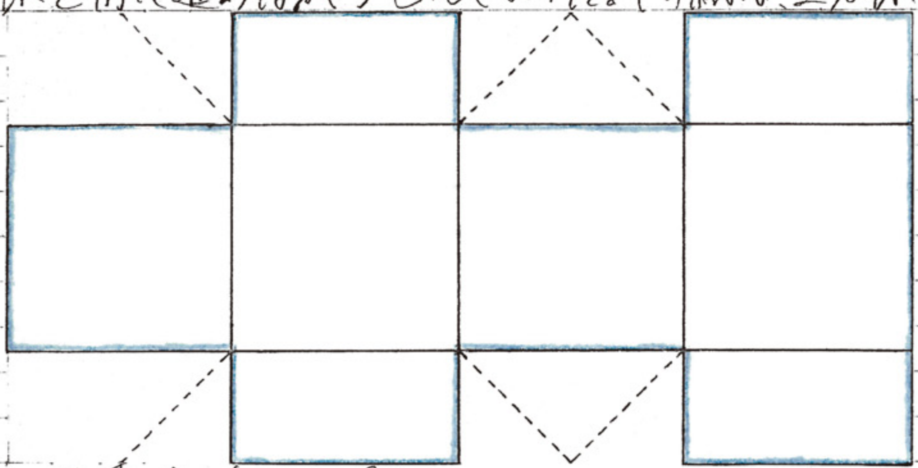
使用する道具は、長方形の紙と一辺3cmの立方体、それをn個繋げた$3 \times 3 \times 3n\,cm^3$の直方体である。紙は調べた値によって大きさを変える。

1、立方体と紙の辺が平行になるように置いたとき、立方体の全面を包むのに必要な紙の最小面積を求める。
2、1の紙で斜めにした立方体の全面を包めるかどうか試す。このときはまだ、立方体の位置や向きは気にしない。
3、2で立方体の全面を包めたら、包んだものを展開して、どうすれば無駄なく包めるかを考え、一辺3cmの立方体の全面を包むのに必要な紙のおよその最小面積を求める。ただし、包む紙の辺の比は1の紙と同じにする。
4、一辺3cmの立方体の代わりに、それを横に二つ繋げた$3 \times 3 \times 6\,cm^3$の直方体を用いて1の作業を行う。
5、同じ直方体を用いて2の作業を行う。
6、2で直方体の全面を包めたら、3で自分で求めた答え、文献の正しい値から規則性を発見し、$3 \times 3 \times 6\,cm^3$の直方体の全面を包むのに必要な紙の正確な最小面積を求める。

