ランダムトーナメント制度の確率論的アプローチ
特に公平性、平等性の観点から

東京都立日比谷高等学校 1 年　　長嶋 日向 ・ 竹尾 美咲
指導教員 ： 佐藤 圭太 先生（同校数学科）

2024 年 8 月 29 日

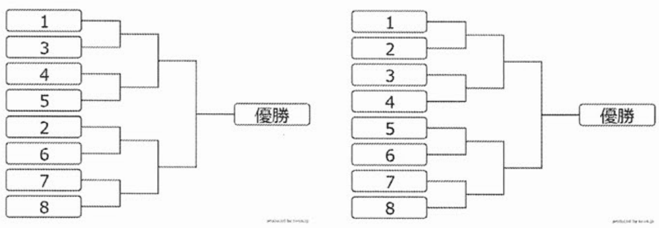
1　概要

1.1　動機

本論文はスポーツ大会等で順位が決定される方式の一つであるトーナメント制について、その順位の決定に不公平性があるのではないかという何気ない考えに始まる。その中で私たちが特に興味を持ったのは準優勝についてである。例えば、トーナメントにおいて必ず実力が発揮されるとする場合、明らかに優勝者は最も実力がある人間（これを本論文内では「実力 1 位」と呼ぶ）に決まる。しかし、準優勝は本当に 2 番目に実力がある人間に決まるのであろうか。例えば強い人間同士が早い段階で戦うようなトーナメントの場合、準優勝は実力 2 位以外になりえる（ページ下表 (b) 参照）だろう。これらを、一応以下のように命題として提示し、証明しておく。簡単のため、トーナメントの参加人数は 2^n 人とする。（「実力 s 位」の意味については次ページ参照）

Proposition 1.1. 上の状況で、準優勝の可能性のあるのは実力 2 位から実力 $2^{n-1}+1$ 位まで。

証明　決勝戦には 2 人進む。その 2 人のうち一方は実力 1 位である。よって準優勝はそのもう 1 人である。そのもう 1 人は準決勝を決勝とみなした 2^{n-1} 人のトーナメントで一番強い人とみなせる。図のように一方に実力上位 2^{n-1} 人が集中すれば、準優勝者はもう一人は実力 $2^{n-1}+1$ 位の人間となる。よって最大値は $2^{n-1}+1$ 位である。最小値が 2 であるのは明らかである。 □



(a) 準優勝の最小値 (実力 2 位)　(b) 準優勝の最大値 (実力 5 位)

本論文では、「平等」とは「実力が順当に順位に反映されること」、「公平」とは「準優勝のチャンスが（適切な傾斜で）与えられること」と定義する。私たちはトーナメント制についてこの定義に則った「平等」と「公平」の観点から考えることを最終的な目標とした。

先程の命題で準優勝の可能性はいろいろな実力順位の人にあることが分かったが、当然2位の人は準優勝になりやすく、$2^{n-1}+1$ 位の人が準優勝する確率は本当に小さいはずだ。私たちはこの事実に気づいてから、その具体的な挙動に関心を持った。本論文では主に以下の2つを目標とすることにする。

- 確率、特に期待値を具体的な式により表し、その性質を調べる。
- その性質から、トーナメントの平等性・公平性を考える。

1.2 仮定と定義

本論文の中で、特別な規定のない限り次の仮定と定義をおいておく。まず仮定についてだが、

- トーナメント表は、すべての試合が始まる前に決まっている。
- トーナメントの参加人数は 2^n 人で、初期配置は同様に確からしい。
- 実力順位は1から 2^n までで任意の二人について勝敗が必ず決まる。
- $m>l$ ならば必ず実力 l 位が勝つ

上のようなトーナメントを「ランダムトーナメント」と呼ぶことにする。ただし、便宜上「2. 途中式と結果」の中では一部「トーナメント」として表記する。また、言葉を以下のように定義する。

