

分度器を使わずに正五・七・九・十一角形の角度を作る！

つくば市立谷田部東中学校 2年 須田 まひな

<研究のきっかけ>

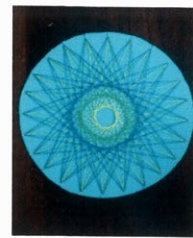


図 1

私は「糸かけアート」が好きで、自分でも簡易版を作って楽しんでいきます(図 1)。簡易版とは、工作用紙にコンパスで円を描いて切り取り、円周を等分する切り込みを入れて、糸をかけて模様を作るものです。円周を等分する際に分度器で測る作業が面倒なので、私は折り紙を使うことがあります。正方形の折り紙を、辺と辺が合うようにして半分に、また半分に、…と折って広げると、中心角を2等分、4等分、8等分、…する直線

ができるので(図 2)、工作用紙

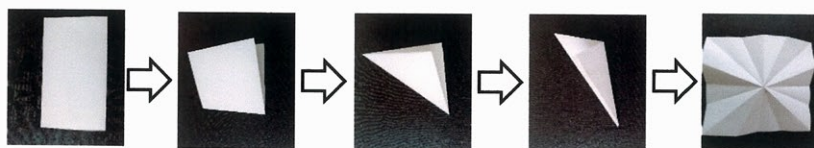
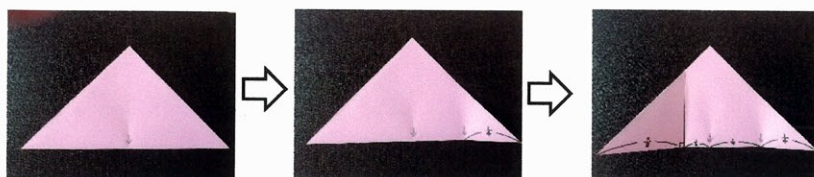


図 2

の円と中心を合わせて重ねれば、円周を(2のn乗)等分する点が分かります。また、

「紋切り」で使われる折り方で、

6等分することもできます(図



3)。これをさらに半分に折れば

12等分、さらに半分で24等分

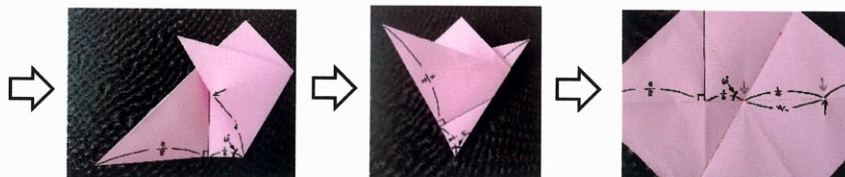


図 3

ができ、逆に元の2つ分を合わせ

れば3等分ができます。これで2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24, 32等分ができると分かりますが、5, 7, 9, 11, …等分の仕方が分かりません。(10は5等分ができればその半分なのでOK。)そこで、分度器を使わずに円周を5, 7, 9, 11, …等分するにはどうすればよいか調べてみたいと思いました。

＜糸かけアートで気付いた正多角形の性質について＞

糸かけアートでは円周を等分して入れた切り込みに糸をかけていきませんが、このとき隣の切り込みへと順々に糸をかければ正多角形ができあがります(図 4)。さらに、ひとつの切り込みから両隣を除く全ての切り込みに糸をかければ、正多角形のひとつの頂点から対角線を引いたことになり(図 5)、その本数は、切り込みの総数より 3 だけ少ない数です。また、これにより、正多角形のひとつの内角は切り込みの総数より 2 だけ少ない数に分割されますが、角度が等分になっているように見えるので、まずはこのことを確かめたいと思います。

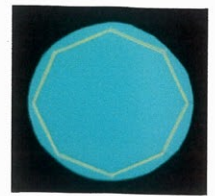
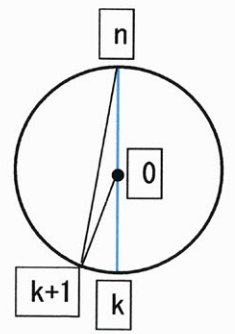
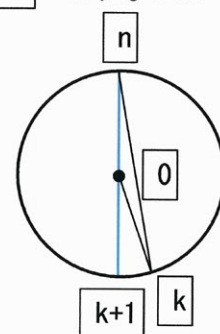
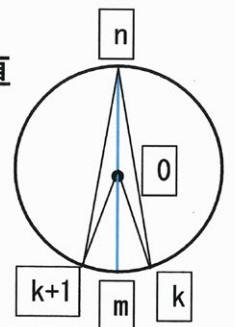


