

ペンローズパターンの規則性の拡張

灘高等学校 2年 翟 潤奇

1 研究主旨

この研究では、ペンローズパターンという特殊な敷き詰め模様の規則性について研究した。

今回の研究において、ペンローズパターンの模様の規則性に加えて、対称性や別形態について研究した。

2 研究動機

ある化学の講座で、グラフェン2枚を $\theta=30^\circ$ の角度で重ねるとモアレ模様ではなく不規則なペンローズパターンというものが現れるのを知った。しかし、ペンローズパターンは近くから見たら不規則だけど、実際広く見ると何かしらの模様、規則、そして敷き詰めの方針などがあると思い、研究を行った。

3 研究結果

ペンローズパターンによく現れる星の形を「星」、星の中心にある点を「星の中心」と呼ぶ。また、黄金比 $\Phi=(1+\sqrt{5})/2$ とする。

3.1 ペンローズパターンの模様に関する研究

3.1.1 模様の規則性

まず、星の中心を繋げる作業を行うと、図1のように、同じ2種類の菱形を使ったペンローズパターンがもう一度現れる。

このパターンの「星の中心」を繋げるとまた新しいペンローズパターンが生まれ、無限に循環する。

元の菱形の一辺の長さを1とすると、1回作業を繰り返すと(赤)、新しくできた模様の菱形の一辺の長さが $2+\sqrt{5}=\Phi^3$ 、つまり、元の模様を Φ^3 倍拡張している模様が現れた。

さらに、できた模様でもう一回上の作業を繰り返すと(青)、新しくできた模様の菱形の一辺の長さが $9+4\sqrt{5}=\Phi^6$ である。

ここで結論が出る:

上の作業を $n(n \geq 0, n \in \mathbb{Z})$ 回繰り返す時、菱形の一辺の長さは Φ^{3n} となる



図1

さて、 $n < 0$ の時、意味はあるかを考えた。そこで、一回の作業を繰り返した時に現れる二つの菱形の中にある模様を見ると、
全ての $108^\circ, 72^\circ$ の菱形の中は図2、全ての $144^\circ, 36^\circ$ の菱形の中は図3のような線対称の模様が現れた。

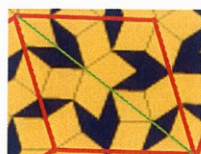


図2



図3

同じ形の菱形をランダムに二つ選んだら中の模様は必ず同じである。
つまり、 $n < 0$ の時は、現存する菱形の中に模様を書き込むことである。
この法則に従い、図4、図5のように実際に自分でペンローズパターンを拡張した。(赤、青、紫の線はそれぞれ作業を1回、2回、3回行ったときのペンローズパターンである)
※今後模様にところどころ現れる白い線は編集上の誤差であり、研究への影響はない。