実力k位　その人間の実力による順位
ブロック1　準決勝を決勝とみなした2つの 2^{n-1} 人のトーナメントで、実力1位を含む方
ブロック2　準決勝を決勝とみなした2つの 2^{n-1} 人のトーナメントで、実力1位を含まない方

2 途中式と結果

2.1 準優勝の期待値

先程示した命題をもう一度一般化した形で書く。先ほどとまったく同様の議論で証明できるので、紙面の都合上割愛させていただきたい。なお、Prop2.1 の $p=1$ が Prop1.1 に対応する。

Proposition 2.1. 2^p 位入賞することができる ⇒ 実力 $2^n-2^{n-p}+1$ 位以上

証明　省略　□

まず、準優勝の期待値の式を導出しようと思う。$T(n)$ を 2^n 人参加トーナメントの準優勝者の期待値とする。

$n=2$ の場合、すなわち 4 人トーナメントを考える。Prop1.1 より、実力 2,3 位の人間が準優勝する可能性がある。また、$P_s(n)$ を 2^n 人トーナメントにおける実力 s 位の人間が準優勝する確率とする。図 2 のトーナメント表の A が実力 1 位と仮定しても、一般性を失わないことに注意して考える。

実力 2 位 A に実力 1 位を固定する。B,C,D に実力 2,3,4 位が入るので、全パターン数は $3! = 6$ であり、C,D いずれかに実力 2 位が含まれる組み合わせは 4 通りあるので、実力 2 位が準優勝する確率は $P_2(2) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

実力 3 位 B,C,D に実力 2,3,4 位が入り、B に 2 位が入れば実力 3 位が準優勝でき、そのパターン数は 2 通りなので、$P_3(2) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ である。

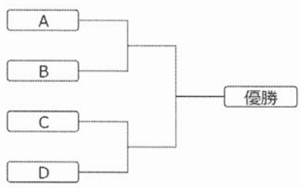


図 2: A を実力 1 位としても、一般性を失わない

よって、期待値は

$$T(2) = \frac{2}{3}\cdot 2 + \frac{1}{3}\cdot 3 = \frac{7}{3} \tag{1}$$

とすることができる。次のページにある図 3 を使いながら、$P_s(n)$ を一般化して表現しよう。

まず、A が実力 1 位で固定されており、参加者は 2^n 人いるので、すべてのトーナメントの組み合わせは実力 1 位以外の 2^n-1 人の順列とみなせるので $(2^n-1)!$ である。s 位が準優勝する条件は、ブロック 1 に実力 1〜$s-1$ 位が含まれるようにし、かつブロック 2 に s 位が含まれるようにすることである。

初めに、実力 $s+1$ 位〜2^n 位まで (つまり、s 位より弱い人間) のブロックの配分を決定する。ブロック 2 に s 位が含まれ、かつブロック 2 の残りの $2^{n-1}-1$ 人は全員、実力 $s+1$ 位〜2^n 位までである。よってそれは、s 位より弱い 2^n-s 人からブロック 2 に配分される $2^{n-1}-1$ 人を選ぶ組み合わせであり、${}_{2^n-s}C_{2^{n-1}-1}$ 通りである。

次に、各ブロック内における並び順を考える。ブロック 1 は A(実力 1 位) を除く $2^{n-1}-1$ 人の並び順、ブロック 2 は 2^{n-1} 人の並び順であるから、それぞれ $(2^{n-1}-1)!,(2^{n-1})!$ 通りである。

よって、

$$P_s(n) = \frac{{}_{2^n-s}C_{2^{n-1}-1}(2^{n-1}-1)!(2^{n-1})!}{(2^n-1)!} \tag{2}$$

である。

$n=3$ のとき、各 $P_s(n)$ を求めて（紙面の都合上計算は省略してしまうが、）

$$T(3) = \frac{4}{7}\cdot 2 + \frac{2}{7}\cdot 3 + \frac{4}{35}\cdot 4 + \frac{1}{35}\cdot 5 = \frac{13}{5} \tag{3}$$