〈結果〉

1、立方体と紙の辺が平行になるように置いたとき、立方体の全面を包むのに必要な紙の最小面積を求める。

立方体の一辺を縦の辺と重ね、縦の辺の丁度真ん中に置く。立方体を前に進めながら包んでいった。下の紙は、立方体を包んだものである。

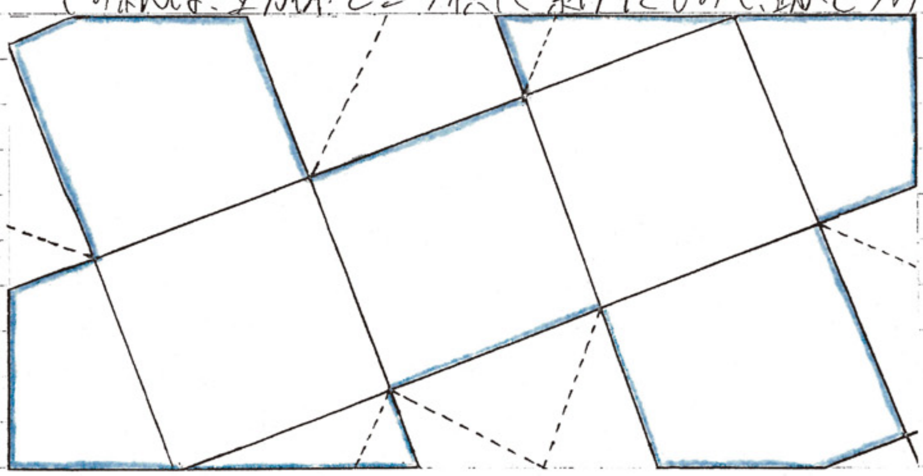


面積は、$6 \times 12 = 72$　　$\therefore 72cm^2$

2、1の紙で斜めにした立方体の全面を包めるかどうかを試す。

立方体の中心と紙の中心を合わせて、紙と立方体の一辺が45°の角をなすように置いて立方体を包んだり、立方体を横に繋げたものを用意し、その右上と左下の角が紙の横の辺と重なるように置いて跡をつけた。そして、跡をつけた部分を通るようにして一つの立方体を包んだ。だが、両方とも立方体全面を包むことはできなかった。

下の紙は、立方体を三つ横に繋げたもので、跡をつけて包んだ紙である。



前ページの下の紙では、立方体全面を包むことができた。この結果から、立方体と紙をそれぞれの辺が平行になるように置いたときに比べて、立方体を斜めに置いた方が、必要な紙の面積が小さいか同じであることがわかった。

3、2で包んだ紙を展開してどうすれば無駄なく包めるかを考え、実際に一辺3cmの立方体の全面を包むのに必要な紙のおよその最小面積を求める。

1の結果より、包む紙の辺の比を、縦:横=1:2と決めて考える。立方体を横に繋げて跡をつけたところを通るようにして立方体を包むのは、無駄な部分が出ず、良い方法であった。立方体を横に四つ繋げたものでも試してみたが、全面を包むことはできなかったため、立方体を横に三つ繋げたものを用いることに決めて、他の条件を考えることにした。

展開した紙から、検討すべき点を二つ発見した。
一つ目は、立方体を横に三つ繋げたものを、角度は一定にして、紙のどこに置くかということである。ここで文献を調べてみたところ、「ちなみに、デパートなどの売り場で新人の店員さんが最初に習うことは包装の仕方で、そのコツが、"紙の中心と箱の中心を合わせ、紙に対して箱を少し斜めに置くこと"であることは、店員さんたちの世界ではいわば常識だそうです。」(秋山仁 2004, p.35)という一文を見つけることができた。一つの立方体を包んだときに立方体の中心が紙の中心に来るようにするには、跡をつけるときに立方体を繋げたものの中心が紙の中心と重なればよい。しかし、二つの中心をそのまま正確に合わせることは難しいので工夫してみた。

図1

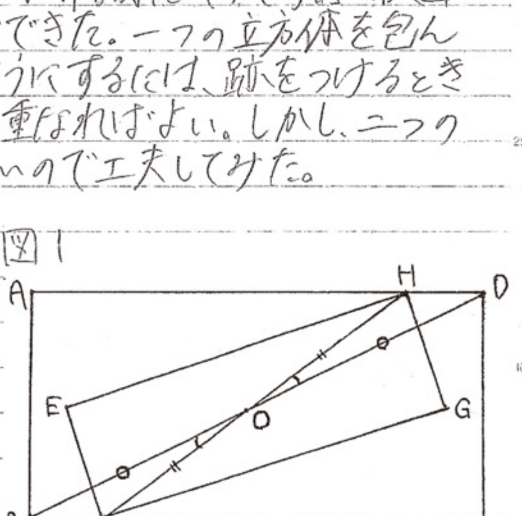


図1は、紙の上に立方体を三つ繋げたものをお互いの中心が交わるように置いて真上から見た図である。長方形ABCDが紙を表し、その中に長方形EFGHで表された立方体を横に三つ繋げたものが入っている。このとき長方形ABCDと長方形EFGHの中心Oが重なっており、点Fは辺BC上に、点Hは辺DA上にあるものとする。

