

# 双心四角形の3次元立体への拡張 特に四面体・五面体について

筑波大学附属駒場高等学校 1 年 森住剛士

## 1. 研究の動機

あるとき双心四角形について知り、それについて調べると興味深い性質があることが分かった。そこで、これを3次元立体に拡張するとどのような性質を持つのか気になったのでこの研究に至った。今回の研究では多面体のなかでも面の数が少ない四面体と五面体に焦点を当てて考察した。

## 2. 研究の概要と方針

言葉を以下のように定義する。

- ・双心四角形：外接円と内接円の両方を持つ四角形
- ・接触四角形：内接円を持つ四角形の、内接円との接点を順に結んでできる四角形
- ・辺接球：多面体のすべての辺に接する球
- ・双心多面体：外接球と辺接球の両方を持つ多面体
- ・双心四面体：双心多面体である四面体
- ・双心五面体：双心多面体である五面体

なお、ここでは双心四角形の定義を「すべての頂点を通る円（外接円）とすべての辺に接する円（内接円）を持つ四角形」と捉え、それに対応させるように双心多面体を「すべての頂点を通る球（外接球）とすべての辺に接する球（辺接球）を持つ多面体」として、内接球ではなく辺接球を定義に用いた。今回の研究では主に双心四面体と双心五面体の性質（特に面の形状と、内接球を持つかどうか）を明らかにすることを目標にしている。そのために、以下の方針で進めていく。

- ① 四面体が双心四面体になる条件の考察と、双心四面体が内接球を持つことの証明
- ② あらゆる五面体は次に示す「Ⅰ型」「Ⅱ型」「Ⅲ型」のどれか1つに当てはまる、ということの証明
  - Ⅰ型：三角形4つと四角形1つからなる（四角錐）
  - Ⅱ型：三角形2つと四角形3つからなり、三角形の面の辺6つを除く3辺は平行である（三角柱を切り取ってできる立体）
  - Ⅲ型：三角形2つと四角形3つからなり、三角形の面の辺6つを除く3辺を延長すると1点で交わる（三角錐を切り取ってできる立体）
- ③ Ⅰ型双心五面体は1つの等脚台形の面と、その上底・下底を底辺とする2つの二等辺三角形の面を持つ、ということの証明
- ④ Ⅰ型双心五面体は、正四角錐であるとき内接球をもち、そうでないときは内接球をもたない、ということの証明
- ⑤ Ⅱ型双心五面体は3つの等脚台形の面を持つ、ということの証明
- ⑥ Ⅱ型双心五面体は内接球を持たない、ということの証明
- ⑦ Ⅲ型双心五面体は、正三角錐を切り取ってできる三角錐台である、ということの証明

- ⑧ III型双心五面体は、内接球をもつとき等脚台形の面の辺の比が  $(\sqrt{3}-\sqrt{2}) : \sqrt{3} : \sqrt{3} : (\sqrt{3}+\sqrt{2})$  である、ということの証明

### 3. 証明

#### ①

まず、補題 1 を示す。

**補題 1.** 双心多面体について、各面は外接円と内接円を持つ。また、双心多面体の各頂点について、その頂点から、その頂点を含む辺上にある辺接球との接点までの距離は等しい。

#### (証明(略式))

双心多面体のある面  $F$  について考える。球を平面で切断すると、その断面は円になる。双心多面体の外接球は面  $F$  のすべての頂点を通るので、面  $F$  を含む平面でこの球を切断したときの断面は、面  $F$  の外接円になる。また、双心多面体の辺接球は面  $F$  のすべての辺に接するので、面  $F$  を含む平面でこの球を切断したときの断面は、面  $F$  の内接円になる。以上より、双心多面体の各面は外接円と内接円を持つ。

双心多面体の辺と辺接球との接点は、各面の辺とその内接円との接点と一致する。各面の頂点について、その頂点から、その頂点を含む辺上にある「内接円との接点」までの距離は等しいので、多面体の各頂点から「辺接球との接点」までの距離に関しても同じことがいえる。(証明終)

図 1 のように双心四面体  $ABCD$  の各辺と辺接球との接点を  $P, Q, R, S, T, U$  とすると、補題 1 より、 $AQ=AR=AS, BR=BP=BT, CP=CQ=CU, DS=DT=DU$  である。ある長さ  $a, b, c, d$  に対して、四面体  $A'B'C'D'$  が

$$A'B' = a + b, B'C' = b + c, C'A' = c + a, A'D' = a + d, B'D' = b + d, C'D' = c + d \cdots (*)$$

を満たすとき、 $\triangle A'B'C'$  の内接円と辺  $B'C'$  との接点を  $P_1$ ,  $\triangle D'B'C'$  の内接円と辺  $B'C'$  との接点を  $P_2$  とすると、 $B'P_1 = B'P_2 = b, C'P_1 = C'P_2 = c$  となり、 $P_1$  と  $P_2$  は一致する。この点を  $P'$  とおく。同様にして、 $C'A'$  上に  $Q'$ ,  $A'B'$  上に  $R'$ ,  $A'D'$  上に  $S'$ ,  $B'D'$  上に  $T'$ ,  $C'D'$  上に  $U'$  をとる。 $\triangle A'B'C'$  の内接円を断面として持ち、点  $S'$  を通る球について考える。この球を平面  $A'B'D'$  で切断したときの断面は、点  $R'$  で辺  $A'B'$  に接し、点  $S'$  を通る円である。これは  $\triangle A'B'D'$  の内接円に一致する。よって、球は点  $S', T'$  で辺  $A'D', B'D'$  に接する。同様に、この球は点  $U'$  で辺  $C'D'$  に接するから、この球は四面体  $A'B'C'D'$  の辺接球である。また、 $\triangle A'B'C'$  の外接円を断面として持ち、点  $D'$  を通る球は必ず存在するから、四面体  $A'B'C'D'$  は双心四面体である。

したがって、(\*) は四面体が双心四面体になるための必要十分条件である。

双心四面体  $ABCD$  の面  $DAB, DBC, DCA$  に接する球は無数に存在し、点  $D$  を中心として互いに相似である。このうち、四面体  $ABCD$  の内側から面  $ABC$  に接するものが必ず存在するので、四面体  $ABCD$  は内接球を持つ。したがって、双心四面体は内接球を持つ。

#### ②

まず、五面体には次の 2 種類がある。

(i) 三角形 4 つと四角形 1 つからなる (図 2)

(ii) 三角形 2 つと四角形 3 つからなる (図 3)