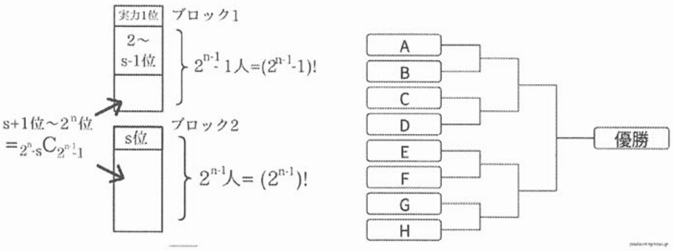


図 3: 左図では A が実力 1 位、ブロック 1 に実力 2,3 位が、ブロック 2 に実力 4 位がいればよい。

と計算できる。

同じようにして、$T(4) = \frac{25}{9}$ であることも計算できる。ここから、次の予想を立てた。

$$T(n) = \frac{3 \cdot 2^{n-1} + 1}{2^{n-1} + 1} \tag{4}$$

期待値である $T(n)$ は、各 $P_s(n)$ に s を掛け合わせ和を取ったものである。$2 \leqq s \leqq 2^{n-1} + 1$ なので、$k = 1$ からの式に直すと、この予想は次のように書き換えられる。

$$T(n) = \sum_{k=1}^{2^{n-1}} \frac{{}_{2^n-k-1}C_{2^{n-1}-1}(2^{n-1}-1)!(2^{n-1})!}{(2^n-1)!} \times (k+1) = \frac{3 \cdot 2^{n-1} + 1}{2^{n-1} + 1} \tag{5}$$

以下、この式が正しいことを示していく。補題をいくつか証明する。

Lemma 2.1.

$$\sum_{k=1}^{n} \{f(k) - f(k-1)\} = f(n) - f(0) \tag{6}$$

証明　省略 □

Lemma 2.2.

$$\sum_{k=1}^{n} {}_{k+m-1}P_m = \frac{{}_{n+m}P_{m+1}}{m+1} \tag{7}$$

証明　m を定数として $f(k) = k(k+1)\dots(k+m)$ と置くと

$$\sum_{k=1}^{n} {}_{k+m-1}P_m = \sum_{k=1}^{n} k(k+1)\dots(k+m-1) \tag{8}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{m+1}\{f(k) - f(k-1)\} \tag{9}$$

$$= \frac{1}{m+1}\{f(n) - f(0)\} \tag{10}$$

$$= \frac{{}_{n+m}P_{m+1}}{m+1} \tag{11}$$

ただし、(9) から (10) の変形で Lemma2.1 を用いた。 □

Lemma 2.3.

$$\sum_{k=1}^{n} k \cdot {}_{k+m-1}P_m = \left(\frac{n+m+1}{m+2} - \frac{m}{m+1}\right){}_{n+m}P_{m+1} \tag{12}$$

証明　定義より、

$$\sum_{k=1}^{n} k\,{}_{k+m-1}P_m = \sum_{k=1}^{n} k^2(k+1)\dots(k+m-1) \tag{13}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} k(k+1)\dots(k+m) - mk\dots(k+m-1) \tag{14}$$

$$= \frac{n+m+1}{m+2}\,{}_{n+m}P_{m+1} - \frac{m}{m+1}\,{}_{n+m}P_{m+1} \tag{15}$$

$$= (\frac{n+m+1}{m+2} - \frac{m}{m+1})\,{}_{n+m}P_{m+1} \tag{16}$$

□

ではこれらの補題を用いて計算していく。まず、${}_aC_b = \frac{a!}{b!(a-b)!}$ より、

$$\sum_{k=1}^{2^{n-1}} \frac{{}_{2^n-k-1}C_{2^{n-1}-1}(2^{n-1}-1)!(2^{n-1})!}{(2^n-1)!} \times (k+1) = \sum_{k=1}^{2^{n-1}} \frac{(2^n-k-1)!(2^{n-1}-1)!(2^{n-1})!}{(2^{n-1})!(2^{n-1}-k)(2^n-1)!} \times (k+1) \tag{17}$$

$$= \frac{(2^{n-1})!}{(2^n-1)!} \sum_{k=1}^{2^{n-1}} \frac{(2^n-k-1)!}{(2^{n-1}-k)!} \times (k+1) \tag{18}$$