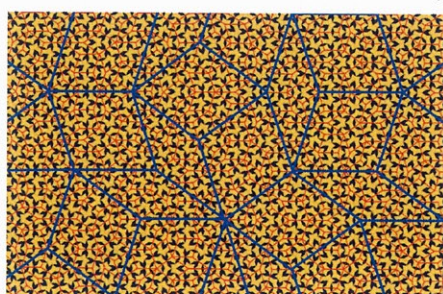


図4

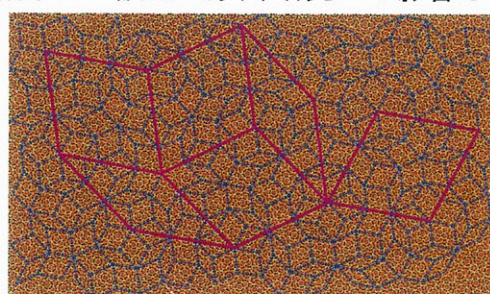


図5

3.1.2 綺麗な星の規則性

次に、星を分類して規則を観察するにあたって、このパターンに存在する5次対称がある次の2種類の模様について研究した。これを「綺麗な星」と呼ぶ。

図6の模様の星の中心を赤、図7の模様の星の中心を青でマークし、線で繋げた結果、図8のような模様になり、またしても新しいペンローズパターンが現れた。



図6

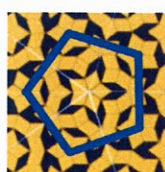


図7

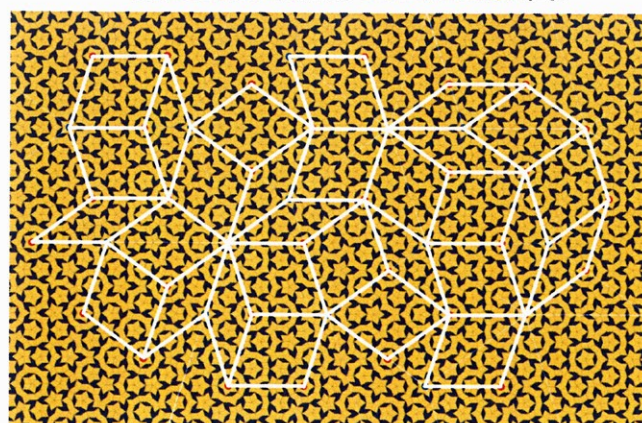


図8

元の菱形の一辺の長さを1とすると、新しい菱形の一辺の長さは $(5\sqrt{5}+11)/2 = \phi^5$ である。

また、できた菱形の中の模様を観察したら、全ての 108° 72° の菱形の中は図9、全ての 144° 36° の菱形の中は図10のような線対称の規則的な模様が現れた。

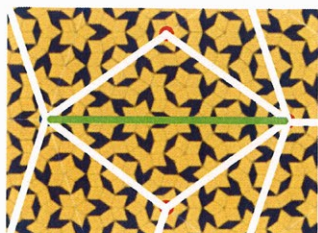


図9

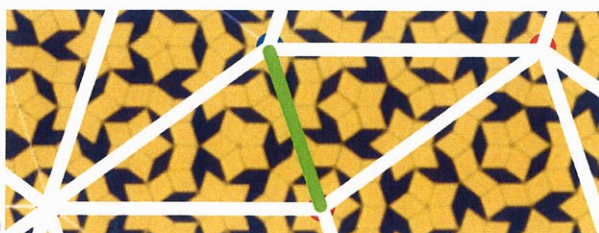


図10

図8を観察すると、二種類の菱形の4つの頂点は、必ず赤の頂点3つと青の頂点1つで構成されている。

さらに、綺麗な星の中でも、図1のような特徴的な5次対称性を持つ模様(「特に綺麗な星」と名付ける)を取り出して調べてみた。



図11



図12

この2種類の星の中心を繋げてみると、

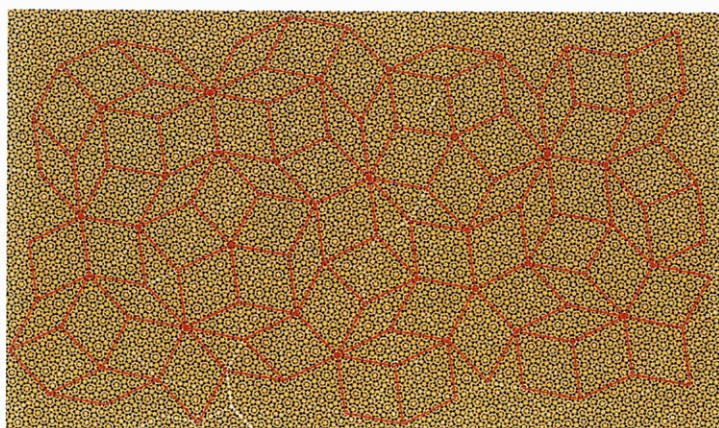


図13

図13のペンローズパターンが浮かび上がった。

新しい菱形の一辺の長さは $(29+13\sqrt{5})/2=\Phi^7$ である。

3.1.3 ペンローズパターンと黄金比

3.1.1、3.1.2で見つけた値を分析すると、 $2+\sqrt{5}=\Phi^3$ 、 $9+4\sqrt{5}=\Phi^6$ 、 $(5\sqrt{5}+11)/2=\Phi^5$ 、 $(29+13\sqrt{5})/2=\Phi^7$ と、全ての辺の長さが黄金比の整数乗になっていることがわかる。