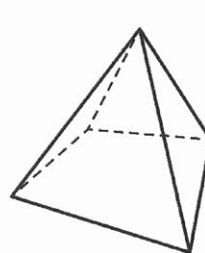


図 2

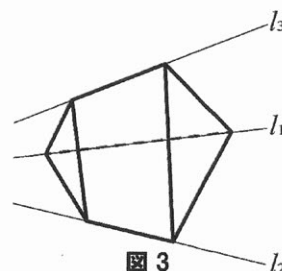


図 3

(i)の五面体はI型の五面体である。ここで、(ii)の五面体について考える。

図3のように三角形の面の辺6つを除く3辺を延長してできる直線をそれぞれ $l_1, l_2, l_3$ とする。

・ $l_1, l_2, l_3$ がすべて平行なとき

これはII型の五面体である。

・ $l_1, l_2, l_3$ のうち少なくとも2本が平行でないとき

$l_1 \nparallel l_2$ としても一般性を失わない。 $l_1$ と $l_3$ ,  $l_2$ と $l_3$ はそれぞれ同一平面上にあることより, それぞれは交わるまたは平行であることに注意する。 $l_1, l_2$ によってできる平面を $\alpha$ とする。 $l_3$ が $\alpha$ 上にあると五面体ができないので,  $l_3$ は $\alpha$ 上にない。

ここで,  $l_3$ が $l_1$ または $l_2$ と平行ならば,  $l_3$ は $\alpha$ と交わらず,  $l_1, l_2$ のいずれとも交わらないので,  
 $l_3 \nparallel l_1$ かつ $l_3 \nparallel l_2 \quad \therefore l_1 \nparallel l_2 \nparallel l_3$

これは,  $l_1 \nparallel l_2$ に矛盾。よって,  $l_3 \nparallel l_1$ かつ $l_3 \nparallel l_2$

ゆえに,  $l_3$ と $l_1$ ,  $l_3$ と $l_2$ は交わる。 $l_3$ は $\alpha$ 上にないから $l_3$ と $\alpha$ は1点で交わり, その交点は $l_3$ と $l_1$ の交点および $l_3$ と $l_2$ の交点に一致する。よって,  $l_1, l_2, l_3$ は1点で交わる。このとき, 五面体はIII型になる。

以上により②の証明ができた。

(証明終)

③

まず, 補題2を示す。

補題2. 内接円を持つ四角形について, この四角形が外接円を持つことは, この四角形の接触四角形の対角線が垂直に交わることと同値である。

(証明)

図4のように, 内接円を持つ四角形 $A'B'C'D'$ の接触四角形を $P'Q'R'S'$ とし, 対角線 $P'R', Q'S'$ の交点を $T'$ とする。 $AP' = AS', C'Q' = C'R'$ より,  $\triangle AP'S', \triangle C'Q'R'$ は二等辺三角形だから,

$$\angle AP'S' = 90^\circ - \frac{1}{2}\angle P'A'S', \quad \angle C'Q'R' = 90^\circ - \frac{1}{2}\angle Q'C'R'$$

これと接弦定理より,

$$\begin{cases} \angle P'Q'S' = \angle AP'S' = 90^\circ - \frac{1}{2}\angle P'A'S' \\ \angle Q'P'R' = \angle C'Q'R' = 90^\circ - \frac{1}{2}\angle Q'C'R' \end{cases}$$

$$\therefore \angle P'T'Q' = 180^\circ - \angle P'Q'T' - \angle Q'P'T' = \frac{1}{2}(\angle P'A'S' + \angle Q'C'R')$$

円に内接する四角形の性質およびその逆より, 四角形 $A'B'C'D'$ が外接円を持つことは, 四角形 $A'B'C'D'$ の向かい合う内角の和が $180^\circ$ であることと同値。以上より,

$$(\text{四角形 } A'B'C'D' \text{ が外接円を持つ}) \Leftrightarrow \angle P'A'S' + \angle Q'C'R' = 180^\circ \Leftrightarrow \angle P'T'Q' = 90^\circ \Leftrightarrow P'R' \perp Q'S'$$

(証明終)

I型双心五面体 $E-ABCD$ について, 補題1より, 四角形 $ABCD$ は双心四角形であり, 図5のように辺接球との接点を $P, Q, R, S, T, U, V, W$ とすると,  $AS=AP=AT, BP=BQ=BU, CQ=CR=CV, DR=DS=DW, ET=EU=EV=EW$ である。それぞれの長さを $a, b, c, d, e$ とする。点 $A, B, C, D$ を中心としてそれぞれ半径が $a+e, b+e, c+e, d+e$ である球を $S_a, S_b, S_c, S_d$ とし, これらを平面 $ABCD$ で切断してできる円を $C_a, C_b, C_c, C_d$ とする。

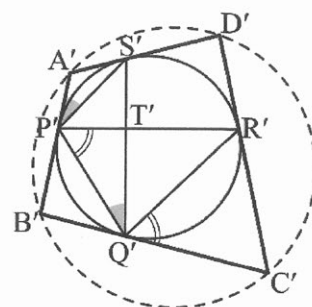


図4

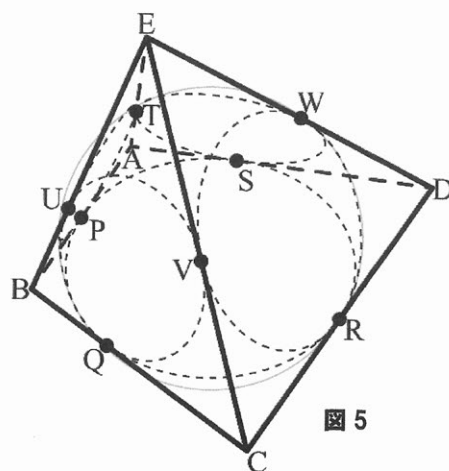


図5

点 E は 4 球  $S_a, S_b, S_c, S_d$  の共有点であるので、点 E は 4 本の交線 ( $S_a$  と  $S_b$ ,  $S_b$  と  $S_c$ ,  $S_c$  と  $S_d$ ,  $S_d$  と  $S_a$ ) に共有する点である (図 6)。これらの交線は平面 ABCD に垂直に射影したとき、それぞれ線分となり、それぞれ  $C_a$  と  $C_b$  の根軸  $l_{ab}$ ,  $C_b$  と  $C_c$  の根軸  $l_{bc}$ ,  $C_c$  と  $C_d$  の根軸  $l_{cd}$ ,  $C_d$  と  $C_a$  の根軸  $l_{da}$  と重なる。点 E を平面 ABCD に垂直に射影して得られる点を  $E'$  とすると、点  $E'$  は 4 つの根軸  $l_{ab}, l_{bc}, l_{cd}, l_{da}$  に共有する点だから、点 E が存在するためには、これらの 4 つの根軸が 1 点で交わる必要がある。ここで、四角形 ABCD の内接円の中心を I, 2 直線 PR, QS の交点を X, I を通り PR, QS に平行な直線をそれぞれ  $m, n$  とする。補題 2 より、双心四角形 ABCD の接触四角形 PQRS の対角線は垂直に交わるから、 $PR \perp QS$  であり、 $m \parallel PR, n \parallel QS$  より、 $m \perp n$