である。また、k の和の順序を逆にする（$k = 2^{n-1}+1-t$ を代入し t による総和にする）ことにより、以下の式を得る。

$$\frac{(2^{n-1})!}{(2^n-1)!} \sum_{k=1}^{2^{n-1}} \frac{(2^n-k-1)!}{(2^{n-1}-k)!} \times (k+1) \tag{19}$$

$$= \frac{(2^{n-1})!}{(2^n-1)!} \sum_{t=1}^{2^{n-1}} \frac{(2^{n-1}-2+t)!}{(t-1)!} \times (2^{n-1}+2-t) \tag{20}$$

となる。また、

$$\frac{(2^{n-1}-2+t)!}{(t-1)!} = {}_{2^{n-1}-2+t}P_{2^{n-1}-1} \tag{21}$$

なので、

$$(20) = \frac{(2^{n-1})!}{(2^n-1)!}\{(2^{n-1}+2)\sum_{t-1}^{2^{n-1}} {}_{2^{n-1}-2+t}P_{2^{n-1}-1} - \sum_{t-1}^{2^{n-1}} t \cdot {}_{2^{n-1}-2+t}P_{2^{n-1}-1}\} \tag{22}$$

となる。以下、$n_0 = 2^{n-1}, m_0 = 2^{n-1}-1$ として話を進める。

(１) (22) の第一項について、Lemma2.2 より、

$$\frac{(2^{n-1})!}{(2^n-1)!}\{(2^{n-1}+2)\sum_{t-1}^{n_0} {}_{t+m_0-1}P_{m_0}\} = \frac{(2^{n-1})!}{(2^n-1)!}(2^{n-1}+2)\frac{{}_{n_0+m_0}P_{m_0+1}}{m_0+1} \tag{23}$$

$$= \frac{(2^{n-1})!}{(2^n-1)!}(2^{n-1}+2)\frac{(2^n-1)!}{2^{n-1}(2^{n-1}-1)!} \tag{24}$$

$$= 2^{n-1}+2 \tag{25}$$

(2) (22) の第二項について、符号を取り除いて考えると、Lemma2.3 より、

$$\frac{(2^{n-1})!}{(2^n-1)!}\{\sum_{t-1}^{n_0} t_{t+m_0-1}P_{m_0}\} = \frac{(2^{n-1})!}{(2^n-1)!}\{\frac{n_0+m_0+1}{m_0+2} - \frac{m_0}{m_0+1}\}_{n_0+m_0}P_{m_0+1} \tag{26}$$

$$= \frac{(2^{n-1})!}{(2^n-1)!}\{\frac{2^n}{2^{n-1}+1} - \frac{2^{n-1}-1}{2^{n-1}}\}\frac{(2^n-1)!}{(2^{n-1}-1)!} \tag{27}$$

$$= \frac{2^{2n-1}}{2^{n-1}+1} - 2^{n-1} + 1 \tag{28}$$

したがって、

$$(22) = (25) - (28) = 2^{n-1} + 2 - \frac{2^{2n-1}}{2^{n-1}+1} + 2^{n-1} - 1 \tag{29}$$

$$= 2^n + 1 - \frac{2^{2n-1}}{2^{n-1}+1} \tag{30}$$

整理して、

$$T(n) = \frac{3\cdot 2^{n-1}+1}{2^{n-1}+1} \tag{31}$$

となり、予想が正しいことが示された。

これは非常に興味深い結果である。簡単な式変形により、常に $2 < T(n) < 3$ であること、そして $n \to \infty$ で $T(n) \to 3$ がわかる。再びになるが $T(n)$ は準優勝の期待値である。一応これらを定理、系として書いておく。