さて、ここで菱形の一辺の長さが1のペンローズパターンがあれば、一辺の長さが Φ^n ($n \in \mathbb{Z}$)のペンローズパターンを全て作ることができるのかという問題について考えてみた。

(i) $n=3k$ ($k \in \mathbb{N}$)のとき、3.1.1の作業を繰り返せば全て得られる。

(ii) $n=3k+1$ ($k \in \mathbb{N}, k \geq 2$)のとき、3.1.2の特に綺麗な星に対する作業を一回行った後、新しい模様に対して3.1.1の作業を行えば全て得られる。

(iii) $n=3k+2 (k \in \mathbb{N})$ のとき、3.1.2の綺麗な星に対する作業を一回行った後、新しい模様に対して3.1.1の作業を行えば全て得られる。

(iv) $n=1,4$ のとき、3.1.1の作業を2回いい、一辺の長さが ϕ^6 のペンローズパターンを作ったあと、その模様にある菱形に(iii)の作業で使った一辺の長さが ϕ^5 の菱形を嵌めると、一辺の長さが $\phi^6/\phi^5=\phi$ のペンローズパターンが得られる。実際に作業をしてみると、図4の青で囲まれている菱形に図8の白で囲まれている菱形をはめると、図14のような模様ができる。



図14

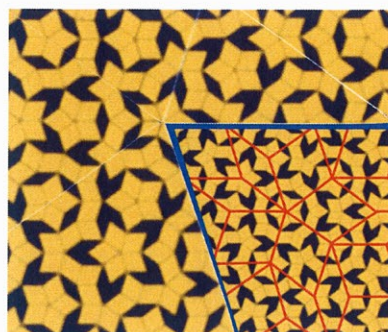


図15

右下の一部をめくると図15のように、確かに新しいペンローズパターンの一辺の長さは ϕ になっている。この一辺が ϕ の菱形模様に対して3.1.1の作業を1回行うと一辺の長さが ϕ^4 のペンローズパターンを作ることができる。

(v) $n=2$ のとき、一辺の長さが1のペンローズパターンに対し3.1.1の作業を1回いい、その模様にある菱形に一辺の長さが ϕ のペンローズパターンの菱形を嵌めると、一辺の長さが $\phi^3/\phi=\phi^2$ のペンローズパターンを作ることができる。

(vi) $n=0$ のとき、元のペンローズパターンである。

(vii) $n<0 (n \in \mathbb{Z})$ のとき、(i)~(v)までの作業に対し、全て逆の作業を行えばよい。逆の作業とは、元の菱形の星の中心を繋げる作業に対し、繋げたあとにできる模様の菱形と同じ大きさの菱形を元の模様にはめ込む作業である。

(i)、(ii)、(iii)、(iv)、(v)、(vi)、(vii)より、一辺の長さが1のペンローズパターンがあれば、辺の長さが $\phi^n (n \in \mathbb{Z})$ のペンローズパターンを全て作ることができる。

つまり、ペンローズパターンは点を繋げるだけで黄金比倍において自由に拡大と縮小をすることが可能である。

3.2 ペンローズパターンの別形態とペンローズパターンの対称軸

3.2.1 ペンローズパターンの第二形態

図16~21のペンローズパターンにある6種類の星の中心に注目してみた。

この6種類をそれぞれ「綺麗な凸星」(図16)、「一部凸星」(図17)、「ほとんど凸星」(図18)、「綺麗な凹星」(図19)、「一部凹星」(図20)、「ほとんど凹星」(図21)と定義する。(今後はき凸、一凸、ほ凸、き凹、一凹、ほ凹とそれぞれ表記する)