X が  $m$  上にも  $n$  上にもないとき、4 つの根軸が 1 点で交わらないことを示す。図 7 のように、X が  $m$  に関して A と同じ側にあり、X が  $n$  に関して A と同じ側にあるとしても一般性を失わない。このとき、図から、 $a < b < c$  かつ  $a < d < c$  である。まず 2 直線  $l_{ab}, l_{cd}$  が  $n$  上の点で交わることを示す。

X が  $m$  上にないとき、点 P, R は  $m$  上になく、このとき  $AB \times DC$  である。また、根軸は 2 円の中心を結んだ直線に垂直だから、 $l_{ab} \perp AB, l_{cd} \perp DC$

これと  $AB \times DC$  より、 $l_{ab} \times l_{cd} \dots (**)$

図 8 のように、 $l_{ab}$  と直線 AB の交点を Y,  $l_{cd}$  と直線 DC の交点を Z とし、 $BY=y, CZ=z$  とする。ここから、 $PY=RZ$  を示す。 $C_a, C_b$  の交点の 1 つを  $Y'$ ,  $C_d, C_c$  の交点の 1 つを  $Z'$  とすると、 $YY' \perp AB, ZZ' \perp DC$  だから、三平方の定理より、

$$\begin{aligned} & \begin{cases} AY'^2 - AY^2 = YY'^2 = BY'^2 - BY^2 \\ DZ'^2 - DZ^2 = ZZ'^2 = CZ'^2 - CZ^2 \end{cases} \\ & \therefore \begin{cases} (a+e)^2 - |(a+b)-y|^2 = (b+e)^2 - y^2 \\ (d+e)^2 - |(d+c)-z|^2 = (c+e)^2 - z^2 \end{cases} \\ & \therefore y = \frac{e(b-a)}{a+b} + b, \quad z = \frac{e(c-d)}{c+d} + c \end{aligned}$$

$a > 0, a < b < c, a < d < c, e > 0$  より、 $\frac{e(b-a)}{a+b} > 0, \frac{e(c-d)}{c+d} > 0$  だから、 $y > b, z > c$

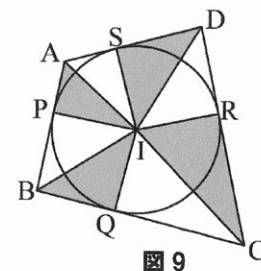
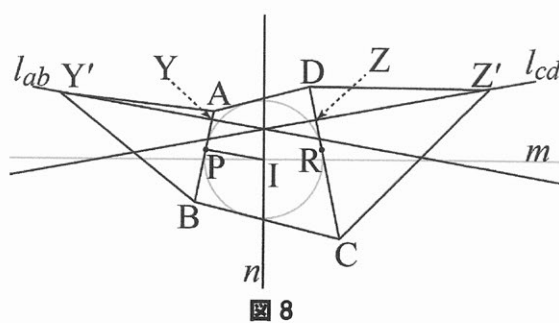
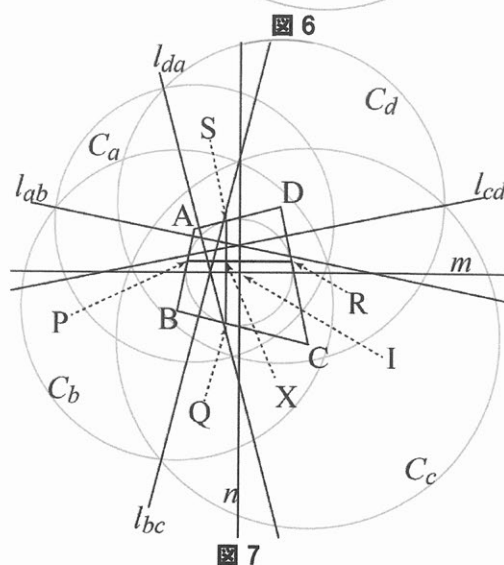
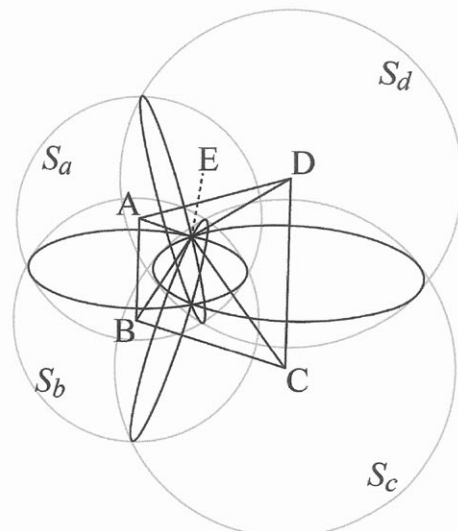
$$\text{よって、} PY = y - b = \frac{e(b-a)}{a+b} > 0, \quad RZ = z - c = \frac{e(c-d)}{c+d} > 0 \quad \therefore PY - RZ = \frac{e(b-a)}{a+b} - \frac{e(c-d)}{c+d} = \frac{2e(bd-ac)}{(a+b)(c+d)}$$

ここで、補題 3 を示して、 $PY - RZ = 0$  を導く。

**補題 3.**  $ac = bd$  である。

(証明)

四角形 ABCD の内接円の半径を  $r$  とし、図 9 のように点 I と 8 点 A, B, C, D, P, Q, R, S を線分で結ぶ。四角形 ABCD は円に内接するから、 $\angle PAS + \angle QCR = 180^\circ$



$$\therefore \angle PAI + \angle RCI = 90^\circ \quad \therefore \angle PAI = \angle RIC \quad (\because \angle RIC = 90^\circ - \angle RCI) \quad \therefore \triangle API \sim \triangle IRC \quad (\because \angle API = \angle IRC = 90^\circ, \angle PAI = \angle RIC)$$

$$\therefore AP : IR = PI : RC \Leftrightarrow a : r = r : c \Leftrightarrow ac = r^2$$

$$\text{同様に, } bd = r^2 \text{ だから, } ac = bd = r^2$$

(証明終)

**補題 3** より,  $bd - ac = 0$

$$\therefore PY - RZ = \frac{2e(bd - ac)}{(a+b)(c+d)} = 0$$

$$\therefore PY = RZ$$

$n$  に関して 2 点  $P, R$  と 2 直線  $AB, DC$  がそれぞれ対称であり, 2 点  $Y, Z$  が直線  $PR$  に対して同じ側にあり, さらに  $PY = RZ$  であることから, 2 点  $Y, Z$  も  $n$  に関して対称であり, 2 直線  $l_{ab}, l_{cd}$  も  $n$  に関して対称である。

