

角の二等分線で構成される入れ子多角形の列

お茶の水女子大学附属高等学校 3年 濱門雪菜

0 はじめに

「三角形の内角の二等分線と各辺の交点を結び三角形を構成することを繰り返すと、形状が正三角形に近づく」(Theorem 1) ということに実験によって気がついたことがこの研究のきっかけである。これは実は文献 [1] で証明されていたのだが、四角形など他の多角形について考えた研究は調べた限りではなかった。そこで、この研究では一般の多角形に拡張することを試みた。シミュレーションを中心とした考察の結果、あるパラメータで規定される条件下において、Theorem 1 を多角形に拡張した予想を得ることができた。

1 先行研究

1.1 On Sequences of Nested Triangles (Ismailescu & Jacobs [1]) について

Ismailescu & Jacobs [1] では次の定理が示されている。

Theorem 1. T_0 を頂点 A_0, B_0, C_0 をもつランダムな三角形とする。 T_0 の内角の二等分線と B_0C_0, C_0A_0, A_0B_0 との交点をそれぞれ A_1, B_1, C_1 とし、 $\triangle A_1B_1C_1$ を T_1 とする。同様の変換を繰り返し行い、 T_1, T_2, \dots を得ると、 $\{T_n\}_{n \geq 0}$ の形状は正三角形に収束する。

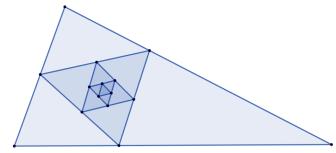


図 1.1 三角形の収束の様子

この証明は次の Lemma たちから構成されている。

Lemma 1. $a_n = |B_nC_n|, b_n = |C_nA_n|, c_n = |A_nB_n|$ としたとき、 $c_0 = \max\{a_0, b_0, c_0\}$ ならば $c_n = \max\{a_n, b_n, c_n\}$ である。

以降は $c_0 = \max\{a_0, b_0, c_0\}$ のもと、

Lemma 2. $t_n = \left(\frac{a_n^2}{c_n^2} - \frac{b_n^2}{c_n^2} \right)$ とすると $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = 0$.

Lemma 3. $x_n = \frac{1}{2} \left(\frac{a_n^2}{c_n^2} + \frac{b_n^2}{c_n^2} - \left| \frac{a_n^2}{c_n^2} - \frac{b_n^2}{c_n^2} \right| \right)$ とすると $\{x_n\}_{n \geq 0}$ は収束する。

以上から $\left\{ \frac{a_n}{c_n} \right\}_{n \geq 0}$ と $\left\{ \frac{b_n}{c_n} \right\}_{n \geq 0}$ の極限値は等しく、1 または $\frac{1}{2}$ であることが示される。

Lemma 4 によって極限値が 1 であることが示され、証明が完了する。

1.2 From Random Polygon to Ellipse (Elmachtoub & Van Loan [2]) について

Elmachtoub & Van Loan [2] では次の定理が示されている。

Theorem 2. 自己交叉可能なランダムな n 角形 P_0 に対し P_0 の各辺の中点をとる。 n 個の中点を辺の順に結び、正規化をして新たな n 角形 P_1 を構成する。同様に P_2, P_3, \dots を構成すると、 $\{P_k\}_{k \geq 0}$ はある楕円上に収束する(図 1.2)。正規化は、 n 角形を表す n 次元ベクトル \vec{x}, \vec{y} について、 n 角形の重心が原点になるように平行移動し、さらに単位ベクトルにすることによって行う。



図 1.2 10 角形の収束の様子、 $P_0 \rightarrow P_5 \rightarrow P_{10} \rightarrow P_{20}$ 、文献 [3] より引用

1.3 入れ子状変換

1.1 節, 1.2 節の変換は共に, 元の多角形が凸多角形ならば次の多角形が「入れ子状」に構成される変換である。このような「入れ子状変換」は次のように定義づけられる。

定義 1.1 (入れ子状変換). n 角形 P_k の各辺上に 1 点をとり, 辺の順に各点を結ぶことで n 角形 P_{k+1} を構成する変換を入れ子状変換とよぶ (例: 図 1.3)。

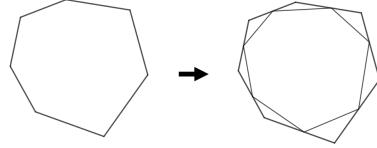


図 1.3 入れ子状変換のイメージ

2 多角形への拡張

Theorem 1 を多角形に拡張することを考える。すなわち、「ランダムな自己交叉可能な n 角形 P_0 に Theorem 1 の変換を拡張した変換を繰り返し, P_1, P_2, \dots を得ると, $\{P_k\}_{k \geq 0}$ の形状は正 n 角形に収束する」ような変換を考える。

まず, 単純な拡張として次の変換 A を考える。

定義 2.1 (変換 A). n 角形 P_k の各頂点 A_i ($i = 0, 1, \dots, n - 1$) について各内角 $\angle A_i$ の二等分線と P_k の交点を A'_i とする。交点 $A'_0, A'_1, \dots, A'_{n-1}$ を順に結び新たな n 角形 P_{k+1} を構成する変換を変換 A と定義する。