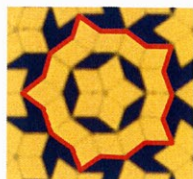


図16

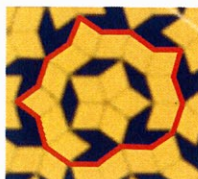


図17

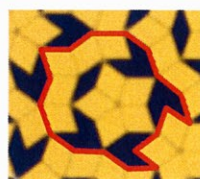


図18

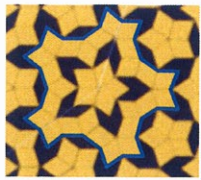


図19

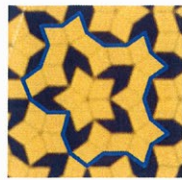


図20

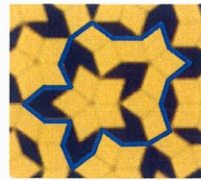


図21

図5の一部に対し、特定の星の中心だけを取り出して繋げてみるとどのようなことが起きるのか調べてみた。

(1)き凸+き凹→3.1.2

(2)一凸+ほ凸(図22)、一凹+ほ凹(図23)、「特に綺麗な星」を除いたき凸(図24)、「特に綺麗な星」をのぞいたき凹(図25)、凸の方の特に綺麗な星のみ(図26)、凹の方の特に綺麗な星のみ(図27)



図22

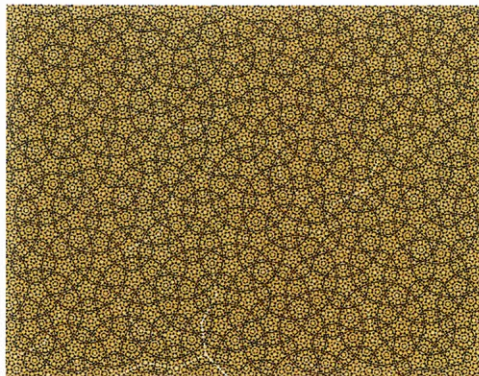


図23

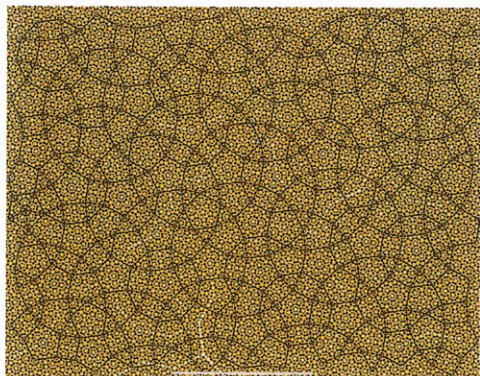


図24

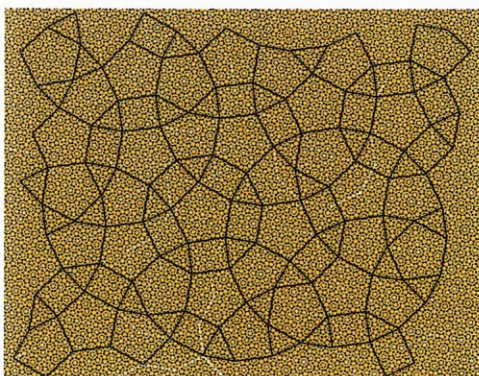


図25

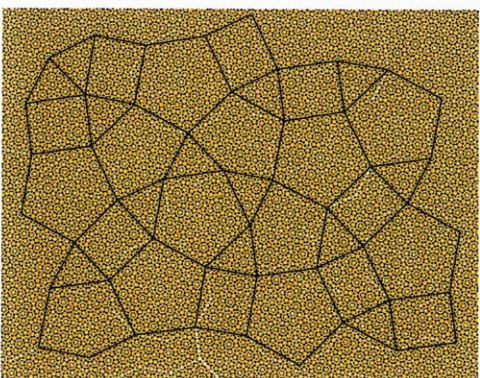


図26

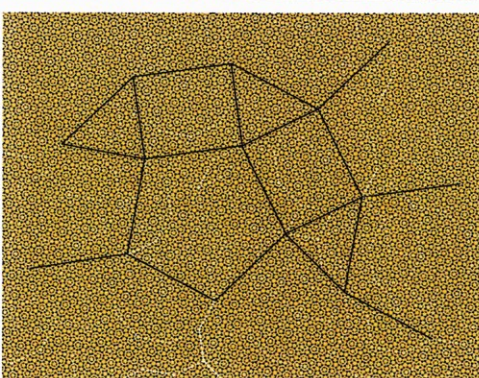


図27

この6種類の模様を見ると、全ての図28の4種類の図形で敷き詰められる模様で敷き詰められている。この模様を「ペンローズパターンの第二形態」とする。

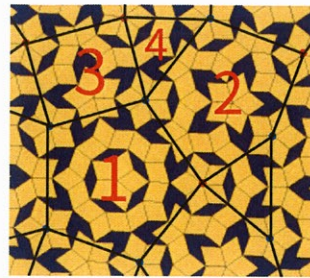


図28

図28の3の長方形の短い辺をa、長い辺をbとおき、(2)の6種類の模様のaの長さを調べてみると、それぞれ ϕ^3 、 ϕ^4 、 ϕ^5 、 ϕ^6 、 ϕ^7 、 ϕ^8 である。ここでまた黄金比との繋がりが見られる。