これと(\*\*)より,  $l_{ab}, l_{cd}$  は  $n$  上の点で交わる。同様に,  $l_{bc}, l_{da}$  は  $m$  上の点で交わる。

点  $E$  が存在するためには, 4 直線  $l_{ab}, l_{bc}, l_{cd}, l_{da}$  が 1 点で交わる必要があるが, そのためにはこの 4 直線が  $m$  上かつ  $n$  上の点, すなわち点  $I$  で交わる必要がある。しかし,  $PI \not\parallel l_{ab}$  ( $\because PI \perp AB, l_{ab} \perp AB$ ) かつ  $PY > 0$  より,  $l_{ab}$  は点  $I$  を通らない。したがって, 点  $E$  は存在しない。

以上より,  $X$  が  $m$  上にも  $n$  上にもないとき不適であることが示された。

そのため,  $X$  は  $m$  上または  $n$  上にある。

(※)  $\left\{ \begin{array}{l} X \text{ が } m \text{ 上にあるとしても一般性を失わない。このとき, 四角形 } ABCD \text{ は } AB \parallel DC \text{ の等脚台形となる。} \\ \text{よって, } a = b \text{ かつ } c = d \Leftrightarrow a + e = b + e \text{ かつ } c + e = d + e \text{ となるから, } EA = EB, EC = ED \\ \text{したがって, } \triangle EAB \text{ と } \triangle ECD \text{ は二等辺三角形になる。} \end{array} \right.$

(証明終)

#### ④

③の(※)と同じ I 型双心五面体  $E-ABCD$  について考える。このとき, 四角形  $ABCD$  の内接円の中心は, 線分  $PR$  の中点である。三角形  $EPR$  の内心  $I'$  を中心とし, 面  $ABCD, EAB, ECD$  に接する球を  $S$  とする。五面体  $E-ABCD$  が平面  $EPR$  に関して対称であることに注意すると, 球  $S$  が五面体  $E-ABCD$  の内接球になるための条件は, 球  $S$  が面  $EBC$  に接することである。

$X$  が線分  $PR$  の中点であるとき,  $X$  は四角形  $ABCD$  の内接円の中心であり, 四角形  $ABCD$  は正方形になる。このとき,  $AB = BC = CD = DA, EA = EB = EC = ED$  より, 五面体  $E-ABCD$  は正四角錐であり, 球  $S$  は五面体  $E-ABCD$  の内接球になる。

ここからは,  $X$  が線分  $PR$  の中点でないときについて考える。**図 10** のように  $AB < CD$  としても一般性を失わない。このとき,  $a < c$  であり, 五面体  $E-ABCD$  は正四角錐でないから, 球  $S$  が五面体  $E-ABCD$  の内接球にならないことを示す。ここで, 球  $S$  の半径を  $r'$ , 点  $I'$  から平面  $EBC$  までの距離を  $d'$  とし,  $d' > r'$  を示す。点  $E$  から直線  $PR$  に下した垂線の足を  $H$  とし,  $RH = x, EH = h$  とする。

$$\begin{cases} EP^2 = EA^2 - AP^2 = (a+e)^2 - a^2 = e^2 + 2ae \\ ER^2 = EC^2 - CR^2 = (c+e)^2 - c^2 = e^2 + 2ce \end{cases} \quad \text{と } a < c \text{ より, } EP < ER \text{ だから, } \angle ERP < \angle EPR$$

よって,  $\angle ERP < 90^\circ$  だから, 点  $H$  は点  $R$  から見て点  $P$  と同じ側にあるの

$$\text{で, } PH = |RP - RH| = |2\sqrt{ac} - x|$$

$$(\because RP = \sqrt{BC^2 - (CR - BP)^2} = \sqrt{(a+c)^2 - (c-a)^2} = 2\sqrt{ac})$$

$$EH^2 = EH^2 \Leftrightarrow EP^2 - PH^2 = ER^2 - RH^2$$

$$\Leftrightarrow (e^2 + 2ae) - |2\sqrt{ac} - x|^2 = (e^2 + 2ce) - x^2$$

$$\therefore x = \frac{2ac - ae + ce}{2\sqrt{ac}} \quad \therefore h^2 = ER^2 - RH^2 = (e^2 + 2ce) - \left(\frac{2ac - ae + ce}{2\sqrt{ac}}\right)^2$$

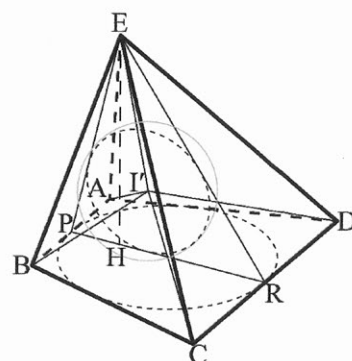


図 10

$$\therefore h = \frac{t}{2\sqrt{ac}} \quad \left( t = \sqrt{(6ac - a^2 - c^2)e^2 + 4ac(a+c)e - 4a^2c^2} \text{ とする} \right)$$

このとき、 $EH > 0$ ,  $2\sqrt{ac} > 0$  より、 $t > 0 \dots (1)$

$$\begin{cases} \triangle EPR = \frac{1}{2} \cdot PR \cdot EH = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{ac} \cdot h = \frac{t}{2} \\ \triangle EPR = \triangle I'EP + \triangle I'ER + \triangle I'PR = \frac{r'}{2} (\sqrt{e^2 + 2ae} + \sqrt{e^2 + 2ce} + 2\sqrt{ac}) \end{cases} \text{ より, } r' = \frac{t}{\sqrt{e^2 + 2ae} + \sqrt{e^2 + 2ce} + 2\sqrt{ac}}$$

五面体 E-ABCD の体積を  $V$ , 四角錐  $I'$ -ABCD, 三角錐  $I'$ -ABE,  $I'$ -CDE の体積の和を  $V_1$ , 三角錐  $I'$ -BCE,  $I'$ -ADE の体積の和を  $V_2$  とすると、 $V = V_1 + V_2$

台形 ABCD の面積は  $\frac{1}{2} \cdot (2a + 2c) \cdot 2\sqrt{ac} = 2\sqrt{ac}(a + c)$  であり、