しかし, 変換 A では P_k の 1 辺上に常に P_{k+1} の 1 頂点があるとは限らず「入れ子状」にならない。また, 例えば 7 角形に 10 回変換 A を行うと図 2.1 のようになり, 正 7 角形に収束しそうではない。

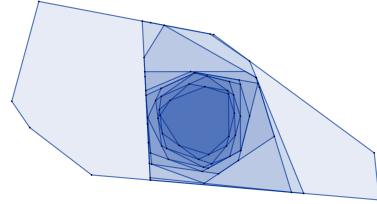


図 2.1 $n = 7, 10$ 回の変換 A の例

そこで, 変換 A とは異なる新たな変換を考える。Theorem 1 や Theorem 2 の変換は「入れ子状変換」であり, 良い性質を示したことを踏まえ, 変換により多角形が「入れ子状」に構成されるために, 図 2.2 のように 1 つの辺に対して 1 つの角の二等分線を引くことを考える。

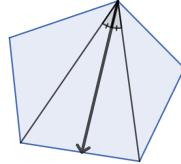


図 2.2 角の二等分線の引き方のイメージ

ここで, 図 2.2 のような角を決める頂点と辺を 1 対 1 に対応づけるために, m 番目対辺を導入する。

定義 2.2 (m 番目対辺). 頂点 A_0, A_1, \dots, A_{n-1} をもつ n 角形に対し, m ($m = 1, 2, \dots, n - 2$) を定める。このとき辺 $A_{i+m}A_{i+m+1}$ ($i = 0, 1, \dots, n - 1$) を頂点 A_i の m 番目対辺とよぶ (例: 図 2.3)。(ただし $A_0 = A_n, A_1 = A_{n+1}, \dots$ である。)

図 2.2 の角の二等分線の引き方のアイディアと m 番目対辺により, 新たに変換 B を定義する。

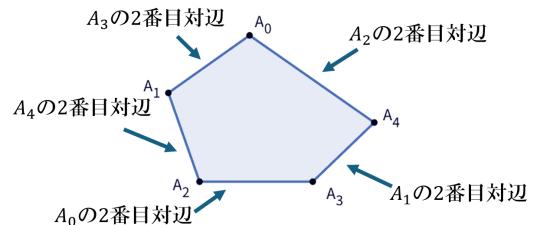


図 2.3 $n = 5, m = 2$ の m 番目対辺のおよび方

定義 2.3 (変換 B). n 角形 P_k の各頂点 A_i ($i = 0, 1, \dots, n - 1$) について, 頂点 A_i と m 番目対辺の 2 端点がなす角 $\angle A_{i+m}A_iA_{i+m+1}$ の二等分線を引き, m 番目対辺との交点を A'_i とする。交点 $A'_0, A'_1, \dots, A'_{n-1}$ を順に結び新たな n 角形 P_{k+1} を構成する変換を変換 B と定義する。

変換 B は確かに「入れ子状変換」となっている。このもとで文献 [2] と同様に, 自己交叉可能な多角形 P_0 を与え, 変換 B を繰り返すことを考える。(以降は変換 B を単に変換とよぶことがある。)

3 シミュレーション

3.1 GeoGebra による実験

動的数学ソフトウェア GeoGebra により、7 角形を与え、 $m = 3$ に関する変換を 10 回繰り返す実験を行った（図 3.1）。

この実験から、変換を繰り返すと多角形の形状は正多角形に収束していくと予想した。

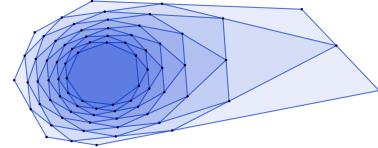


図 3.1 $n = 7, m = 3, 10$ 回の変換

3.2 正多角形への類似度

予想を検証するシミュレーションをさらに行うにあたり、 n 角形 P の正 n 角形への近さを評価し、類似度を考える。

- 多角形 P の重心 G と各頂点 A_i 間の距離 $|GA_i|$ のばらつき (d_1)
- 多角形 P の重心 G と隣接 2 頂点 $A_i A_{i+1}$ がなす中心角 $\angle A_i G A_{i+1}$ の $\frac{2\pi}{n}$ からのばらつき (d_2)

を考え、

$$d_1 = \sqrt{\sum_{i=0}^{n-1} (r_i - r_{\text{ave}})^2}, \quad d_2 = \sqrt{\sum_{i=0}^{n-1} \left(\alpha_i - \frac{2\pi}{n} \right)^2}$$

$$\left(r_i := |GA_i|, \quad r_{\text{ave}} := \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} r_i, \quad \alpha_i := \angle A_i G A_{i+1} \right)$$

とした。 $d_1 = d_2 = 0$ のとき多角形 P は正多角形である。

また、類似度は、例えば 10 角形においては図 3.2、図 3.3 のようになった。目で見ると、図 3.2 はやや歪さを感じられるが、図 3.3 は正多角形に見える。