また、どの模様も次の図のような二十角形の模様と一辺の長さがbの正五角形を組み合わせて作ったものであることがわかる。(図29は図24の模様に見える二十角形)

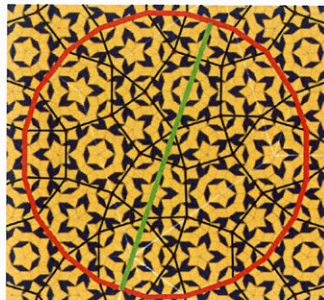


図29

この二十角形に注目すると、いくつかのおもしろい特徴がある。

1. この二十角形の辺はaとbが交互にならべられている。
 2. この二十角形には五次対称性がなく、1本しか対称軸がない。
- (2)において、二十角形の中にある1の正五角形の真ん中にある星の中心を点で打ち、特に綺麗な星以外を結ぶと、元の模様の ϕ^4 倍の模様が浮かび上がる(図30)。

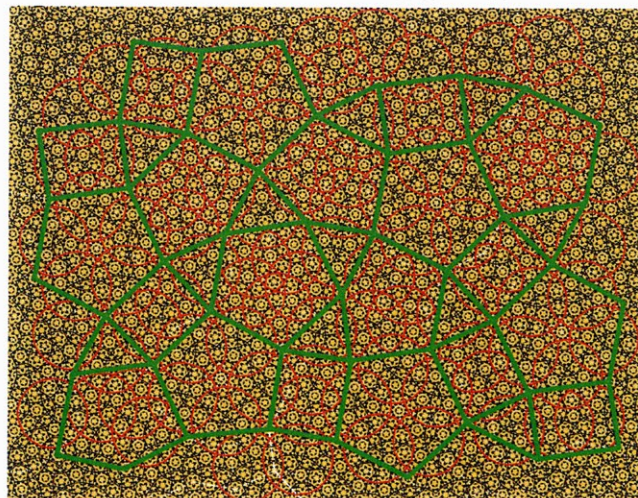


図30

よって、3.1.3と同様に考えると、ペンローズパターンの第二形態も ϕ 倍においては自由に拡大と縮小を行うことができる。

ここで、ペンローズパターン全体における対称軸について考える。

ペンローズパターンは自己相似的な模様であるため、ペンローズパターンを拡張するのとともに、より拡張されたペンローズパターンの第二形態をつくることができる。そのため、どの大きさのペンローズパターンを観測しても第二形態を書けば必ずその観測範囲における対称軸(「暫定の対称軸」と呼ぶ)を見つけることができるが、その模様を拡大・縮小をすると元の暫定の対称軸が新しい模様の暫定の対称軸にもなっているかどうかは不確かである。例として、図5のペンローズパターンの一部とさらにその左上を切り取った一部を比べてみる(図31と紫で囲まれた部分)。