$\triangle EAB = \frac{1}{2} \cdot 2a \cdot \sqrt{e^2 + 2ae} = a\sqrt{e^2 + 2ae}$ ,  $\triangle ECD = c\sqrt{e^2 + 2ce}$  だから、

$$V = \frac{1}{3} \cdot 2\sqrt{ac}(a + c) \cdot h = \frac{t}{3}(a + c)$$

$$V_1 = \frac{1}{3} \cdot \{2\sqrt{ac}(a + c) + a\sqrt{e^2 + 2ae} + c\sqrt{e^2 + 2ce}\} \cdot r' = \frac{t\{a\sqrt{e^2 + 2ae} + c\sqrt{e^2 + 2ce} + 2\sqrt{ac}(a + c)\}}{3(\sqrt{e^2 + 2ae} + \sqrt{e^2 + 2ce} + 2\sqrt{ac})}$$

ヘロンの公式より、 $s = \frac{CE + EB + BC}{2} = \frac{(c + e) + (e + a) + (a + c)}{2} = a + c + e$  として、

$$\triangle EBC = \sqrt{s(s - CE)(s - EB)(s - BC)} = \sqrt{ace(a + c + e)}$$

$V_2$  は三角錐  $I'$ -BCE の体積の 2 倍だから、

$$V_2 = \frac{1}{3} \cdot \sqrt{ace(a + c + e)} \cdot d' \cdot 2 = \frac{2}{3} d' \sqrt{ace(a + c + e)}$$

$$V = V_1 + V_2 \text{ より, } \frac{t}{3}(a + c) = \frac{t\{a\sqrt{e^2 + 2ae} + c\sqrt{e^2 + 2ce} + 2\sqrt{ac}(a + c)\}}{3(\sqrt{e^2 + 2ae} + \sqrt{e^2 + 2ce} + 2\sqrt{ac})} + \frac{2}{3} d' \sqrt{ace(a + c + e)}$$

$$\therefore d' = \frac{t}{2} \cdot \frac{a\sqrt{e + 2c} + c\sqrt{e + 2a}}{(\sqrt{e^2 + 2ae} + \sqrt{e^2 + 2ce} + 2\sqrt{ac})\sqrt{ac(a + c + e)}} \quad \therefore d' - r' = \frac{t}{2} \cdot \frac{a\sqrt{e + 2c} + c\sqrt{e + 2a} - 2\sqrt{ac}(a + c + e)}{(\sqrt{e^2 + 2ae} + \sqrt{e^2 + 2ce} + 2\sqrt{ac})\sqrt{ac(a + c + e)}}$$

$d' > r'$  を示すために、示すべき不等式は、 $d' - r' > 0 \Leftrightarrow a\sqrt{e + 2c} + c\sqrt{e + 2a} - 2\sqrt{ac}(a + c + e) > 0$

$$\left( \because t > 0, \sqrt{e^2 + 2ae} + \sqrt{e^2 + 2ce} + 2\sqrt{ac} > 0, \sqrt{ac(a + c + e)} > 0 \right)$$

よって、 $a\sqrt{e + 2c} + c\sqrt{e + 2a} - 2\sqrt{ac}(a + c + e)$  を  $e$  の関数と見て  $f(e)$  とおき、 $f(e) > 0$  を示せばよい。

ここで、**補題 4** を示す。

**補題 4.**  $f(e)$  は  $e > 0$  で狭義単調増加である。

(証明)

$f(e) = a\sqrt{e + 2c} + c\sqrt{e + 2a} - 2\sqrt{ac}(a + c + e)$  について、根号内は 0 以上より、

$$e + 2c \geq 0, e + 2a \geq 0, ac(a + c + e) \geq 0 \quad \therefore e \geq -2a \quad (\because 0 < a < c)$$

よって、 $f(e)$  は  $e \geq -2a$  で定義されるから、 $e > 0$  は定義域に含まれる。 $e > 0$  のとき、

$$f'(e) > 0 \Leftrightarrow \frac{a}{2\sqrt{e + 2c}} + \frac{c}{2\sqrt{e + 2a}} - \frac{\sqrt{ac}}{\sqrt{a + c + e}} > 0 \Leftrightarrow \sqrt{a + c + e} \left( \frac{a}{\sqrt{e + 2c}} + \frac{c}{\sqrt{e + 2a}} \right) > 2\sqrt{ac} \quad (\because \sqrt{a + c + e} > 0)$$

を示せばよい。 $\frac{a}{\sqrt{e + 2c}} > 0, \frac{c}{\sqrt{e + 2a}} > 0$  だから、相加平均と相乗平均の関係より、

$$\frac{a}{\sqrt{e + 2c}} + \frac{c}{\sqrt{e + 2a}} \geq 2\sqrt{\frac{a}{\sqrt{e + 2c}} \cdot \frac{c}{\sqrt{e + 2a}}} = \frac{2\sqrt{ac}}{\sqrt[4]{(e + 2c)(e + 2a)}} \dots (2)$$

$\sqrt{a + c + e} > 0, \sqrt[4]{(e + 2c)(e + 2a)} > 0$  より、これらは 4 乗しても大小関係は変わらない。このとき、

$$(\sqrt{a + c + e})^4 - \left( \sqrt[4]{(e + 2c)(e + 2a)} \right)^4 = (a + c + e)^2 - (e + 2c)(e + 2a) = (c - a)^2 > 0 \quad (\because a < c) \text{ より,}$$

$$(\sqrt{a+c+e})^4 > (\sqrt[4]{(e+2c)(e+2a)})^4 \text{ だから, } \sqrt{a+c+e} > \sqrt[4]{(e+2c)(e+2a)}$$

$$\text{両辺 } \sqrt[4]{(e+2c)(e+2a)} (> 0) \text{ で割って, } \frac{\sqrt{a+c+e}}{\sqrt[4]{(e+2c)(e+2a)}} > 1 \dots (3)$$

$$\text{したがって, (2), (3) より, } \sqrt{a+c+e} \left( \frac{a}{\sqrt{e+2c}} + \frac{c}{\sqrt{e+2a}} \right) \geq \sqrt{a+c+e} \cdot \frac{2\sqrt{ac}}{\sqrt[4]{(e+2c)(e+2a)}} > 2\sqrt{ac}$$

すなわち,  $f'(e) > 0$  だから,  $f(e)$  は  $e > 0$  で狭義単調増加である。 (証明終)

(1) より,  $(6ac - a^2 - c^2)e^2 + 4ac(a+c)e - 4a^2c^2 > 0$  である。この左辺を  $e$  の関数と見て,  $g(e)$  とする。 $d' > r'$  を示すためには, 「 $g(e) > 0$  ならば  $f(e) > 0$ 」を示せばよい。

(i)  $6ac - a^2 - c^2 \neq 0$  のとき

$g(e) = 0$  の判別式を  $D$  とすると,  $D = 128a^3c^3 > 0$  ( $\because a > 0, c > 0$ ) より,  $g(e) = 0$  は異なる 2 つの実数解を持つ。その 2 解を  $\alpha = \frac{2ac}{6ac - a^2 - c^2}(2\sqrt{2ac} - a - c)$ ,  $\beta = \frac{2ac}{6ac - a^2 - c^2}(-2\sqrt{2ac} - a - c)$  とおく。