Theorem 2.1. ランダムトーナメントにおける準優勝者の実力順位の期待値 $T(n)$ は、以下の式で表される。

$$T(n) = \frac{3\cdot 2^{n-1}+1}{2^{n-1}+1} \tag{32}$$

Corollary 2.1. ランダムトーナメントについて、次が成り立つ。
(1) 任意の自然数 n に対し、$2 \leqq T(n) < 3$
(2) $n \to \infty$ で、$T(n) \to 3$ に収束する。

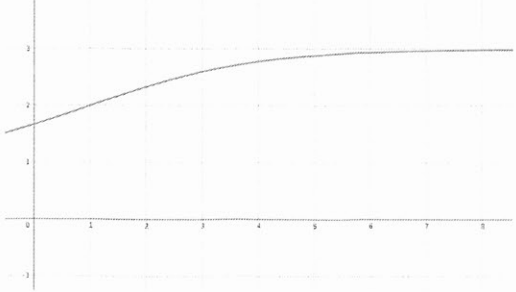


図 4: $T(n)$ の挙動を関数化したもの

実用的な意味を持つのは Cor2.1 であるだろう。人数が増えると $T(n)$ が大きくなるのは、参加者の増加によってより多くの参加者に準優勝の可能性がでてくるためであると、感覚的にも正しさを感じることができる。ちなみに、(2) は適切な変形を施し Lemma2.2 を用いて和を取ると 1 になることも確認できた（こちらも紙面の都合上省略させていただきたい)。

2.2 準優勝の確率の挙動

ここでは準優勝の確率、すなわち式 (2)、

$$P_s(n) = \frac{{}_{2^n-s}C_{2^{n-1}}(2^{n-1}-1)!(2^{n-1})!}{(2^n-1)!} \tag{33}$$

$$= \frac{(2^{n-1})!}{(2^n-1)!}\frac{(2^n-s)!}{(2^{n-1}-s+1)!} \tag{34}$$

の挙動を調べる。再喝するが、この式において n はトーナメントの人数 2^n、s はその実力順位を表す。（これも再度申し上げることになるが、s の範囲は $2^{n-1}+1 \geqq s \geqq 2$ であり、その他の s では 0 である。）また、ここでは単調増加・減少は広義の意味 (イコールを含む) とする。s が定数であることにも注意されたい。