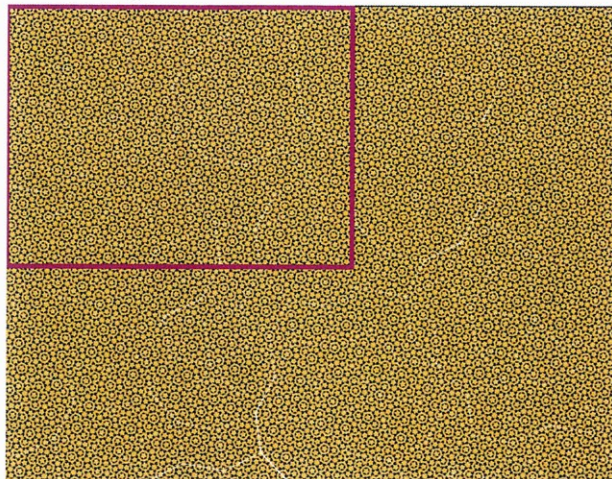


図31

ペンローズパターンの一部の「暫定の対称軸」は図32の緑の線で書かれた対称軸であるのに対し、切り取られた部分の「暫定の対称軸」は図33の紫の線にあたる。

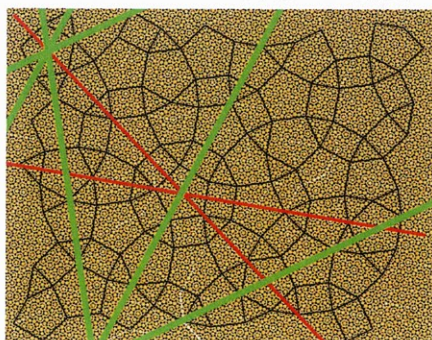


図32

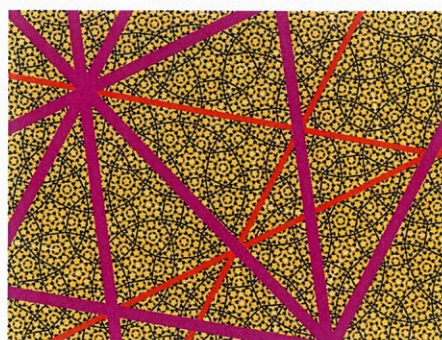


図33

これを重ねてみると、図34のように、切り取った部分では対称軸にはなっているが、全体では対称軸になっていないものがある。

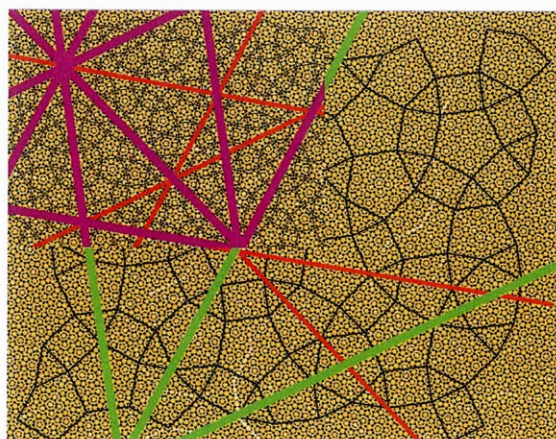


図34

3.2.2 ペンローズパターンの第三形態

ここで、図22に図23を被せてみると、図35のような模様が浮かび上がった。

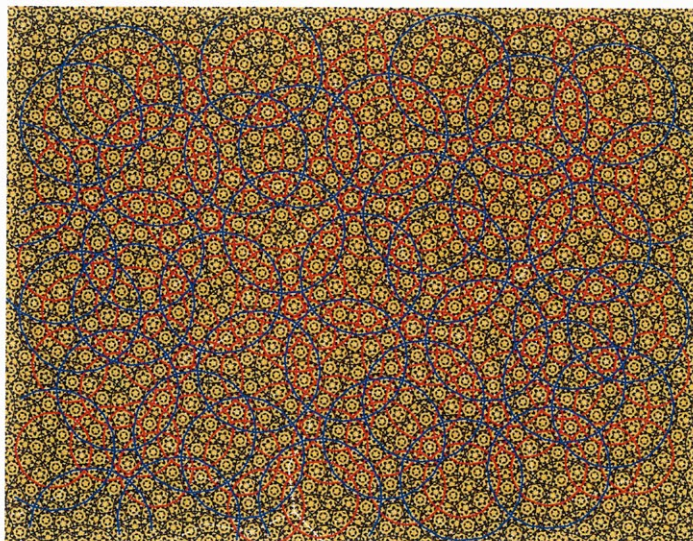


図35

この模様の特徴は、図23の模様の二十角形は図22の模様の二十角形の一部を ϕ 倍拡大したものである。