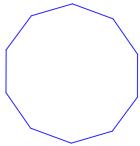


図 3.2 10 角形,
 $d_1 \doteq 0.343, d_2 \doteq 0.0332$

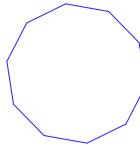


図 3.3 10 角形,
 $d_1 \doteq 0.153, d_2 \doteq 0.0147$

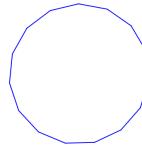


図 3.4 15 角形,
 $d_1 \doteq 0.233, d_2 \doteq 0.0151$

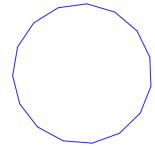


図 3.5 15 角形,
 $d_1 \doteq 0.154, d_2 \doteq 0.00905$

よって、 $d_1 < 0.15$ かつ $d_2 < 0.015$ を正多角形であると判断する基準にしてよいだろう。10 角形でなく、15 角形でも図 3.4、図 3.5 のようになるので、この基準は妥当といえる。

3.3 Python によるシミュレーション

Python で n, m, k をパラメータとし、ランダムに n 角形を生成し m 番目対辺に関する変換を k 回行うシミュレーションを行った。また、プログラム処理のため、各変換ごとに文献 [2] を参考に正規化を行った。具体的には「 n 角形 P の重心が $(0, 0)$ になるように平行移動し、頂点 $(x_0, y_0), \dots, (x_{n-1}, y_{n-1})$ について $\max\{x_1, \dots, x_{n-1}, y_0, \dots, y_{n-1}\} = 10$ となるように相似拡大する」とした。

ここで、 $n = 20, m = 9, k = 400$ としてシミュレーションを行った（図 3.6、図 3.7、図 3.8）。

自己交叉をもつ多角形であっても、交叉が解消され徐々に正多角形に近づくことや、その収束が指數関数的であることが予想できる。

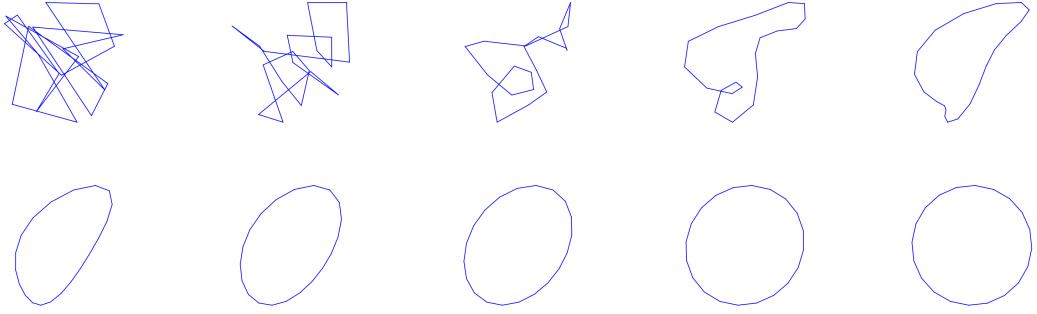


図 3.6 $n = 20, m = 9, k = 400, P_0 \rightarrow P_2 \rightarrow P_5 \rightarrow P_{10} \rightarrow P_{20} \rightarrow P_{40} \rightarrow P_{70} \rightarrow P_{100} \rightarrow P_{200} \rightarrow P_{400}$

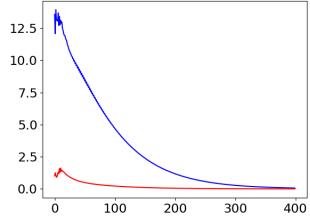


図 3.7 正多角形への類似度（横軸は k , グラフは赤： d_1 , 青： d_2 ）

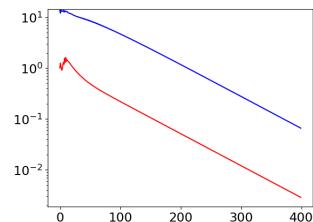


図 3.8 図 3.7において縦軸を対数表示した

一方で, $n = 20, m = 3, k = 400$ の場合は図 3.9, 図 3.10 のようになる. 自己交叉は解消されるが, 正多角形に収束するよりむしろ線分状に潰れた形状（以降は単に「潰れた」と表現する）に収束しそうである.

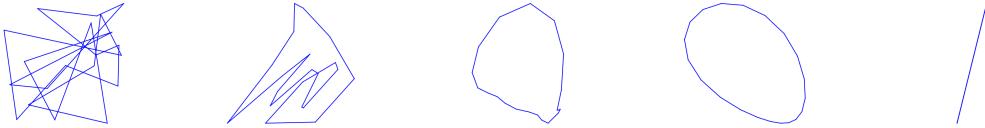


図 3.9 $n = 20, m = 3, k = 400, P_0 \rightarrow P_5 \rightarrow P_{15} \rightarrow P_{50} \rightarrow P_{400}$

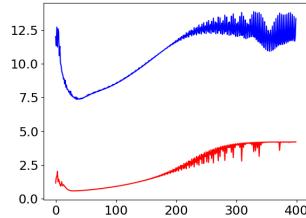


図 3.10 図 3.9 の正多角形への類似度（赤： d_1 , 青： d_2 ）

ここから, (n, m) の組によっては, 正多角形に収束するのではなく潰れるようになると予想される. そこで, どのような (n, m) の組であれば正多角形に収束, あるいは潰れるのかを調べたい.

その前に, 図 3.11 のようなケースに注意しなければならない.

図 3.11 の場合, 正多角形にも潰れた形状にも近づかず, 自己交叉が解消されないままとなっている. 変換の回数を重ねれば交叉が解消される可能性はあるが, 時間がかかり, 正多角形に近づくか潰れるかを調べるのには不都合が生じる. そのため, 以降は自己交叉のない P_0 から始めることを考える.