[証明]
図1の△BOFと△DOHにおいて、
対頂角は等しいので、∠BOF=∠DOH …①

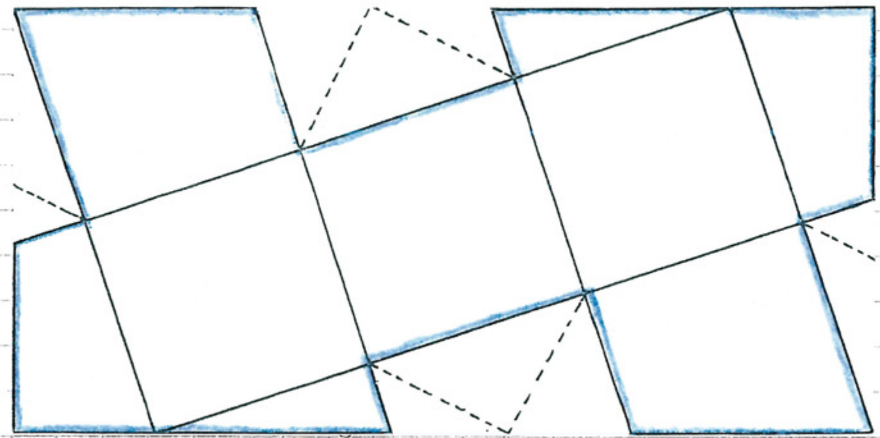
長方形の中心は対角線を二等分するので、BO=DO、FO=HO …②③
①～③より、二組の辺とその間の角がそれぞれ等しいので、
△BOF≡△DOH　　∴BF=DH

よって、紙の角から、立方体を繋げたものと横の辺の交点までの長さを上下で等しくすればよいことがわかった。念のため、立方体を繋げたものを角度は同じで紙の端に置いて跡をつけて包んだが、全面を包むことはできなかった。

二つ目は、紙の右下と左上の角についてである。右下の角は折り目と紙の角がほとんど重なっているが、左上の角は小さな直角三角形の部分が余っていて無駄であるように感じられた。二箇所ともそれらが重なるようにすれば、おそらく無駄を省くことができる。

これら二つの点を考慮すると、必要な紙の最小面積が特定できそうである。ここまで用いてきた6×12cm²の長方形と大幅には面積が変わらないように考えられるので、横の辺を1mmずつ減らして無駄なく立方体全面を包むことができるか試してみた。(紙の辺の比は縦:横=1:2と予め決めているので、横の辺の長さを決定してから、コンパスでその半分の長さをとった。だから、縦の辺の長さは0.5mmずつ減っていた。)

調べた結果、縦5.7cm、横11.4cmのときに二つの条件を満たすことができ、立方体を包んでみると、ほぼぴったりで無駄なく包むことができた。



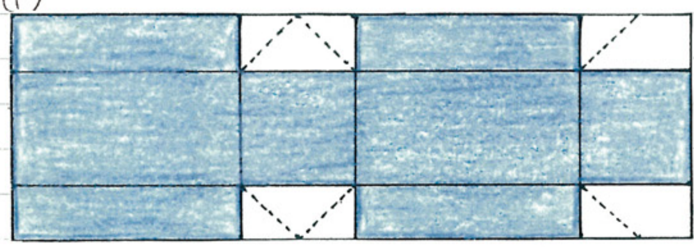
おそらく多少の誤差はあるが、一辺3cmの立方体の全面を包むのに必要な紙の最小面積は、5.7×11.4=64.98　　∴約64.98cm²

よって、立方体を斜めに置いて包むと、必要な紙の面積は小さくなる。

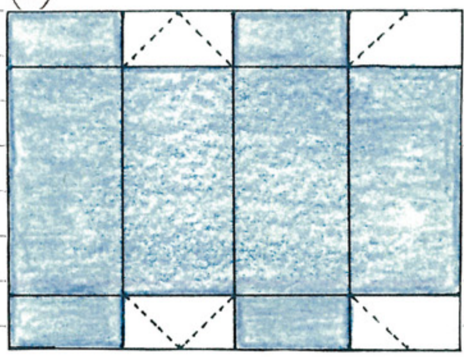
4、$3\times3\times6cm^3$の直方体の紙の辺が平行になるように置いたとき、直方体の全面を包むのに必要な紙の最小面積を求める。

(1) 直方体を立てるのと寝せるのを交互にして前に進んで包んだ場合
(2) 直方体を横にしたまま前に進めて包んだ場合（ともに実物の$\frac{1}{2}$に縮小）