ここで、図23の模様の二十角形の中にある図22の二十角形のみを黄色の線で囲み、その中心を点で打って紫の線で繋いでみた。

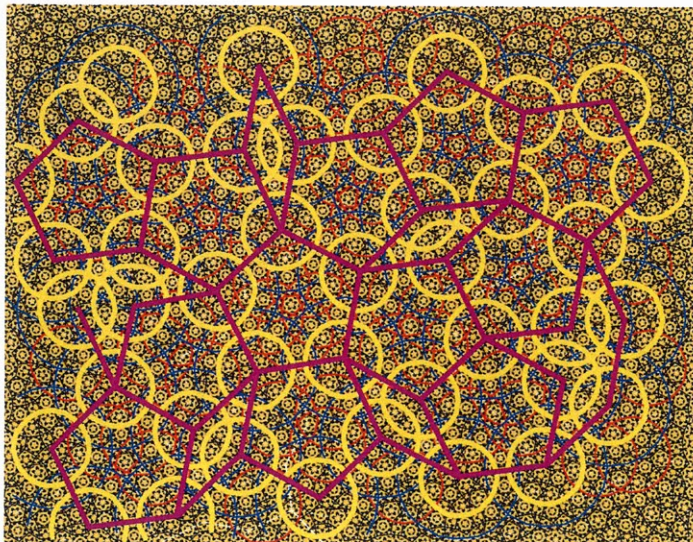


図36

すると図36のようにまた新しい模様が現れた。これを「ペンローズパターンの第三形態」と呼ぶ。

この模様には図37のような特徴的な正十角形の模様があり、第二形態の二十角形と同様、対称軸が1本しか存在しない。

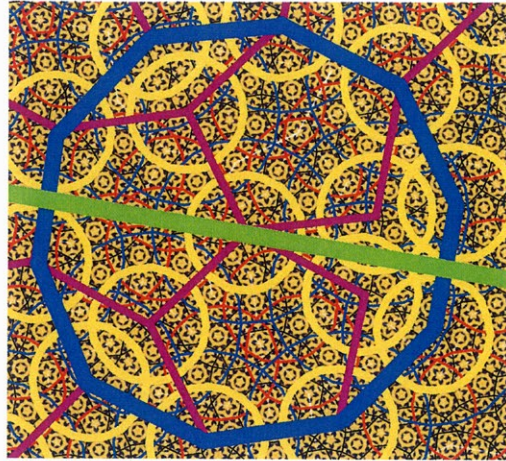


図37

また、ペンローズパターンの第三形態にある図38の緑色で囲まれた部分の正五角形に注目すると、1と2の2種類の正五角形があるため、緑で囲まれた部分は五次対称性を持っているように見えるが、一本しか対称軸が存在しない。

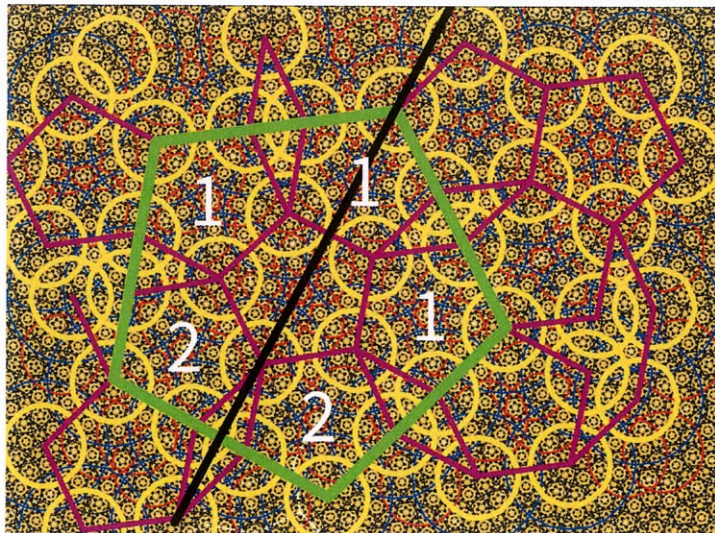


図38

以上より、ペンローズパターンは強い方向性を持っていることがわかる。第三形態を使うと、第二形態と同様にペンローズパターンの対称軸について考えることができる。

(3)き星+一凸(図39、40)、き星+一凹(図41)、き星+ほ凸(図42)、き星+ほ凹(図43)