(i)-a)  $6ac - a^2 - c^2 > 0$  のとき

$$\alpha - \beta = \frac{8ac\sqrt{2ac}}{6ac - a^2 - c^2} > 0 \text{ より, } \alpha > \beta$$

また,  $g(0) = -4a^2c^2 < 0$  より,  $y = g(e)$  のグラフは図 11 のようになり,  $\alpha > 0$  である。

$e > 0$  に注意して,  $g(e) > 0 \Leftrightarrow e > \alpha$

(i)-b)  $6ac - a^2 - c^2 < 0$  のとき

$$\alpha - \beta = \frac{8ac\sqrt{2ac}}{6ac - a^2 - c^2} < 0 \text{ より, } \alpha < \beta$$

また,  $g(0) = -4a^2c^2 < 0$ ,  $\alpha + \beta = \frac{-4ac(a+c)}{6ac - a^2 - c^2} > 0$  より,  $y = g(e)$  のグラフは

図 12 のようになり,  $\alpha > 0 \quad \therefore g(e) > 0 \Leftrightarrow \alpha < e < \beta$

以上(i)-a),(i)-b)より, 「 $e > \alpha$  ならば  $f(e) > 0$ 」を示せばよい。ここで,  $f(\alpha) = 0$  を示す。

$$p = \sqrt{a}, q = \sqrt{c} \text{ とすると, } 0 < p < q \text{ (} \because 0 < a < c \text{)} \text{ であり, } \alpha = \frac{4\sqrt{2}p^3q^3 - 2p^4q^2 - 2p^2q^4}{6p^2q^2 - p^4 - q^4}$$

$$f(\alpha) = 0 \Leftrightarrow a\sqrt{a+2c} + c\sqrt{a+2a} = 2\sqrt{ac(a+c+\alpha)}$$

$$\Leftrightarrow (a\sqrt{a+2c} + c\sqrt{a+2a})^2 = 4ac(a+c+\alpha) \text{ (} \because a > 0, c > 0, \alpha > 0 \text{ より両辺正)}$$

$$\Leftrightarrow 2ac\sqrt{(a+2a)(a+2c)} = (4ac - a^2 - c^2)\alpha + 2ac(a+c)$$

$$\Leftrightarrow 4a^2c^2(\alpha+2a)(\alpha+2c) = \{(4ac - a^2 - c^2)\alpha + 2ac(a+c)\}^2$$

$$\text{かつ } (4ac - a^2 - c^2)\alpha + 2ac(a+c) \geq 0$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow & (p^8 - 8p^6q^2 + 14p^4q^4 - 8p^2q^6 + q^8)(2\sqrt{2}pq - p^2 - q^2)^2 \\ & + 2(-p^6 + p^4q^2 + p^2q^4 - q^6)(2\sqrt{2}pq - p^2 - q^2)(6p^2q^2 - p^4 - q^4) \\ & + (p^4 - 2p^2q^2 + q^4)(6p^2q^2 - p^4 - q^4)^2 = 0 \dots (4) \end{aligned}$$

$$\text{かつ } (4p^2q^2 - p^4 - q^4)(2\sqrt{2}pq - p^2 - q^2)(6p^2q^2 - p^4 - q^4)$$

$$+ (p^2 + q^2)(6p^2q^2 - p^4 - q^4)^2 \geq 0 \dots (5) \text{ (} \because p^2q^2 > 0, (6p^2q^2 - p^4 - q^4)^2 > 0 \text{)}$$

(4) は左辺を展開して整理すると 0 になるので, 成り立つ。

(5) の左辺は因数分解すると  $(p^2 - 2\sqrt{2}pq + q^2)^2(p^2 + 2\sqrt{2}pq + q^2)(\sqrt{2}p^2 + 3pq + \sqrt{2}q^2)$  になり,

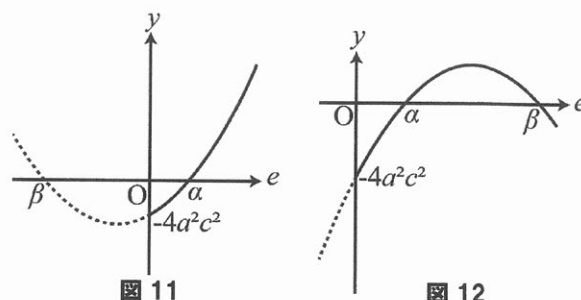


図 11

図 12

$(p^2 - 2\sqrt{2}pq + q^2)^2 \geq 0, p^2 + 2\sqrt{2}pq + q^2 > 0, \sqrt{2}p^2 + 3pq + \sqrt{2}q^2 > 0$  ( $\because p > 0, q > 0$ ) より,

(5) も成り立つ。したがって、 $f(\alpha) = 0$

これと  $\alpha > 0$ , 補題 4 を合わせて、 $e > \alpha$  のとき常に  $f(e) > f(\alpha) = 0 \quad \therefore d' > r'$

(ii)  $6ac - a^2 - c^2 = 0 \Leftrightarrow a^2 + c^2 = 6ac$  のとき

$g(e) > 0 \Leftrightarrow e > \frac{ac}{a+c}$  だから、 $\gamma = \frac{ac}{a+c}$  として、「 $e > \gamma$  ならば  $f(e) > 0$ 」を示せばよい。

ここで、 $a > 0, c > 0, \gamma > 0$  に注意して、 $f(\gamma) = 0$  を示す。

$$\begin{aligned} f(\gamma) = 0 &\Leftrightarrow 2ac\sqrt{(\gamma+2a)(\gamma+2c)} = (4ac - a^2 - c^2)\gamma + 2ac(a+c) \\ &\Leftrightarrow 2ac\sqrt{\{ac+2a(a+c)\}\{ac+2c(a+c)\}} = (4ac - a^2 - c^2)ac + 2ac(a+c)^2 \\ &\Leftrightarrow 2\sqrt{ac\{6(a^2+c^2)+13ac\}} = \{4ac - (a^2+c^2)\} + 2\{(a^2+c^2)+2ac\} \\ &\Leftrightarrow 2\sqrt{ac(6 \cdot 6ac + 13ac)} = (4ac - 6ac) + 2(6ac + 2ac) \quad (\because a^2+c^2=6ac) \\ &\Leftrightarrow 14ac = 14ac \end{aligned}$$

よって、 $f(\gamma) = 0$  であり、これと  $\gamma > 0$ , 補題 4 を合わせて、 $e > \gamma$  のとき常に  $f(e) > f(\gamma) = 0 \quad \therefore d' > r'$