図 4



図 5

n を自然数として、円周を n 等分する切り込みを時計回りに $1, 2, \dots, n$ とし、円の中心を 0 とすると、隣り合う切り込みと 0 を結んでできる三角形は、半径を等辺、正多角形の一辺を底辺とする二等辺三角形で、どれも同じものです(*). 切り込み n から切り込み $2, 3, \dots, n-2$ に対角線を引くと、調べたいのは隣り合う切り込み $k, k+1$ ($k=2, 3, \dots, n-3$) と n を結んでできる三角形の $\angle k \ n \ k+1$ です。また、 n を通る直径の反対側を m とします。 n が奇数のときは、 k が $n-1$ のちょうど半分の数のときに直径 $n \ m$ が辺 $k \ k+1$ の中点を通り、 $\triangle 0 \ n \ k$ と $\triangle 0 \ n \ k+1$ はともに半径を等辺とする二等辺三角形で、それぞれの外角 $\angle m \ 0 \ k$ と $\angle m \ 0 \ k+1$ は底角の 2 倍ずつになります。よって $2\angle k \ n \ k+1 = \angle k \ 0 \ k+1$ です。 n が偶数のときは、 m が n の半分の数の切り込みに重なります。 $k+1$ がその数とすると、 $\triangle 0 \ n \ k$ は半径を等辺とする二等辺三角形で、外角 $\angle k \ 0 \ k+1$ は底角の 2 倍なの



で、 $2\angle[k][n][k+1] = \angle[k][0][k+1]$ です。 k が n の半分の数のときも同様で

す。これら 3 パターン以外の場合は、 $[k]$, $[k+1]$ のうち $[m]$ に近い方を $[s]$,

もう一方を $[t]$ とすると、 $\angle[k][n][k+1] = \angle[s][n][t] = \angle[m][n][t] - \angle[m][n][s]$ です。

$\triangle[0][n][s]$ と $\triangle[0][n][t]$ はともに半径を等辺とする二等辺三角形で、それ

ぞれの外角 $\angle[m][0][s]$ と $\angle[m][0][t]$ は底角の 2 倍ずつ、すなわち $\angle[m][0][s] = 2\angle[m][n][s]$, $\angle[m]$

$[0][t] = 2\angle[m][n][t]$ なので、 $2\angle[k][n][k+1] = 2\angle[m][n][t] - 2\angle[m][n][s] = \angle[m][0][t] - \angle[m][0][s] = \angle[s][0][t] =$

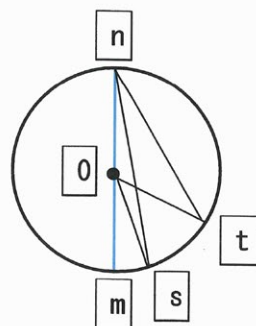
$\angle[k][0][k+1]$ です。よって、いずれの場合でも $2\angle[k][n][k+1] = \angle[k][0][k+1]$ であり、最初に述

べた(*)によって $\angle[k][0][k+1]$ はどの k でも同じ角度なので、 $\angle[k][n][k+1]$ もすべて等しくな

ります。

分かったこと:

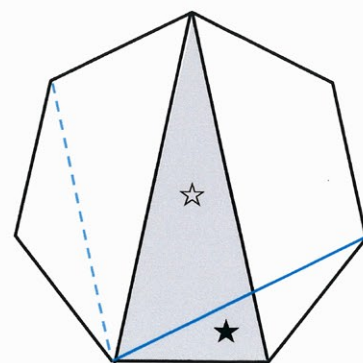
n を 3 以上の自然数とすると、正 n 角形の各頂点から対角線を $(n-3)$ 本引くことができ、各内角はその対角線により $(n-2)$ 等分される。



<正(奇数)角形の中の二等辺三角形について>

円周を等分するということは正多角形を作ることと同じなので、円周を 5, 7, 9, 11, ... 等分する代わりに正(奇数)角形を考えようと思います。

正(奇数)角形において、頂点と対辺を結ぶと二等辺三角形(☆)ができます。この底角の一方の頂点から、最も短い対角線を引くと、その一方により二等辺三角形(☆)が 2 つの三角形に分割されます。そのうち(☆)の底角を含む方を(★)とすると、

