三次元空間における点集合の最小包囲球の必要十分条件と
鈍角の三次元への拡張

東京学芸大学附属高校　2年　本多剛欣

研究動機

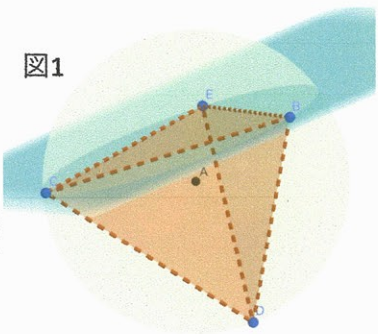
参考文献「数と図形」H・ラーデマッヘル、O・テープリッツ(1989) に最小包囲円についての章があり、省略されていた証明を自分でやってみたところ新たな疑問が見つかり、このテーマにした。鈍角の拡張については今年大阪で開催されたマスフェスタにて教授の方々との意見交換の際に出てきた問いなのでそれについても考えることにした。

研究概要

三次元の点集合の最小包囲球の求め方を調べ、そこから考えられる鈍角の三次元への拡張について考える。

条件の仮説

図1



定義　切断された球を球欠、球欠の球面部分を球冠とする。

包囲球の球面上にある4点のうち3点からなる平面で切断された四面体を含まない方の球欠の全てが半球以下のときその包囲球は最小のものである。

「数と図形」H・ラーデマッヘル、O・テープリッツ(1989)に載っていた最小包囲円の条件「包囲円上の3点からなる三つの弧のうちどの弧も半円以下」を三次元に拡張した。

これらの条件は、球面上にある点でできる(最小包囲球の場合は)四面体、または(最小包囲円の場合は)三角形が中心を内部に含んでいることと同値になる。

証明の方針

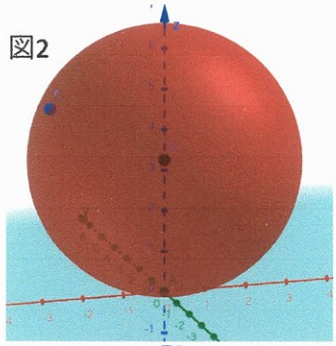
①仮説で示した包囲球上の四点を求める
②その四点でできる球が最小であることを示す

証明

①

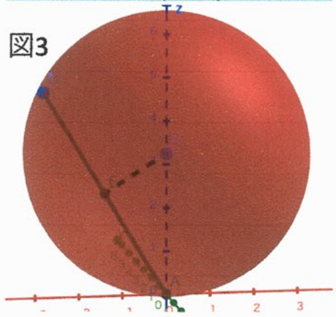
動作1　点集合を包含する十分に大きい包囲球S_0を用意する。点集合は有限個なので半径が十分に大きければ(2点間の距離が最大の組の片方を中心とし、この距離を半径にとれば全て収まる)必ず点集合は包含される。その半径R_0を球面に点P_1(以下n個目の点をP_nとする)が接するまで小さくする。

図2



動作2　P_1を球面上に置いたままP_2が球面に接するまでP_1に中心Oを近づける。P_1は球面上に固定する。(図2では分かりやすいようにP_1を通り球に接する面の方向にOを動かしている)

図3

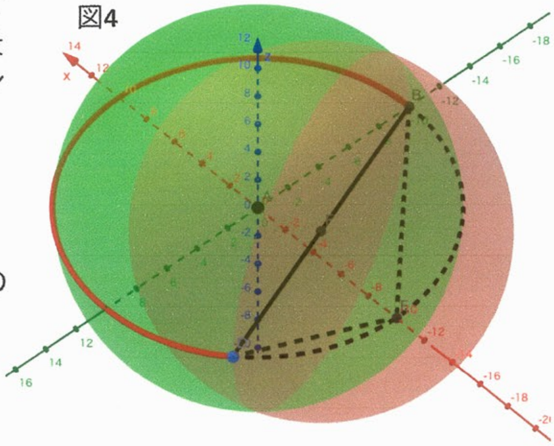


動作３　P_1,P_2を球面上に置いたままP_3が球面に接するまで2点の中点にOを近づける。
中点とOが重なるのならばその球はP_1P_2を直径とする最小包囲球となる。(直径をこれ以上小さくするとP_1P_2が球に収まらないため)この場合はここで動作が終わる。

動作４　この動作は球面上の3点からできる三角形が鈍角三角形のときに行う。
鈍角三角形とはつまり外心が外部にある三角形ということになる。これは「数と図形」H・ラーデマッヘル、O・テープリッツ(1989)に載っていた最小包囲円の条件「包囲円上の3点からなる三つの弧のうちどの弧も半円以下」という条件に反する。動作５ではこの円が大円になる場合がある。この条件に反していると、最小じゃないということはこの3点を内部に含み、かつそれよりも小さい大円が存在していまい、場合分けが複雑になってしまうためここで決まる3点は内部に外心を含む三角形になってもらいたい。