(1)



(2)



面積は、(1) $6\times18=108$
(2) $9\times12=108$ $\therefore 108cm^3$

5、4の紙で斜めにした直方体の全面を包めるかどうかを試す。

(2)の長方形では、直方体をどのように向けても全面を包むことができなかった。一方(1)の長方形では、立方体を横に5つ繋げたものの右上と左下が紙の横の辺を重なるように置いて跡をつけた。そして、跡をつけた部分を通るようにして直方体を包んだところ、全面を包むことができた。

この結果から、$3\times3\times6cm^3$の直方体と紙のそれぞれの辺が平行になるように置いたときに比べて、立方体を斜めに置いた方が必要な紙の面積が小さいか同じであることがわかった。

6、3で自分で求めた答え、文献の正しい値から規則性を発見し、$3\times3\times6cm^3$の直方体の全面を包むのに必要な紙の正確な最小面積を求める。

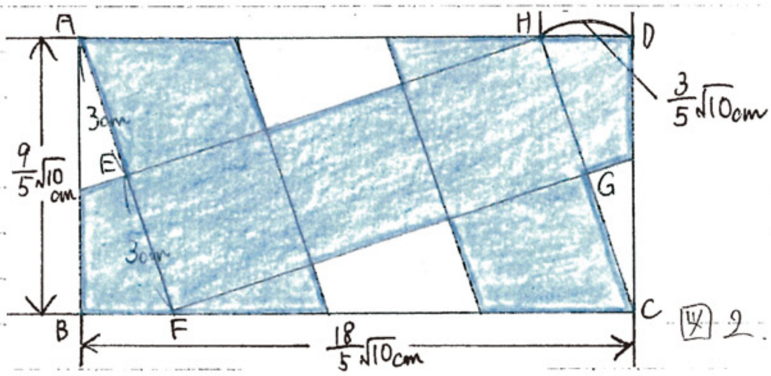


図2.

文献によると、正しい値は図2ようになっており、値はほぼ正確だった。

$\frac{9\sqrt{10}}{5}=1.8\times3.162\cdots=5.692\cdots\fallingdotseq5.7$

$\frac{18\sqrt{10}}{5}=3.6\times3.162\cdots=11.3841\cdots\fallingdotseq11.4$

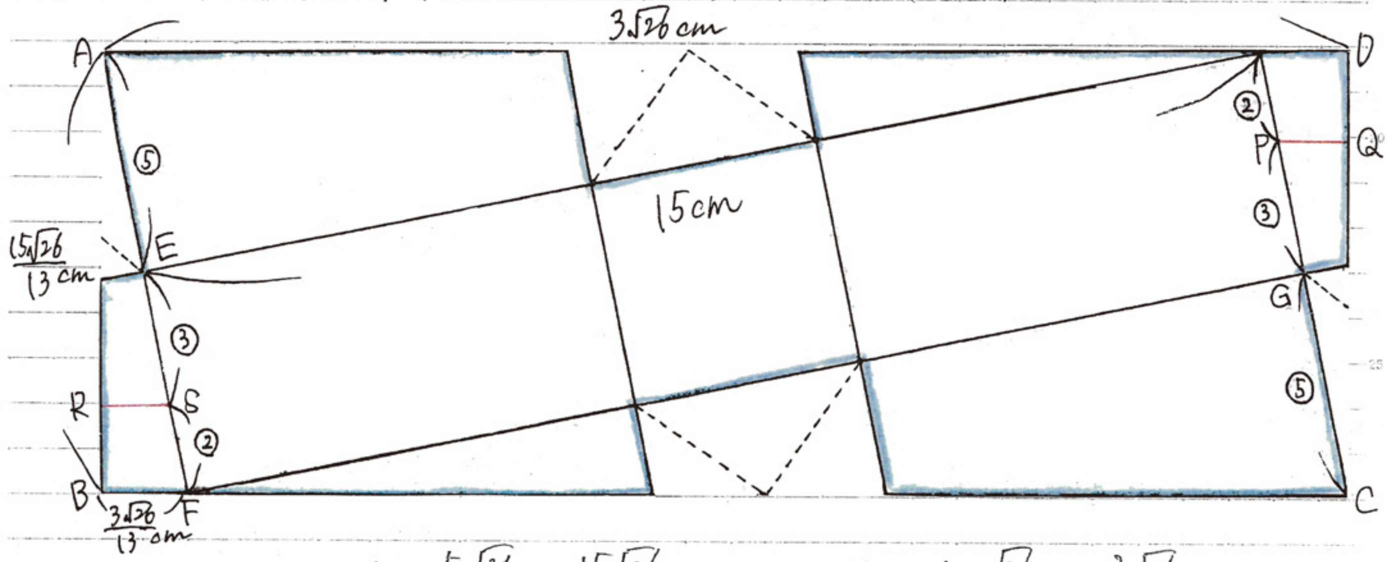
$\frac{3\sqrt{10}}{5}=0.6\times3.162\cdots=1.897\cdots\fallingdotseq1.9$