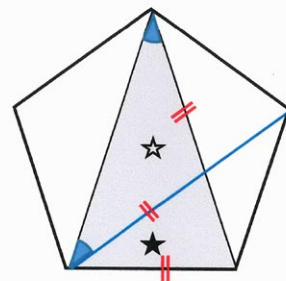


(★)と(☆)は角がすべて同じです。このことは、(☆)の底角を(★)も角として持っていることと、先に確認した正多角形の内角と対角線の関係から(☆)の頂角と(★)の角で正多角形の辺と対角線で挟まれているところが等しいと分かることから確認できます。したがって、大きさが異なるだけで形は同じなので、(★)も(☆)と同じように二等辺三角形になっています。

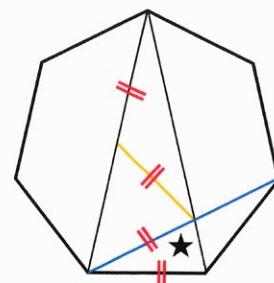
分かったこと:

n を 5 以上の奇数とするとき、正 n 角形の頂点と対辺を結んでできる二等辺三角形を、底角側の頂点から引いた正 n 角形の最短の対角線の一方で切ると、その縮小版となる二等辺三角形ができる。

正五角形の場合は、対角線によって分けられた(☆)の底角のうち(★)でない方(右図色付きの角)が、(☆)の頂角と等しいことが、先ほどの正多角形の内角と対角線の関係から分かるので、(★)でない方の三角形も二等辺になっています。



正七角形でも同じように(★)の上に二等辺三角形を作ると、さらにその上の三角形も二等辺になっています。このことを、一般の奇数 $2n+1$ について確認します。



正 $(2n+1)$ 角形の内角の和は $180 \times (2n+1-2)$ 度で、ひとつの内角はその $(2n+1)$ 等分であり、先ほどの内角と対角線の関係から、ひとつの内角は対角線によって $(2n+1-2)$ 等分されるので、(☆)の頂角は $\frac{180}{2n+1}$ 度です。よって(☆)の底角は

$$\left(180 - \frac{180}{2n+1}\right) \div 2 = 180 \left(1 - \frac{1}{2n+1}\right) \div 2 = 180 \frac{2n}{2n+1} \div 2 = \frac{180}{2n+1}n \text{ となり, 頂角の } n \text{ 倍}$$

です。1 番下の三角形(★)の頂角, 底角は(☆)と同じです。(★)の上に次々と二等辺三

角形を頂角の向きが互い違いになるように, 底辺を(☆)の等辺上にと

って設置していきます。下から 2 番目の三角形の底角は, 直下の頂

角と合わせると(☆)の底角になることから $\frac{180}{2n+1}(n-1)$ となり, (☆)の

頂角の $(n-1)$ 倍になっています。よって, 下から 2 番目の三角形の頂

角は $180 - 2 \frac{180}{2n+1}(n-1) = 180 \left(1 - \frac{2(n-1)}{2n+1}\right) = \frac{180}{2n+1} \times 3$ となり, (☆)

の頂角の 3 倍です。下から 3 番目の三角形の底角は, 直下の頂角

と, その下の底角と合わせると 180 度になることから, $180 -$

$$\frac{180}{2n+1} \times 3 - \frac{180}{2n+1}n = 180 \left(1 - \frac{3+n}{2n+1}\right) = \frac{180}{2n+1}(n-2) \text{ となり, (☆)の頂角の } (n-2) \text{ 倍です。}$$

$$\text{よって下から 3 番目の三角形の頂角は } 180 - 2 \frac{180}{2n+1}(n-2) = 180 \left(1 - \frac{2(n-2)}{2n+1}\right) =$$

$$\frac{180}{2n+1} \times 5 \text{ となり, (☆)の頂角の } 5 \text{ 倍です。このように次々と繰り返していくと, 下から } n \text{ 番}$$

目の三角形の

底角は(☆)の

頂角の $\{n -$

$(n-1)\}$ 倍であ

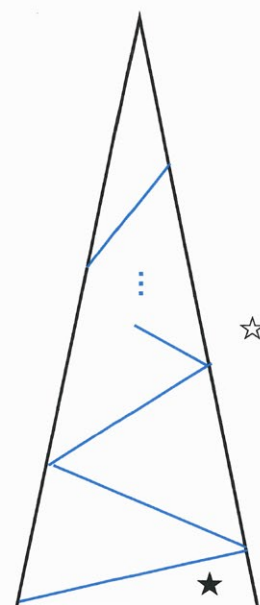
る $\frac{180}{2n+1}$ 度とな

り, (☆)の頂角

と等しくなりま

	底角	頂角
(★)(=(☆))	$\frac{180}{2n+1}n$	$\frac{180}{2n+1}$
下から 2 番目	$\frac{180}{2n+1}(n-1)$	$\frac{180}{2n+1} \times 3$
下から 3 番目	$\frac{180}{2n+1}(n-2)$	$\frac{180}{2n+1} \times 5$
下から k 番目	$\frac{180}{2n+1}\{n - (k-1)\}$	$\frac{180}{2n+1}(2k-1)$
下から n 番目	$\frac{180}{2n+1}$	$\frac{180}{2n+1}(2n-1)$