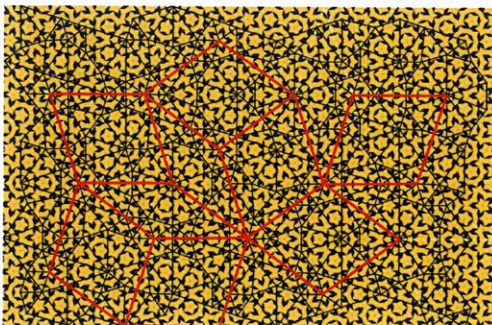


図39

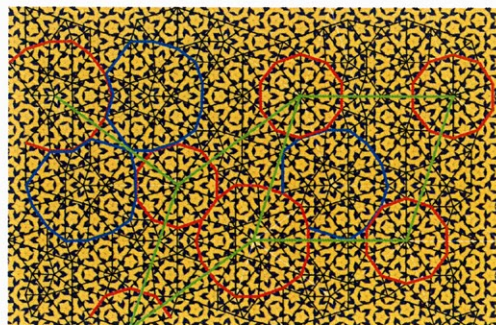


図40

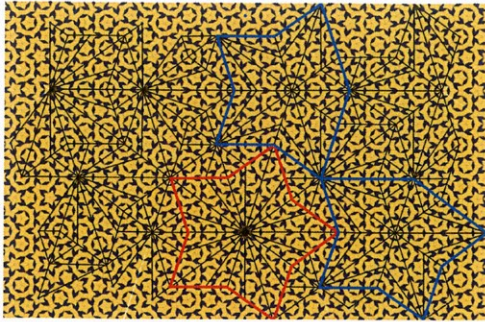


図41

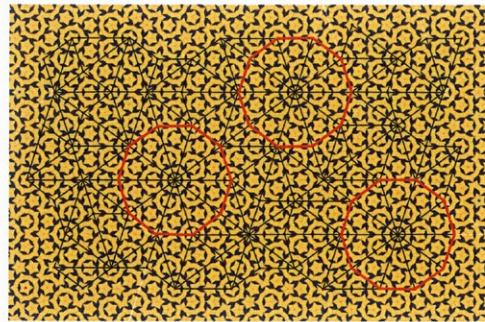


図42

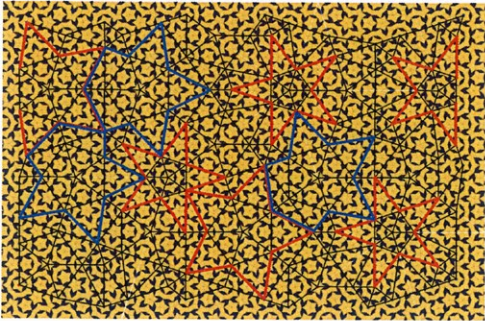


図43

図39～43からわかる通り、赤で囲まれた模様と青で囲まれた模様をそれぞれペンローズパターンにおける「綺麗な星」と「綺麗でない星」に置き換えると全て形が変わったペンローズパターンとみなすことができる。

例えば、図39において、模様にある正五角形の中心と正十角形の中心をペンローズパターンにおける星の中心と見なし、繋げると赤の線で書かれた一辺の長さが ϕ^6 のペンローズパターンができる。

4 まとめ・考察

これまでの研究を通し、以下のことが明らかになった:

- ペンローズパターンに対し星の中心を繋げて、新しいペンローズパターンを作る作業を無限回繰り返すことができる。
- 既存のインフレーションとデフレーションによる方法とは別で、模様内の点を繋げるだけでペンローズパターンを黄金比倍に拡張と縮小ができる。
- 点を種類別に分類し繋げると特徴的な模様が現れる。
- ペンローズパターンの第二形態と第三形態を用いて、全ての大きさのペンローズパターンにおいて「暫定の対称軸」を見つけることができる。

これらのことより、ペンローズパターンはさまざまな規則性を持っていると言える。

5 今後の目標

今回の研究を終え、新しい課題をいくつか見つけた:

- 2次元で発見した様々な性質の、3次元バージョンの準結晶への応用(ペンローズパターンの対称性と準結晶の回折格子など)
- 黄金比にまつわる性質のさらなる深掘りとフィボナッチ数列との関係
- ペンローズパターンのさらなる拡張
- 高次元における非周期タイリング

など、これからもたくさんのことに取り組みたい。