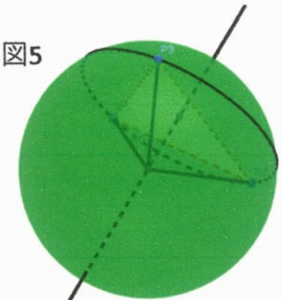
図4の緑の球が動作３でできた球でピンクの球は緑の球面上の3点を含む最小の(斜辺を直径にとる)球。このピンクの球が最小包囲球だとするとこの球面上には二点しかないので動作２で終わっているはずなので緑の球のピンクに飲み込まれていないところに一つ以上点が存在する。Oを斜辺の方向、つまり斜辺の中点の方向に近づけていけば新たな三つ目の点ができ、その三点の外心が三角形の内部に含まれるようになるまで操作を繰り返す。

図4



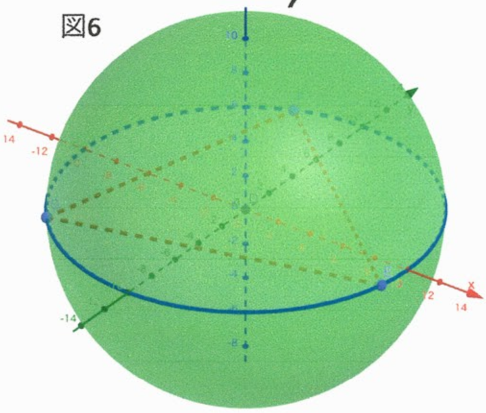
点集合は有限なのでできる三角形も有限。この動作を繰り返すたびに球の半径は小さくなっていくのでそのような三角形がないと無限に小さくなることになるのでこの動作は必ず終わる。

図5



動作5　P_1,P_2,P_3を球面上に置いたままP_4が球面に接するまで△$P_1P_2P_3$の外心にOを近づける。

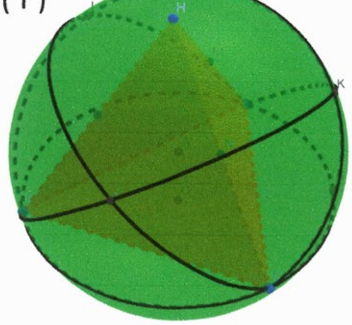
図6



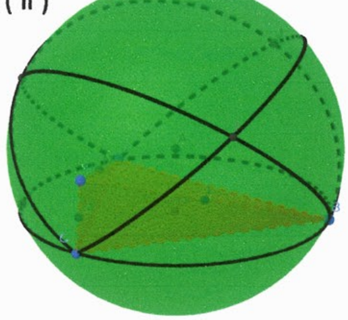
外心とOが重なるとき、H.ラーデマッヘル、O.テープリッツ(1989)より外心が△$P_1P_2P_3$の内部にある場合、大円は最小包囲円となる。そのため大円はこれ以上小さくなることはなく、この球は最小包囲球となる。

動作6　今、球面上には四点がある。そしては動作4で得た外心を内部に持つ三角形の頂点の三点のうち二点を通る大円三つの弧を追加したものである。動作4で得た三角形を四面体の底面として見るとき、(i)のように大円の弧よりも上に四個目の点があるときこの四面体は中心を含む。(ii)や(iii)の場合は弧よりも下にあるので四面体は中心を含んではいない。

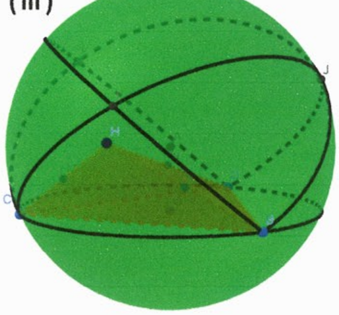
(i)



(ii)

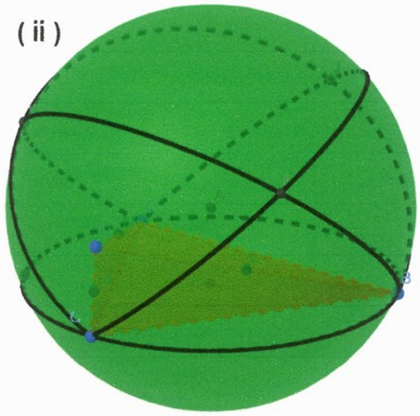


(iii)