まずは、3の時と同様の考え方で、立方体を五つ繋げたものと紙の中心を合わせ、右下と左上の辺とが重なるように置くことにする。置き方は、3の証明と同じようにする。また、右下と左上の角と折り目がぴったり一致していることも、無駄を無くすには重要であろう。

新たに注目すべき点は、相似である$1:3:\sqrt{10}$の直角三角形であふれていることである。この「3」という値は、立方体を三つ繋げたものを置くことによって△AEHや△CGFという直角三角形ができたことによるものである。このことから、立方体を五つ繋げる場合には、$1:5:\sqrt{26}$の直角三角形であふれていると想像できる。

このとき、△ABFに注目すると、$FB:BA:AF=1:3:\sqrt{10}$の直角三角形で、$AF=6cm=3\times 2cm$、すなわち立方体の一辺の長さ×2であることがわかる。このことから、これから包む直方体の場合でも、包む紙の隅の90°を角に持つ直角三角形の斜辺は、立方体の一辺の長さ×2の6cmであり、直角三角形の三辺の比から他の辺の長さも求められるはずである。

下の紙が直方体を包んだ紙である。無理数は近似値で測った。



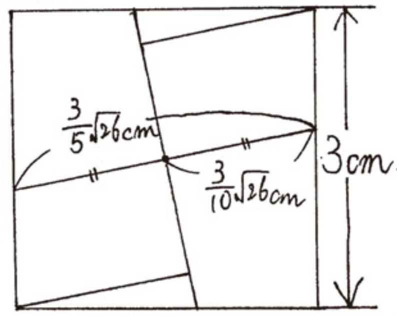
$$AB=CD=6\times\frac{5\sqrt{26}}{26}=\frac{15\sqrt{26}}{13},\quad BF=DH=6\times\frac{\sqrt{26}}{26}=\frac{3\sqrt{26}}{13}$$