では、実際に調べてみよう。$s=2$ の場合を考える。このとき、

$$P_2(n) = \frac{2^{n-1}}{2^n-1} \tag{35}$$

であるのは定義から簡単にわかる。ここで

$$P_2(n) = \frac{2^{n-1}}{2^n-1} \tag{36}$$

$$= \frac{1}{2}(1+\frac{1}{2^n-1}) \tag{37}$$

より、n が大きくなれば $\frac{1}{2^n-1}$ は小さくなるから、$P_s(n)$ は $s=2$ で n に関する単調減少数列である。

次に、$s=3$ の場合を考える。定義から、

$$P_3(n) = \frac{1}{2}\frac{2^{n-1}}{2^n-1} = \frac{1}{2}P_2(n) \tag{38}$$

なので、$P_3(n)$ も n に関する単調減少数列である。

更に、$s=4$ の場合を考える。定義から、

$$P_4(n) = \frac{1}{2}\frac{2^{n-1}}{2^n-1}\frac{2^{n-1}-2}{2^n-3} \tag{39}$$

である。これを以下のように式変形すると、

$$(39) = \frac{1}{2}\frac{(2^{n-1}-1)^2-1}{(2^n-2)^2-1} \tag{40}$$

$$= \frac{1}{2}\frac{(2^{n-1}-1)^2-1}{4(2^{n-1}-1)^2-1} \tag{41}$$

$$= \frac{1}{8}\{1-\frac{3}{4(2^{n-1}-1)^2-1}\} \tag{42}$$

である。よって n が大きくなるに連れ (42) は増加する（$\frac{1}{8}$ に近づく）から、$P_4(n)$ は n に関する単調増加数列である。

ここで、帰納的に $s \geqq 4$ なら $P_s(n)$ は n について単調増加数列であることを証明をする。まず、簡単な補題を 1 つ示す。

Lemma 2.4. $\{a_n\}, \{b_n\}$ を、ともに任意の n に対して正の値を取る単調増加数列とする。このとき、$\{c_n\} = \{a_n b_n\}$ は単調増加数列。

証明 仮定より、$a_{n+1} \geqq a_n, b_{n+1} \geqq b_n$ である。よって、

$$a_{n+1} \geqq a_n \geqq \frac{b_n}{b_{n+1}} a_n \tag{43}$$

である。両辺に b_{n+1} をかけると、目標の式が求まる。 □

では実際に帰納法で示す。まず、$P_s(n)$ を s による漸化式で表す。$P_s(n)$ の定義から、

$$P_{s+1}(n) = \frac{2^{n-1} + 1 - s}{2^n - s} P_s(n) \tag{44}$$

であるとわかる。ここで、

$$\frac{2^{n-1} + 1 - s}{2^n - s} = \frac{1}{2}\{1 - \frac{s-2}{2^n - s}\} \tag{45}$$

である。$s > 3$ のとき、$s - 2 > 0$ かつ $2^n - s \geqq 2^n - 2^{n-1} - 1 > 0$ である（s の定義域より）から、n が大きくなれば (45) は大きくなる。よって $P_s(n)$ が単調増加数列ならば、$P_{s+1}(n)$ も単調増加数列である。よって $s = 4$ で $P_s(n)$ が単調増加数列であることと Lemma2.4 より、$s \geqq 4$ において $P_s(n)$ は単調増加数列である。

以上のことをまとめよう。

Theorem 2.2. $P_s(n)$ を 2^n 人によるランダムトーナメントにおける実力 s 位の人間が準優勝できる確率とする。このとき、

- $s = 2, 3$ のとき、$P_s(n)$ は n について単調減少数列である。
- $s \geqq 4$ のとき、$P_s(n)$ は n について単調増加数列である。

この定理は自明ではなく、想像しがたい結果である。結論のパートにこの式に関する考察を譲るとして、計算の途中で発見したいくつかの面白い性質も系という形で以下に示しておく。

Corollary 2.2.

$$P_3(n) = \frac{1}{2} P_2(n) \tag{46}$$

Corollary 2.3. ([1]s を先に定数として固定している。)

$$\lim_{n \to \infty} P_s(n) = \frac{1}{2^{s-1}} \tag{47}$$

---

1) Cor2.3 では、s の値を固定していることに注意していただきたい。s を固定してから n の極限を求めているということである。結果と考察で述べるが、自分を準優勝させたいとき (これが s の値固定である)、自分より弱い参加者が多いか少ないかという場面を想定しているためである。

証明

$$\lim_{n\to\infty} P_s(n) = P_s \tag{48}$$

と書くことにすると、

$$P_2 = \lim_{n\to\infty} P_2(n) = \frac{1}{2} \tag{49}$$

である。また (45) の式について、s が定数であることに注意すると、

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\{1 - \frac{s-2}{2^n - s}\} = \frac{1}{2} \tag{50}$$