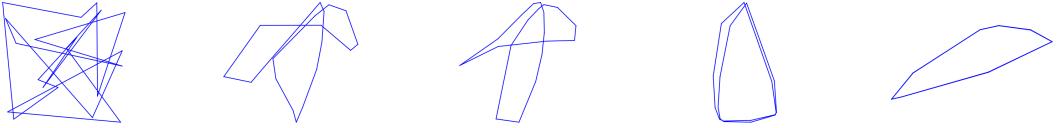


図 3.11 $n = 20, m = 9, k = 400, P_0 \rightarrow P_5 \rightarrow P_{10} \rightarrow P_{50} \rightarrow P_{400}$

3.4 (n, m) の組を変えた実験

(n, m) の組により正多角形と潰れた形状のどちらに収束する傾向があるか予想するために, $n = 4, \dots, 20$ について次のような実験を行った.

- 自己交叉をもたない n 角形 P_0 をランダムに生成し, 変換を $3n^2$ 回行って P_{3n^2} を得る. P_{3n^2} について $d_1 < 0.15$ かつ $d_2 < 0.015$ ならば正 n 角形に収束したと判断する. (正多角形に収束する基準は 3.2 節による.)
- a)と同じ (n, m) について 100 回行い, そのうちの収束した回数を数える.
- a), b)を $(n, m) = (n, 1), (n, 2), \dots, (n, \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor)$ について行う. (m について $m = a$ と $m = n - 1 - a$ の変換は対称な変換であるから, m は 1 から $\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor$ までののみ考える.)

この結果が表 3.1 である. 表中の数字は一連の変換(上記 a))を 100 回行ったうちの, 収束したと判断された回数を示している. また色は濃青(100), 青(10~99), 淡青(1~9), 白(0)である.

表 3.1

	$m = 1$	2	3	4	5	6	7	8	9
$n = 4$	100								
5	0	100							
6	0	100							
7	0	100	100						
8	0	100	100						
9	0	38	100	100					
10	0	0	100	100					
11	0	0	100	100	100				
12	0	0	100	100	100				
13	0	0	53	100	100	100			
14	0	0	1	100	100	100			
15	0	0	0	100	100	100	100		
16	0	0	0	100	100	100	100		
17	0	0	0	46	100	100	100	100	
18	0	0	0	1	100	100	100	100	
19	0	0	0	0	100	100	100	100	100
20	0	0	0	0	100	100	100	100	100

全体的な傾向として, より m が $\frac{n-1}{2}$ に近いほど正多角形に近づきやすく, また, 同じ行(n)で, ある $(n, m) = (n, m')$ が正多角形に収束する傾向を示したならば, m' も $\frac{n-1}{2}$ に近い m の場合も正多角形に収束する傾向を示すことがわかる.

ここで, 値が 100 となっている部分に注目する. 各列(各 m)について, 値が 100 で, そうでないものとの境目となっているのは $(n, m) = (4, 1), (8, 2), (12, 3), (16, 4)$ である. これは規則的で, 一般にこの境目は $(n, m) = (n, \frac{n}{4})$ (n は 4 の倍数) と表せそうである.

ここから次の予想 1を得る.

予想 1. 自己交叉をもたないランダムな n 角形 P_0 に対し m ($m = \lceil \frac{n}{4} \rceil, \dots, n - 1 - \lceil \frac{n}{4} \rceil$) を定め, 変換 B を k 回行って得る n 角形 P_k は $k \rightarrow \infty$ で形状が正 n 角形に収束する.

さらに、表中で 0 または 100 でない値をとる部分（青及び淡青）について考える。まず、 $(n, m) = (13, 3), (17, 4)$ について実験の a) の回数を $3n^2$ 回から $10n^2$ 回に増やし、実験をもう一度行うと、すべて 100 という結果になった。

十分な回数の変換をできていなかったのだと考えられるが、その収束の様子は予想 1 で考える (n, m) の場合とは異なっていた。例えば、 $n = 13$ で図 3.12 (a) の同じ P_0 から $m = 3, 4, 5$ の場合について変換を $10n^2$ 回行い、類似度 d_1, d_2 の変化を示したものが図 3.12(b), (c), (d) である。 $m = 3, 4, 5$ の順により速く正多角形に近づいていることが分かるが、 $m = 4$ と $m = 5$ の差よりも、 $m = 3$ と $m = 4$ の差が非常に大きい。 $(n, m) = (13, 3), (17, 4)$ は特徴的な性質を持つと考えられる。