$$EH=FG=3\times 5=15,\quad AH=CF=3\times\sqrt{26}=3\sqrt{26}$$

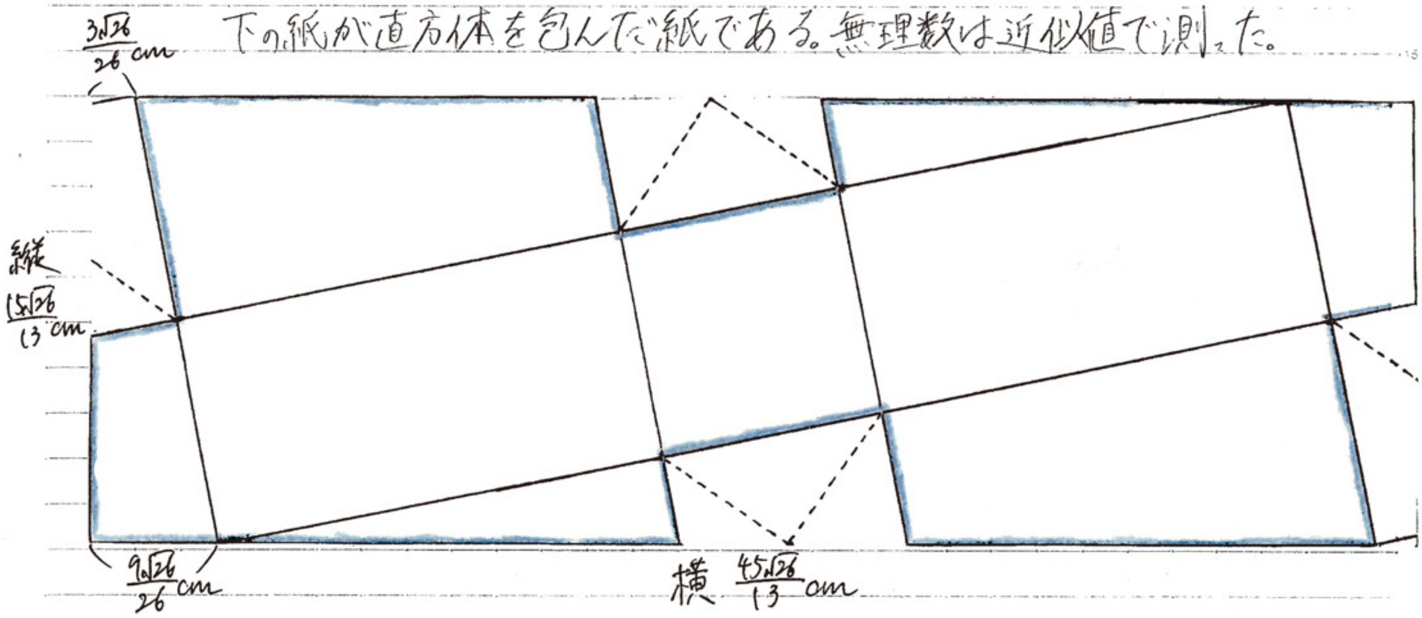
しかし、この紙では全面を包むことができなかった。ところが全体的に紙が足りなかったのではなく、最後に包む$3\times 3cm^2$の正方形の一部が包みきれなかった。次ページの図3は、その正方形もぴったり包めるときの予想図である。ポイントは、合同な三角形の証明により、正方形の中心を通る辺は中心で二等分されることがわかるので、上の紙の赤色の辺PQ、RSの長さが、$3\times\frac{\sqrt{26}}{5}\times\frac{1}{2}=\frac{3\sqrt{26}}{10}$ cmとなればよい。

一方、前ページの紙の横の長さは、
$HP:PG = FS:SE = 2:3$
$HG:GC = FE:EA = 1:1$
$\therefore DH:PQ = HC:PC = FA:SA = BF:RS = 5:4$
よって、$\frac{3\sqrt{26}}{13} \times \frac{4}{5} = \frac{12\sqrt{26}}{65}$ cm
これより、伸ばせばよい長さは、
$\frac{3\sqrt{26}}{10} - \frac{12\sqrt{26}}{65} = \frac{3\sqrt{26}}{26}$ cm となる。
包む紙は長方形と決まっているので、上の紙の両脇に、
$\frac{15\sqrt{26}}{13} \times \frac{3\sqrt{26}}{26}$ cm^2 の長方形をそれぞれ付け足した大きさにすればよい。

図3.



下の紙が直方体を包んだ紙である。無理数は近似値で測った。



右下や左上の角と折り目が重なっていないので無駄があるようにも見えるが、これでぴったり包むことができた。
面積は、$\frac{15\sqrt{26}}{13} \times \frac{45\sqrt{26}}{13} = \frac{1350}{13} = 103\frac{11}{13}$ $\therefore 103\frac{11}{13}$ cm^2
よって、$3 \times 3 \times 6$ cm^3 の直方体を斜めに置いて包むと、必要な紙の面積は小さくなる。

ここで、ある重要な点を発見した。この長方形の辺の比は $1:3$ であり、4(1)の直方体と紙の辺が平行になるように置いたときの紙と同じ辺の比である。また、一つの立方体を包んだときも、立方体が紙に平行に置かれているときと斜めに置かれているときで包む紙の辺の比は、縦:横 $= 1:2$ と等しくなっていた。