す。つまり, (☆)はちょうどぴったり二等辺三角形 n 個に分割できます。



分かったこと:

n を自然数とすると、正 $(2n+1)$ 角形の頂点と対辺を結んでできる二等辺三角形は、
正 $(2n+1)$ 角形の一辺と同じ長さの等辺をもつ n 個の二等辺三角形に分割できる。

<正(奇数)角形の角を描くツールについて>

この研究の目標は、分度器を使わずに円周を 5, 7, 9, 11, …等分するにはどうすればよいかを調べることであり、正(奇数)角形を描くことができれば目標達成と言えます。そこで、先ほどの「(☆)が同じ長さの等辺をもつ二等辺三角形に分割できる」性質を利用して、(☆)の頂角を描くことができるツールを試作しました(図 6)。工作用紙を細長く切って中央にスリットを入れ、スリットに沿ってピンが動かせるようになっています。3 本の上端を1点で固定し、左右が辺、真ん中は頂角の二等分線というイメージです。下の方に底辺となるバーを置き、ピンを挿してスリットに沿って上下に動かします。上方に動かすと左右の辺が開き、下方に動かすと閉じていきます。このとき、真ん中の線が底辺の垂直二等分線になっていれば、底辺を上下に動かしても左右の辺は同じ長さを保って動きます。そのために十字型のステーをつけて垂直になるよう工夫しました(図 7)。底辺と同じ長さのバーを数本用意し、ピンを挿すための穴を開けますが、「遊び」をつけておきます。(最初からピッタリに作ってしまうと、動かせませんでした。)ツールの下に描くための紙を置き、(☆)の性質に基づき、必要な本数分のバーをピンでスリットに留めます。底辺を上下に動かして各バーや左右の辺が



図 6

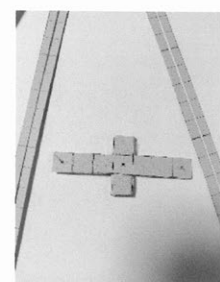


図 7

きれいにまっすぐ伸びきるところを探します。できたら左右のスリットに鉛筆の先を入れて辺の一部を描き(図 8), ツールをどけて描いた辺を定規で延長すれば, (☆)の頂角ができあがります(図 9)。