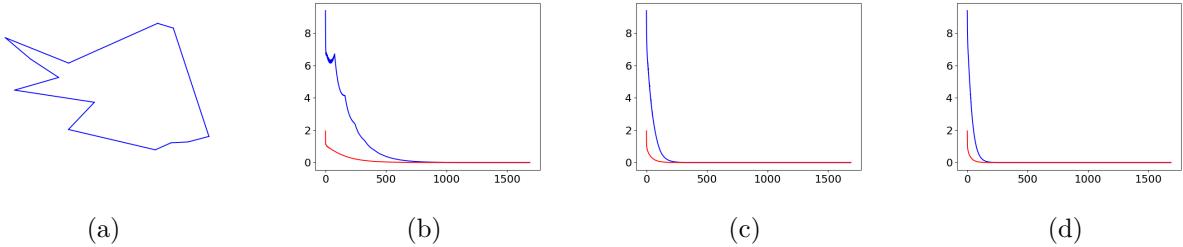


図 3.12 (a) の 13 角形 P_0 から変換を $10n^2$ 回行ったときの類似度の変化（グラフは左から順に $m = 3, 4, 5$ の場合）

また、 $(n, m) = (9, 2), (14, 3), (18, 4)$ について考える。 $10n^2$ 回の変換を行うと、例えば $(n, m) = (14, 3)$ では結果は 79 であったが、図 3.13 を見ると、正多角形に収束していないとされた 21 回のうち多くは正多角形に収束しそうである。そこで、正多角形に近づくか潰れるかを明確に判断するために、 $50n^2$ 回の変換を行うことになると、 $(n, m) = (9, 2), (14, 3), (18, 4)$ のときの結果はそれぞれ 99, 95, 99 であった。正多角形に収束しないという結果になった数回分はすべて潰れていた ($(n, m) = (14, 3)$ の例：図 3.14)。

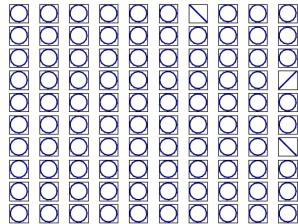


図 3.13 $n = 14, m = 3$ の実験で得た 100 個の P_{10n^2} を並べた

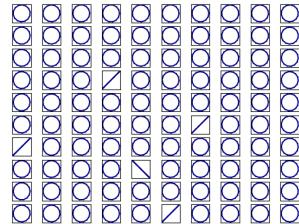


図 3.14 $n = 14, m = 3$ の実験で得た 100 個の P_{50n^2} を並べた

ここから、 (n, m) の組の中には、初期値 P_0 によって、正多角形に収束する場合も潰れる場合もある組があると予想できる。

さらに、表 3.1 では 0 となっていた場合も、変換回数を重ねることで結果が変わること可能性があると考え、列で見て境目となっている $(n, m) = (5, 1), (10, 2), (15, 3), (19, 4)$ で、 $50n^2$ 回の変換を行う実験を同様に行つた。結果はそれぞれ 77, 26, 0, 0 であった。また、 $(n, m) = (6, 1), (11, 2)$ についても同様に実験すると、共に 0 となった。

ここまで結果を改めてまとめると表 3.2 となる。

（黒字は表 1 のデータと同一。白抜き字、赤字はそれぞれ変換回数を $3n^2$ 回 → $10n^2$ 回、 $50n^2$ 回にして再度実験を行った結果。濃青はどのような場合も正多角形に収束すると予想される組。淡青は場合により正多角形に収束あるいは潰れると予想される組。）

表 3.2 の限りでは表 3.1 の濃青部分のような規則性を見出せない。規則性を見出すには、 n の範囲を広げた実験が必要だろう。しかし、今までのどの実験においても、正多角形に近づくか潰れるかのどちらかであったことから次の予想 2 を得る。

表 3.2

	$m = 1$	2	3	4	5	6	7	8	9
$n = 4$	100								
5	77	100							
6	0	100							
7	0	100	100						
8	0	100	100						
9	0	99	100	100					
10	0	26	100	100					
11	0	0	100	100	100				
12	0	0	100	100	100				
13	0	0	100	100	100	100			
14	0	0	95	100	100	100			
15	0	0	0	100	100	100	100		
16	0	0	0	100	100	100	100		
17	0	0	0	100	100	100	100	100	
18	0	0	0	99	100	100	100	100	
19	0	0	0	0	100	100	100	100	100
20	0	0	0	0	100	100	100	100	100

予想 2. 自己交叉をもたないランダムな n 角形 P_0 に対し m を定め, 変換 B を k 回行って得る n 角形 P_k は, $k \rightarrow \infty$ で形状が正 n 角形に収束しないならば潰れる.

4 数学的考察

4.1 予想

§3 での実験により次の予想を得た.

予想 1. 自己交叉をもたないランダムな n 角形 P_0 に対し m ($m = \lceil \frac{n}{4} \rceil, \dots, n-1 - \lceil \frac{n}{4} \rceil$) を定め, 変換 B を k 回行って得る n 角形 P_k は $k \rightarrow \infty$ で形状が正 n 角形に収束する.

予想 2. 自己交叉をもたないランダムな n 角形 P_0 に対し m を定め, 変換 B を k 回行って得る n 角形 P_k は, $k \rightarrow \infty$ で形状が正 n 角形に収束しないならば潰れる.

ただし, これらの予想は自己交叉のない P_0 に限定しているが, 自己交叉可能な P_0 でも成立すると予想される.

予想 1 は文献 [1] で示されている Theorem 1 の拡張となっている.

しかし, これらの予想の証明は Theorem 1 や Theorem 2 に対しさらに複雑で困難であると考えられる. 変換 B には線形性がなく, また, Theorem 1 のように各成分を計算して処理をするのも困難なためである.

4.2 平行四辺形の場合について

平行四辺形は予想 1 の中でも極めて単純な例である. 平行四辺形は三角形同様, 3 つのパラメータによって形状が定められ, また次の補題 4.1 が成り立つためである.