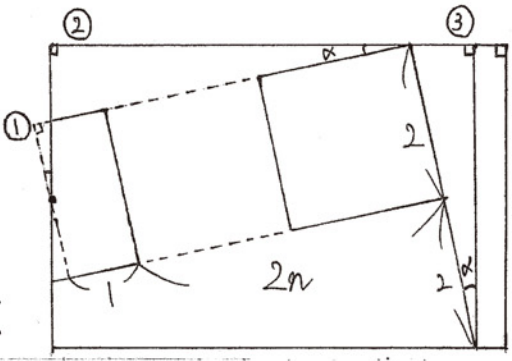
〈考察〉

一般化できる概念として6の結果より、「立方体をn個繋げてできる直方体を無駄なく包むことのできる長方形の辺の比は、縦：横＝1：n+1」であることが予想でき、このことを証明する。無駄なく長方形を包むようにするため、2ページ前の「包む紙の隅の90°を角に持つ直角三角形の斜辺は、立方体の一辺の長さ×2」を前提としている。

[証明]

底面が一辺2の正方形で高さが2n（nは整数）の直方体を無駄なく包める直方形を考える。3、6の結果から、点対称であることがわかるので、図は縦に二等分したうちの右半分の図4を用いる。$(0<\alpha\leqq 45^\circ)$

図4.



まずは、①の直角三角形を考える。

$BC=2\times\frac{1}{2}=1$、$AB=\frac{AB}{1}=\tan\alpha$ (図5)

$\frac{1}{CA}=\cos\alpha \Leftrightarrow CA=\frac{1}{\cos\alpha}$

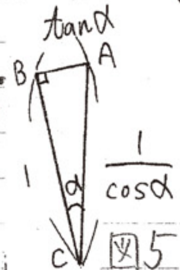


図5

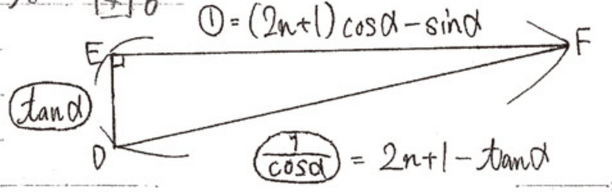
続いて、②の直角三角形を考える(図6)。

①∽②より、$DE:EF:FD=\tan\alpha:1:\frac{1}{\cos\alpha}$

$FD=2n+1-\tan\alpha$ なので、

$EF=FD\times\cos\alpha=(2n+1)\cos\alpha-\sin\alpha$

図6



次に、③の台形について考える(図7)。

$\triangle GHI$において、$\frac{GH}{4}=\sin\alpha \Leftrightarrow GH=4\sin\alpha$

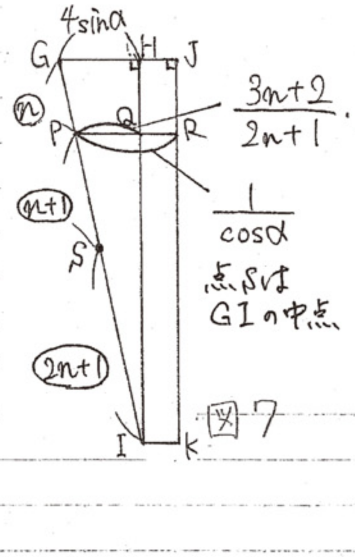
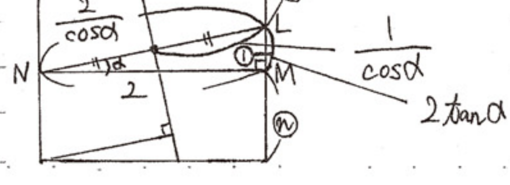


図7

ここで、前ページと同じように、最後に包む正方形について考える(図8)。中心を通り傾きがtanαの直線を斜辺とする直角三角形を描く。先述の通り、辺NLの長さの半分が辺PRの長さと等しくなる。

$\frac{2}{NL}=\cos\alpha \Leftrightarrow NL=\frac{2}{\cos\alpha}$ $\therefore PR=\frac{2}{\cos\alpha}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{\cos\alpha}$

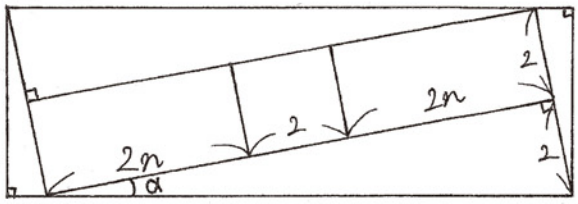
図8.