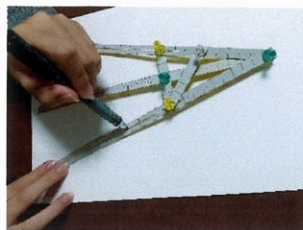


図 8



図 9

以下は正五角形, 正七角形, 正九角形, 正十一角形について実際にツールを使って(☆)の頂角を描き, その角度を分度器で計測したものです。

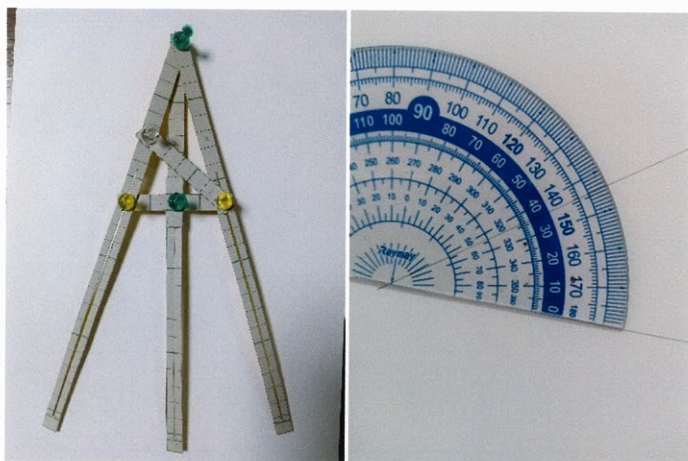


図 10 正五角形の場合 計測 36 度

$$\text{計算値は} \frac{180}{5} = 36$$

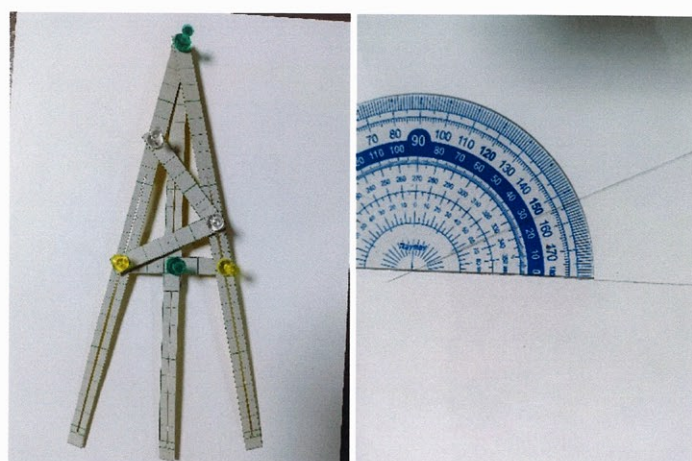


図 11 正七角形の場合 計測 26 度

$$\text{計算値は} \frac{180}{7} = 25.714\cdots$$

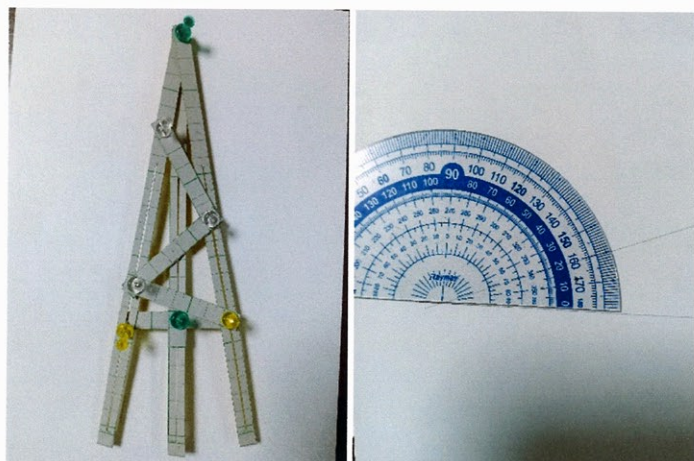


図 12 正九角形の場合 計測 20 度

$$\text{計算値は} \frac{180}{9} = 20$$

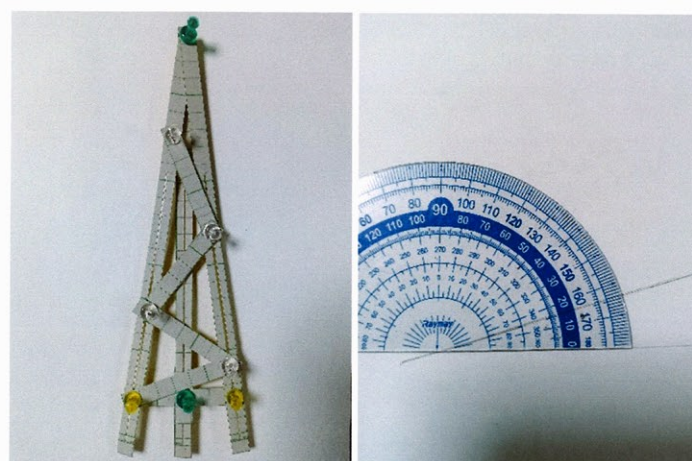


図 13 正十一角形の場合 計測 15.5 度

$$\text{計算値は} \frac{180}{11} = 16.363\cdots$$

<考察>

今回試作したツールは、計測値と計算値の差がプラスマイナス1度の間に収まっているので、スリットやピン、鉛筆の芯などの幅が1～2ミリあることを考慮しても、かなり正確に角度を再現できていると考えられます。よって、このツールを用いて正 $(2n+1)$ 角形の(☆)の頂角が描けるので、コンパスでその角を移し、 $(2n-1)$ 倍すれば正 $(2n+1)$ 角形のひとつの内角が得られ、分度器を使わずに正 $(2n+1)$ 角形を描くことができます。ただし、このツールは材料が工作用紙なので、力をかけすぎると曲がってしまうという点が課題として挙げられ、また、スリット部分の強度も心配です。木材やステンレスなどを加工して作ることができれば、より正確な角度を得られると思います。

<感想>

もともとは、糸かけアートの準備で分度器を使うのが面倒だという横着心から始めた研究でしたが、試行錯誤していろいろと糸をかけて考え、糸かけアートから正多角形の対角線の性質に気付くことができました。角度が等しそうに見えても、本当に等しいと言えるのか、誰でも納得できるような説明を考えていくのが楽しかったです。今回試作したツールは大きさに正十一角形の場合がギリギリだったので、13以降にも対応できるように伸縮性をつけるなど、改良してみたいと思います。