補題 4.1. 平行四辺形 P_0 に対し m ($m = 1, 2$) に関する変換 B を行うことで得る P_1, P_2, \dots も平行四辺形である.

証明. $m = 1$ の場合を考える. 図 4.1 のように P_0, P_1 の点を定める. $\triangle ABC$ と $\triangle ACD$ 及び $\triangle ABD$ と $\triangle BCD$ は O に対して対称であるから, それぞれの 2 つの三角形について, 角の二等分線及びその交点も対称となる. よって A', O, C' 及び B', O, D' は共線かつ $A'O = OC', B'O = OD'$ であるから P_1 は平行四辺形である. 帰納的に変換 B で得られるすべての P_1, P_2, \dots は平行四辺形である. $m = 2$ の場合も同様である. \square

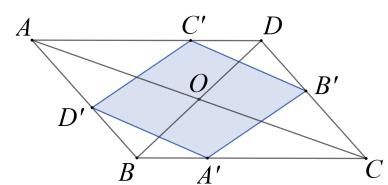


図 4.1 補題 4.1 での点の取り方

しかし、平行四辺形に限定しても予想 1 を証明するのは難しい。例えば図 4.2 のように長さをおく。このような長さの取り方を (1) とする。(この辺の長さの対応づけは頂点の対応づけと一致していないことに注意する。行う変換は常に、 $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D$ の順に頂点が並んでいるとしたときの $m = 1$ に関する変換 B である。)

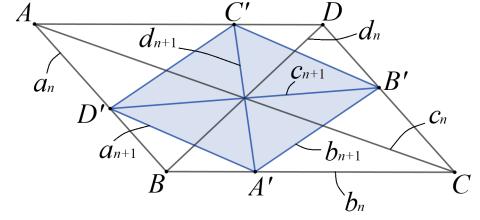


図 4.2 平行四辺形の長さの取り方 (1)

このとき、余弦定理により

$$\begin{aligned} d_n^2 &= 2a_n^2 + 2b_n^2 - c_n^2, \\ a_{n+1}^2 &= \left(\frac{a_n b_n}{a_n + c_n} \right)^2 + \left(\frac{a_n d_n}{b_n + d_n} \right)^2 - \frac{a_n^2 + b_n^2 - c_n^2}{a_n + c_n} \frac{a_n d_n}{b_n + d_n}, \\ b_{n+1}^2 &= \left(\frac{b_n c_n}{a_n + c_n} \right)^2 + \left(\frac{a_n b_n}{b_n + d_n} \right)^2 + \frac{a_n^2 + b_n^2 - c_n^2}{a_n + c_n} \frac{b_n c_n}{b_n + d_n}, \\ c_{n+1}^2 &= c_n^2 + \left(\frac{2a_n b_n}{b_n + d_n} \right)^2 - \frac{2b_n(a_n^2 + c_n^2 - b_n^2)}{b_n + d_n}, \\ d_{n+1}^2 &= c_n^2 + \left(\frac{2b_n c_n}{a_n + c_n} \right)^2 - \frac{2c_n(b_n^2 + c_n^2 - a_n^2)}{a_n + c_n} \end{aligned}$$

という長さ a_n, b_n, c_n, d_n の漸化式を得る。漸化式自体も三角形に比べ複雑である。しかし、困難が生じているのは主に、Theorem 1 における Lemma 1 に対応する補題を得られない、すなわち平行四辺形の辺および対辺のうちある一定の位置にある線分の長さが最大であることが一般に成り立たないためである。一見、

$$c_n = \max\{a_n, b_n, c_n, d_n\} \implies c_{n+1} = \max\{a_{n+1}, b_{n+1}, c_{n+1}, d_{n+1}\}$$

は成り立ちそうだが、反例が存在する。

ただし、 $\left\{ \frac{a_n}{c_n} \right\}_{n \geq 0}, \left\{ \frac{b_n}{c_n} \right\}_{n \geq 0}$ が等しい極限値をもつという仮定のもとで、正方形に収束することが示される（補題 4.2）。

補題 4.2. $\left\{ \frac{a_n}{c_n} \right\}_{n \geq 0}, \left\{ \frac{b_n}{c_n} \right\}_{n \geq 0}$ が等しい極限値をもつならば、平行四辺形 P_0 に対し m ($m = 1, 2$) に関する変換 B を行うことによって得る $\{P_n\}_{n \geq 0}$ は正方形に収束する。

証明. $R_n = \frac{a_n}{c_n}, S_n = \frac{b_n}{c_n}$ とすると

$$\begin{cases} R_{n+1}^2 = \frac{\frac{R_n^2 S_n^2}{(R_n+1)^2} + \frac{R_n^2 (2R_n^2 + 2S_n^2 - 1)}{(S_n + \sqrt{2R_n^2 + 2S_n^2 - 1})^2} - \frac{R_n(R_n^2 + S_n^2 - 1)\sqrt{2R_n^2 + 2S_n^2 - 1}}{(R_n+1)\sqrt{2R_n^2 + 2S_n^2 - 1 + S_n}}}{\frac{4R_n^2 S_n^2}{(S_n + \sqrt{2R_n^2 + 2S_n^2 - 1})^2} - \frac{2S_n(R_n^2 + 1 - S_n^2)}{S_n + \sqrt{2R_n^2 + 2S_n^2 - 1}}} + 1 \\ S_{n+1}^2 = \frac{\frac{S_n^2}{(R_n+1)^2} + \frac{R_n^2 S_n^2}{(\sqrt{2R_n^2 + 2S_n^2 - 1} + S_n)^2} + \frac{S_n(R_n^2 + S_n^2 - 1)}{(R_n+1)(\sqrt{2R_n^2 + 2S_n^2 - 1} + S_n)}}{\frac{4R_n^2 S_n^2}{(\sqrt{2R_n^2 + 2S_n^2 - 1} + S_n)^2} - \frac{2S_n(R_n^2 - S_n^2 + 1)}{\sqrt{2R_n^2 + 2S_n^2 - 1 + S_n}}} + 1 \end{cases}$$