以上より、X が線分 PR の中点でないとき、 $d' > r'$  だから球 S は五面体 E-ABCD の内接球にならず、五面体 E-ABCD は内接球をもたない。

以上より、④の証明ができた。

(証明終)

⑤

図 13 のように、II 型双心五面体 ABC-DEF の各辺と辺接球との接点を P, Q, R, S, T, U, V, W, X とする。

補題 1 より、四角形 ABED, BCFE, CADF は双心四角形である。  
AD//BE より、四角形 ABED の内接円は線分 PQ を直径とする円である。さらに、補題 2 より、 $PQ \perp UX$  だから、2 点 U, X は直線 PQ に関して対称になる。よって、2 直線 AB, DE は直線 PQ に関して対称になり、また、直線 AD と直線 BE はそれぞれ直線 PQ に関して対称だから、四角形 ABED は直線 PQ に関して対称。したがって、四角形 ABED は等脚台形である。同様に、四角形 BCFE, CADF も等脚台形である。

(証明終)

⑥

⑤と同じ II 型双心五面体 ABC-DEF について考える。図 14 のように、三角形 PQR の内心 I を中心とし、面 ABED, BCFE, CADF に接する球を S とする。球 S の半径を  $r$  とする。五面体 ABC-DEF が平面 PQR に関して対称であることに注意すると、球 S が五面体 ABC-DEF の内接球になるための条件は、球 S が面 ABC に接することである。AP = a, BQ = b, CR = c とすると、

$$AB = a + b, BC = b + c, CA = c + a, PQ = \sqrt{AB^2 - |AP - BQ|^2} = \sqrt{(a+b)^2 - |a-b|^2} = 2\sqrt{ab},$$

QR =  $2\sqrt{bc}$ , RP =  $2\sqrt{ca}$  であり、三角形 PQR の成立条件より、

$$PQ + QR > RP \Leftrightarrow \sqrt{ab} + \sqrt{bc} > \sqrt{ca} \Leftrightarrow \sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ca} > 2\sqrt{ca}$$

$$\text{これと} \quad \begin{cases} \triangle PQR = \frac{1}{2} PQ \cdot QR \sin \angle PQR = 2b\sqrt{ac} \sin \angle PQR \\ \triangle PQR = \triangle IPQ + \triangle IQR + \triangle IRP = r(\sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ca}) \end{cases} \quad \text{より,}$$

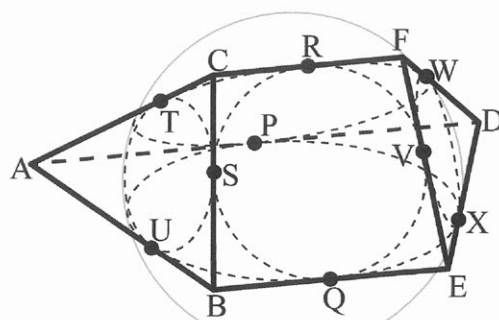


図 13

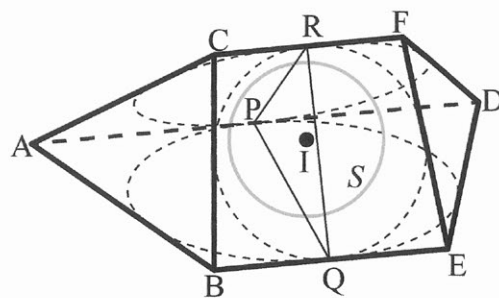


図 14

$$r = \frac{2b\sqrt{ac} \sin \angle PQR}{\sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ca}} < \frac{2b\sqrt{ac} \sin \angle PQR}{2\sqrt{ca}} = b \sin \angle PQR \leq b$$

よって、 $r < b$ である。同様に、 $r < a, r < c$ だから、球  $S$  が面  $ABC$  に接することはない。したがって、五面体  $ABC-DEF$  は内接球を持たない。

(証明終)

⑦

Ⅲ型双心五面体  $ABC-DEF$  について、補題 1 より、四角形  $ABED, BCFE, CADF$  は双心四角形であり、図 15 のように辺接球との接点を  $P, Q, R, S, T, U, V, W, X$  とし、3 直線  $AD, BE, CF$  の交点を  $G$  とすると、 $AP=AT=AU, BQ=BU=BS, CR=CS=CT, DP=DW=DX, EQ=EX=EV, FR=FV=FW, GP=GQ=GR$  である。それぞれの長さを  $a, b, c, d, e, f, g$  とする。なお、点  $G$  が平面  $PQR$  に対して  $A$  と同じ側にあるとしても一般性を失わないので、点  $G$  は平面  $PQR$  に対して  $A$  と同じ側にあるものとする。

補題 3 と同様にして以下が示せる。

$$ae = bd, bf = ce, cd = af \quad \therefore \frac{d}{a} = \frac{e}{b} = \frac{f}{c}$$

$$\text{ここで、} \frac{d}{a} = \frac{e}{b} = \frac{f}{c} = k \text{ とすると、} d = ka, e = kb, f = kc$$

四角形  $ABED$  の外接円に対する方べきの定理より、

$$GA \cdot GD = GB \cdot GE \Leftrightarrow (g-a)(g+ka) = (g-b)(g+kb) \Leftrightarrow (a-b)\{k(a+b) - (k-1)g\} = 0 \cdots (***)$$

(i)  $a, b, c$  の値がすべて異なるとき

$$(***) \Leftrightarrow a+b = \frac{(k-1)g}{k} \text{ であり、同様に } b+c = \frac{(k-1)g}{k} \text{ だから、辺々引いて、} a-c=0$$

よって、 $a=c$  となり、 $a \neq c$  に矛盾。

(ii)  $a, b, c$  のうち 2 つが等しく、もう 1 つは値が異なるとき

$$a \neq b, b \neq c, c = a \text{ としても一般性を失わない。このとき、} (***) \Leftrightarrow b = \frac{(k-1)g}{k} - a$$

$c = a$  より、四角形  $CFDA$  は図 16 のような等脚台形となる。四角形  $CFDA$  の内接円の中心を  $I$ 、半径を  $r$  とすると、補題 3 と同様にして  $af = r^2$  が示せる

$$\text{から、} f = kc = ka (\because c = a) \text{ より、} a \cdot ka = r^2 \quad \therefore r = \sqrt{ka}$$