また、図9のように、

$$\tan\alpha = \frac{\text{立方体の一辺の長さ}}{\text{跡をつけるのに使う直方体の高さ}} = \frac{2}{2\times 2n+2} = \frac{1}{2n+1}$$

図9.



さらに、$\frac{LM}{2} = \tan\alpha \Leftrightarrow LM = 2\tan\alpha$ より、

△LMNと合同な直角三角形は、縦に、$\frac{2}{2\tan\alpha} = \frac{1}{\tan\alpha} = 2n+1$ 個並べることができる。$GP:PS = n:n+1$、$GS:SI = 1:1$ より、$GH:PQ = GI:PI = 2(2n+1):n+1+2n+1 = 4n+2:3n+2$

$$\therefore PQ = 4\sin\alpha \times \frac{3n+2}{4n+2} = \frac{3n+2}{2n+1}\sin\alpha$$

図4の横の長さは、$EF+GH+PR-PQ$

$$= (2n+1)\cos\alpha - \sin\alpha + 4\sin\alpha + \frac{1}{\cos\alpha} - \frac{3n+2}{2n+1}\cdot 2\sin\alpha$$

$$= (2n+1)\cos\alpha + \frac{1}{\cos\alpha} + \frac{6n+3-(6n+4)}{2n+1}\sin\alpha$$

$$= (2n+1)\cos\alpha + \frac{1}{\cos\alpha} - \frac{1}{2n+1}\sin\alpha$$

$$= (2n+1)\cos\alpha + \cos\alpha\left(\frac{1}{\cos^2\alpha} - \frac{1}{2n+1}\tan\alpha\right)$$

$\left(\tan\alpha = \frac{1}{2n+1}、\frac{1}{\cos^2\alpha} = 1+\tan^2\alpha \text{ より、}\right)$

$$= (2n+1)\cos\alpha + \cos\alpha(1+\tan^2\alpha - \tan^2\alpha)$$

$$= 2(2n+1)\cos\alpha.$$

長方形の右半分しか考えていないので、実際の長方形の横の長さは、

$2(n+1)\cos\alpha \times 2 = 4(n+1)\cos\alpha$　　$\therefore 4(n+1)\cos\alpha.$

長方形の縦の長さは、△GHIより、

$\frac{GH}{4} = \cos\alpha \Leftrightarrow GH = 4\cos\alpha$　　$\therefore 4\cos\alpha$

$\therefore$ 縦:横 $= 4\cos\alpha : 4(n+1)\cos\alpha = 1 : n+1$

よって、立方体をn個繋げてできる直方体を無駄なく包むことのできる長方形の辺の比は、縦:横 $= 1:n+1$ である。

〈感想〉

今回の自由研究では、高校1年生の自由研究の続きとして行い、立方体を2個繋げたものについてまでしか言及できていなかったものをn個繋げたものについて考察し、一般化することができた。答えが分かっていないことについて研究することは、時間がかかるなどして大変ではあるが、自力で一般的な概念を見つけられたときには、何とも言えない感動を味わうことができた。高校数学は難しいが、たくさん数学に触れて数学の考え方を自分のものにすれば問題解決できる範囲が広がり、さらに数学が楽しい学問であるということを実感できるので、これからも諦めずに学び続けていきたい。

〈参考文献〉

・秋山仁 (2004)「知性の織りなす数学美」 中公新書
・秋山仁 (2008)「数学センスを磨こう」 NHK出版
・長谷恵 (2008)「和風ラッピングアートレッスン」 誠文堂新光社
・長谷良子 (1995)「ラッピングアートテクニック」 誠文堂新光社