である。 $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = x$ とすれば、これらの式は次のように整理できる。

$$\begin{cases} \frac{x(2x^2 - 1) \left(2x^5 + 4x^4 - \frac{4x^4}{\sqrt{4x^2 - 1} + 1} + x^2 \sqrt{4x^2 - 1} + x \sqrt{4x^2 - 1} + 4x^3 + 4x^2 - x - 1 \right)}{(1+x)^2(4x^2 - 1)} = 0 \\ \frac{x(2x^2 - 1) \left(2x^5 + 4x^4 + 4x^3 + 3x^2 - \frac{4x^2}{1 + \sqrt{4x^2 - 1}} - x \sqrt{4x^2 - 1} - x - \sqrt{4x^2 - 1} \right)}{(1+x)^2(4x^2 - 1)} = 0 \end{cases}$$

$4x^2 - 1 > 0$ より $x > \frac{1}{2}$ であり、この 2 式は $x > \frac{1}{2}$ において共通解を $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ でのみもつから、 $\left\{ \frac{a_n}{c_n} \right\}_{n \geq 0}, \left\{ \frac{b_n}{c_n} \right\}_{n \geq 0}$ は $\frac{1}{\sqrt{2}}$ に収束する。このことは平行四辺形の c_n の長さをもつ辺で二分される三角形 2 つの形状が直角二等辺三角形に収束することを意味する。したがって、 $\{P_n\}_{n \geq 0}$ は正方形に収束する。□

また、長さの取り方 (1) を変え、単純に頂点の対応づけに基づいて辺の長さを置く（図 4.3）。このような長さの取り方を (2) とする。

このとき、補題 4.2 と同様に $\left\{ \frac{a_n}{c_n} \right\}_{n \geq 0}$, $\left\{ \frac{b_n}{c_n} \right\}_{n \geq 0}$ が同じ値に収束すると仮定する。

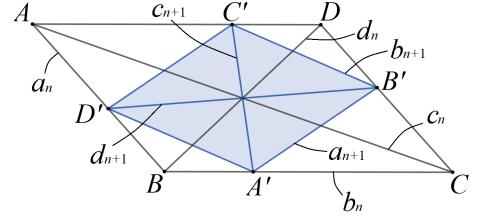


図 4.3 平行四辺形の長さの取り方 (2)

$$\begin{aligned} d_n^2 &= 2a_n^2 + 2b_n^2 - c_n^2, \\ a_{n+1}^2 &= \left(\frac{b_n c_n}{a_n + c_n} \right)^2 + \left(\frac{a_n b_n}{b_n + d_n} \right)^2 + \frac{a_n^2 + b_n^2 - c_n^2}{a_n + c_n} \frac{b_n c_n}{b_n + d_n}, \\ b_{n+1}^2 &= \left(\frac{a_n b_n}{a_n + c_n} \right)^2 + \left(\frac{a_n d_n}{b_n + d_n} \right)^2 - \frac{a_n^2 + b_n^2 - c_n^2}{a_n + c_n} \frac{a_n d_n}{b_n + d_n}, \\ c_{n+1}^2 &= c_n^2 + \left(\frac{2b_n c_n}{a_n + c_n} \right)^2 - \frac{2c_n(b_n^2 + c_n^2 - a_n^2)}{a_n + c_n} \end{aligned}$$

であるから、補題 4.2 と同様に $R_n = \frac{a_n}{c_n}$, $S_n = \frac{b_n}{c_n}$ とし、 R_{n+1}^2 と S_{n+1}^2 の式を得て、 $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = x$ として整理すると

$$\begin{cases} \frac{x^2(2x^2-1)(4x^2-1)(22x^6-20x^5-51x^4-18x^3+8x^2+6x+1)}{(5x^2-1)(x+\sqrt{4x^2-1})^2} = 0 \\ \frac{x^2(2x^2-1)(4x^2-1)(22x^6-4x^5-19x^4-6x^3+2x+1)}{(5x^2-1)(x+\sqrt{4x^2-1})^2} = 0 \end{cases}$$

を得る。 $4x^2 - 1 \geq 0$ における共通解が $\frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}$ の 2 つあるが、正方形に収束することを示すには $x = \frac{1}{2}$ を否定しなければならない。 $x = \frac{1}{2}$ とは平行四辺形が潰れたひし形に収束することを意味する。三角形の場合の Theorem 1 でも同様の問題が起きており、潰れた二等辺三角形に収束することはないことを示すために Lemma 4 を示している。しかし、平行四辺形では Lemma 4 にあたる補題を設定することは難しく、長さの取り方 (2) では、仮定のもとでも正方形に収束すると証明するのは困難である。そのために、補題 4.2 では形状が潰れないことも含めた仮定をしているのである。