また、 $\triangle GTA \sim \triangle GPI \sim \triangle GWD$  ( $\because$  二角相等) より、

$$GT:TA = GP:PI = GW:WD \Leftrightarrow GT:a = g:\sqrt{ka} = GW:ka$$

$$\therefore GT = \frac{g}{\sqrt{k}}, GW = \sqrt{k}g \quad \therefore TW = \sqrt{k}g - \frac{g}{\sqrt{k}}$$

$$\text{さらに、} TW = \sqrt{AD^2 - (DW - AT)^2} = \sqrt{(a+ka)^2 - (ka-a)^2} = 2\sqrt{ka} \text{ だから、}$$

$$\sqrt{k}g - \frac{g}{\sqrt{k}} = 2\sqrt{ka} \quad \therefore (k-1)g = 2ka$$

$$\text{よって、} b = \frac{(k-1)g}{k} - a = \frac{2ka}{k} - a = a \text{ となり、} a \neq b \text{ に矛盾。}$$

以上 (i) (ii) より、考えられるのは  $a = b = c$  の場合のみである。このとき、 $GA=GB=GC, AB=BC=CA$  だから、三角錐  $G-ABC$  は正三角錐である。同様に、 $GD=GE=GF, DE=EF=FD$  だから、三角錐  $G-DEF$  も正三角錐である。したがって、五面体  $ABC-DEF$  は正三角錐  $G-DEF$  から正三角錐  $G-ABC$  を取り除いてできる三角錐台である。

(証明終)

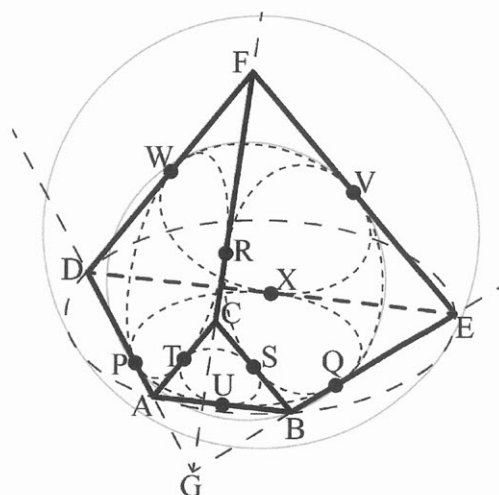


図 15

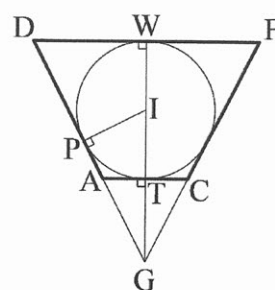


図 16

## ⑧

⑦と同じⅢ型双心五面体 ABC-DEF について考える。この五面体が内接球  $S$  を持つとする。このとき対称性より、球  $S$  と面 ABC, DEF, BEFC との接点はそれぞれ、 $\triangle ABC$  の内心  $I_1$ ,  $\triangle DEF$  の内心  $I_2$ , 線分 SV 上の点 Y になる (図 17)。このとき、 $SV = SY + VY = SI_1 + VI_2 = \frac{b}{\sqrt{3}} + \frac{e}{\sqrt{3}}$

また、四角形 BEFC は内接円を持つ等脚台形より、 $BE = BS + EV = b + e$  だから、

$$\begin{aligned} SV &= \sqrt{BE^2 - (EV - BS)^2} = \sqrt{(b+e)^2 - (e-b)^2} = 2\sqrt{be} \\ \therefore \frac{b}{\sqrt{3}} + \frac{e}{\sqrt{3}} &= 2\sqrt{be} \Leftrightarrow b^2 - 10be + e^2 = 0 \Leftrightarrow e = (5 \pm 2\sqrt{6})b \\ \therefore e &= (5 + 2\sqrt{6})b \quad (\because 0 < b < e) \end{aligned}$$

このとき、 $BE = b + e = (6 + 2\sqrt{6})b$  であり、

$$\begin{aligned} BC : BE : CF : EF &= 2b : (6 + 2\sqrt{6})b : (6 + 2\sqrt{6})b : 2(5 + 2\sqrt{6})b \\ &= (\sqrt{3} - \sqrt{2}) : \sqrt{3} : \sqrt{3} : (\sqrt{3} + \sqrt{2}) \end{aligned}$$

以上により⑧の証明ができた。

(証明終)

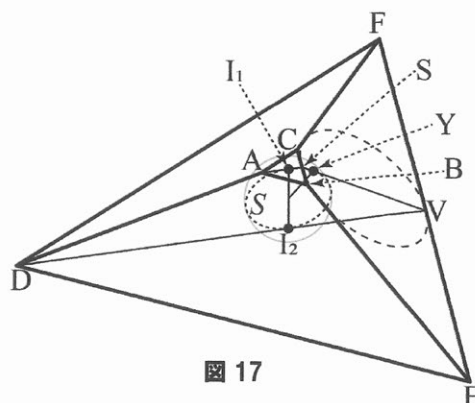


図 17

## 4. 考察・今後の課題

四面体が双心四面体になるための条件(\*)は、辺の長さのみの条件であり、二等辺三角形などの特別な面を持たなくてもよい。これは、三角形が常に外接円と内接円を持つので、辺接球との接点が定まることだけが必要だったからだと考えられる。一方で、双心五面体は必ず等脚台形の面を持つ。このことから、頂点が4つよりも多いことと、双心四角形の面があることが強い制約をもたらしたと考えられる。特に、内接球を持つ双心五面体は対称性が高く、Ⅲ型のものはすべて互いに相似である。よって、外接球・辺接球・内接球のすべてを持つ、四面体を除いた多面体は対称性が高いと考えられる。

双心多面体について様々な興味深い性質が明らかになったが、表面積・体積、球の半径、6面以上を持つ双心多面体について議論の余地がある。 $n$ 次元( $n \geq 4$ )への拡張について考えると、双心四角形の定義を参考にして、双心 $n$ 次元多面体の定義は「すべての $(n-1)$ 次元面に接する $n$ 次元球体と、すべての $(n-2)$ 次元面に接する $n$ 次元球体を両方持つ $n$ 次元多面体」または「すべての $(n-1)$ 次元面に接する $n$ 次元球体と、すべての頂点(0次元面)に接する $n$ 次元球体を両方持つ $n$ 次元多面体」とするとよいと考えられる。これをもとにすると、双心3次元多面体の定義には「外接球と辺接球」ではなく「内接球と辺接球」または「内接球と外接球」を用いるのが自然だったと考えられる。双心多面体の定義を変えることで、新たな結果が得られると思われる。

球と多面体の関係について、これからも様々な視点から研究を続けていきたい。

## 5. 参考文献・使用ツール

- [1] GeoGebra 全機能版 <https://www.geogebra.org/classic?lang=ja>
- [2] Wolfram|Alpha: 計算知能 <https://www.wolframalpha.com/>
- [3] Adobe Illustrator 2025
- [4] Microsoft Word

(いずれも最終閲覧 2025/08/22)