であるから、

$$P_3 = \frac{1}{2}P_2 \tag{51}$$

である。同様に

$$P_n = \frac{1}{2}P_{n-1} \tag{52}$$

である。これらより、帰納的に示される。 □

3 結果と考察

本論文の目標の達成として Theorem2.1,2.3 を挙げたい。これらが最も重要な結果であり、また興味深いものである。Theorem2.1 について、期待値は 2 よりは大きいが 3 を超えることがないため、実力 2,3 位の人に準優勝の確率が大きく傾き（Corollary2.1 参照)、なおかつ 3 位以下の人間の準優勝もないわけではない、ということが言えそうである。

Theorem2.3 をもう一度考察してみると、$P_n(s)$ が n について単調減少数列であるとは、トーナメントの参加人数が増えるほど準優勝になる確率が低くなり、単調増加数列であるとは、トーナメントの参加人数が増えるほど準優勝になる確率が高くなるということである。これらを実用的な言い方にすると、次のようになる。これは大変想像しがたい結果で、私たちも大変衝撃を受けている。

- $s = 2, 3$ のとき、自身が準優勝するにはなるべく自分より弱い参加者が少ない方が良い。
- $s \geqq 4$ のとき、自身が準優勝するにはなるべく自分より弱い参加者が多い方が良い。

これらの結果をどう受け止めるかは難しいが、以下に私たちの一意見として、考えをまとめさせていただきたい。

結論から述べると、「ランダムトーナメント」には否定的な立場で私たちの意見は一致した。概要でも述べた「平等」と「公平」の定義にから、以下に私たちの意見をまとめる。

・この定義において、総当たり戦は「平等」の要素しか持たないが、ランダムトーナメントは明らかに実力が低い人には準優勝の可能性がなく、実力がある程度ある人には準優勝のチャンスが与えられる（Prop1.1）という点で総当たり戦よりは「公平」であると考えられる。

・実力 2 位の人間の準優勝の確率が $\frac{1}{2} \leqq P_2(n) \leqq \frac{2}{3}$ というのは感覚的には低すぎるため「平等」と

は言えないのではないか。また、Theorem2.2 より参加人数が増えれば増えるほど実力 2,3 位の人間が準優勝する確率は下がるというのは、実力 2,3 位からすると「公平」さに欠けると考えた。
・しかし、トーナメントは試合数が総当たり戦よりもはるかに少ないため、悪い点ばかりではない

最後に、私たちはそのうえで、だからシードがあるのかということに気が付いた。全国高校サッカー選手権大会などでは、シードには予選や前回大会で優秀な成績をおさめた人が配置される。私たちは最初は「強い人間なのだから、シードにいなくてもよい成績を残せるのでは」思っていたが、完全なランダムトーナメントでは逆に実力順位の高い人間が損なのではないかと気づくことができた。シードとは、試合数の少なさというトーナメントの利点を持ちながら、かつなるべく「平等・公平」にするものなのだと思う。

4 感想と今後の課題

本論文では最初に提示した課題が解決でき、非常に満足している。また、最後にはシードに関して気づきが得られたのも本当にうれしかった。今後の課題としては、シードがどれほどランダムトーナメントの悪い点を改善しているのか、また実力 s 位の人間の順位の期待値などをより詳しく研究してみたいと思っている。
なお、本論文を著するに当たり多くの時間を費やして研究結果を出すことができたことは本当に奇跡なるものだと思う。この計算は私たちのこれまで得た多くの先人の知識、多くの人の協力によるものであることも忘れない。
これからもより深い研究をすることができることを望み、本論文の締めとさせていただく。

5 参考文献・使用ツール

・計算知能 Wolfram alpha　https://www.wolframalpha.com/
・トーナメント表作成ツール　https://terus.jp/knockoutdraw/v2/
・Geogebra 関数グラフ　https://www.geogebra.org/graphing?lang=ja
・Canva（キャンバ）　https://www.canva.com/
・Cloud LaTeX https://cloudlatex.io/ja（全サイト、最終閲覧 8/29）

2023 年 12 月 25 日
最終編集 2024 年 8 月 29 日