一方、三角形の場合でも長さの取り方 (2) でも、正多角形に収束する、または潰れた形状に収束することを意味する解が出るのは印象的である。四角形の場合などのような m をとっても正方形に収束する、と予想しているが、シミュレーションでは他の多角形で m の値によっては形状が潰れることもあった。条件によっては潰れた形状に収束する解が実際に正しく、正多角形に収束する解は正しくない、という場合もあると予想される。

4.3 n 角形の場合について

4.2 節での考察から分かるように、三角形と同じアプローチでは平行四辺形の場合でも証明は困難であり、さらに複雑な場合であれば補題 4.2 のような考察も難しいだろう。

しかし、 n 角形について分かることもある。補題 4.1 と同様のことは一般の凸多角形についても成り立つ。さらに、これは変換 B に限定せず §1 で定義した入れ子状変換全般に成り立つ。

定理 4.3. 凸 n 角形 P_0 に対し入れ子状変換を行うことで得る P_1, P_2, \dots も凸 n 角形である。

証明. 凸 n 角形 P_0 に対し P_1 が凸 n 角形であることを示す。 P_0 の隣接 2 辺 AB, BC 上にある P_1 の 2 頂点 A', B' について考える。 P_0 を $A'B'$ で 2 分すると $\triangle A'BB'$ と凸多角形 P'_0 を得る。入れ子状変換の定義から、 P_1 の他の辺は P'_0 の辺上の 2 点を結んだものであるから、同様のことを P_1 の他の辺について P'_0 に行なうことを行なうことを繰り返せば、最終的に得る凸多角形は n 角形 P_1 となる。帰納的に P_2, P_3, \dots も凸 n 角形である。□

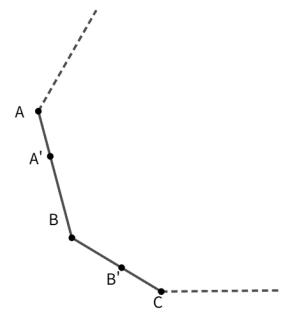


図 4.4 定理 4.3 での点の取り方

したがって、凸多角形に限定して考察をするのも有意義であると思われる。

5 おわりに

この研究の大きな成果は、 m 番目対辺という考え方を導入して、Theorem 1 の拡張となる変換を与え、予想 1 を得たことである。さらに、多数のシミュレーションを行い、予想 1 の妥当性を検証した。また、限定的な場合の証明について考えることで、この問題の難しさを確認できた。

今後の課題はもちろん、予想 1 を中心に予想を証明することが第一である。しかし、一般の n では証明はおろか、数学的に考察するのも難しい。Theorem 1 のように長さの漸化式に注目する方法では、特定の数列が常に最大と言えず、平行四辺形でも難しかった。一般的な多角形においては、どのように正多角形に収束することを表現するかも問題である。また、 m をパラメータとして動かすことを考えれば、さらに複雑になってしまう。成り立つ見込みの高い予想であるから、どうにかして証明したいが、証明するには全く別のアプローチが必要だろう。そのアプローチについて現時点では全くわかつていない。

また、さらなる考察に際しては、「潰れる」場合についてもあわせて考えていきたい。まず、現在は潰れた現状を見た目で判断しており、その定式化は実験するにおいても必要である。さらに、正多角形に収束する場合と潰れる場合は、4.2 節で述べたように表裏一体のような関係にあると考えられ、どこがターニングポイントになっているか考察することで、正多角形へ収束する場合の考察に大きくつながりうる。

さらに、この問題から派生して、次のようなことも考えられる。まず、今回は平面上の多角形についてのみ議論したが、次元を上げることも考えられ、次元を上げても予想 1 は成立すると予想している。今回主に考えた予想 1 は Theorem 1 の拡張に 1 つに過ぎないという点にも注目できる。拡張として、変換 B ではない別の変換方法も考えられるかもしれない。さらに、Theorems 1, 2 同様、予想 1 が入れ子状変換の良い性質に関するものであることに注目すると、入れ子状変換自体に良い性質があると思われる。入れ子状変換は元の多角形に内接するように次の多角形が置かれるので大きく歪にはなりにくく、元の 2 頂点を内分するように次の 1 頂点が置かれるので、平均化するような変換になりやすいのだと考えている。他の入れ子状変換にも良い性質を持つものがあることが期待できる。

謝辞。お茶の水女子大学名誉教授 吉田裕亮先生、同大学理学部数学科教授 竹村剛一先生には 4.2 節を中心にご助言頂きました。感謝申し上げます。

参考文献

- [1] Dan Ismailescu, Jacqueline Jacobs. On Sequences of Nested Triangles. *Periodica Mathematica Hungarica*, **53** (2006), 169–184.
- [2] Adam N. Elmachtoub, Charles F. Van Loan. From Random Polygon to Ellipse: An Eigenanalysis. *SIAM Review*, **52** (2010), 151–170.
- [3] From Random Polygon to Ellipse ([2] をシミュレーションできる Web アプリ)
<https://www.jasondavies.com/random-polygon-ellipse/> (最終閲覧日 2025 年 9 月 1 日)