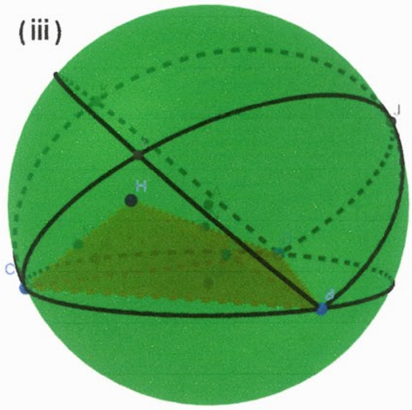


(ⅱ)の場合
一つの弧の下にいるということは球面上の四点のうち三点を通る平面で切断した四面体の含まれない四つの球欠のうち一つの内部に中心がある。その面の方向に中心Oを動かす。外心とOが重なるとき、大円はこの外接円になる。外心は内接する三角形の内部にあるため、この球は3点を球面上に含む最小包囲球になるがこの場合は動作４で終わっているはずなので外心とOが重なることはなく、新たな点が球面上に接する。この動作のあと、球面には点が４つあるので動作６に戻る。

(ⅱ)



(ⅲ)



(ⅲ)の場合
二つの弧の下にあるので(ⅱ)で書いたような球欠のうち二つが中心を含んでいる。この場合はこの二つの球欠の交線の方向にOを動かすことでより小さくできる。交線とOが重なってしまうと動作3で終わらなかったことと矛盾してしまうためそれまでに新たな三つ目の点が球面上に現れ、動作4からやり直す。

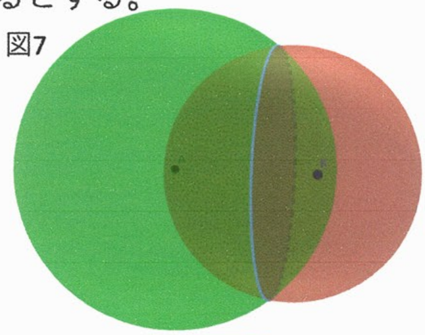
前ページで述べたように点集合の大きさは有限なので選ばれる四点も有限個の組み合わせしかない。(外接球が全ての点を含む組み合わせはもっと少ない)またこの動作を続けるたびに球は小さくなっていくのでこの動作はいつか終わる。よって中心をその四面体の内部に含むような球面上の4点の存在が示された。

②

この動作でできた包囲球が最小であることを示す。

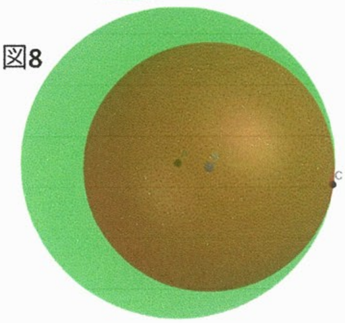
この動作でできる包囲球よりも小さい包囲球があるとする。

図7



小さい包囲球は大きい包囲球の球面上にある4点を含むので必ず球と球の共有された領域ができる。どちらの包囲球も全ての点集合を含むので共有された領域の中に全ての点がある。

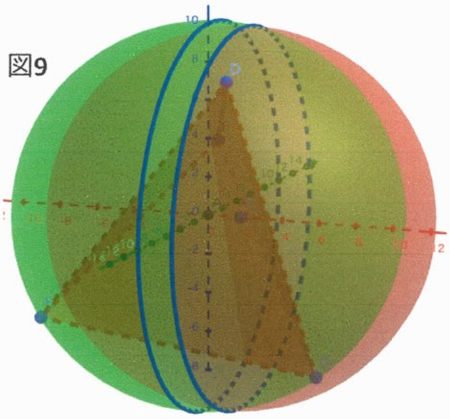
図8



小さい包囲球が完全に中に入る場合
小さい包囲球は動作でできた包囲球とせいぜい1点でしか接せないので少なくとも他の球面上の3点を含むことはできず、包囲球にはなれない。

小さい球が大きい球に収まらないとき、二つの包囲球の境界の円を大円とする球が一番小さくなるがその球は大きい球の半球未満の球冠しか含めない。動作でできた四点はその四面体が中心を内部に含むため、半球部分に四点が集まることはない。よって小さい球が含んでいない側の球冠に一つ以上の点があり、全て含めていないことのなるので新たな球は包囲球にはならない。

図9



よって仮説で示した四点でできる球が最小であることは示された。

鈍角について

図10

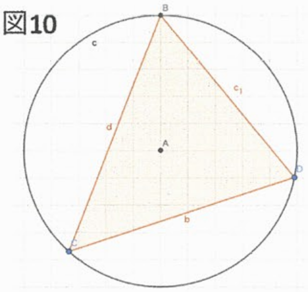


図10は「数と図形」H・ラーデマッヘル、O・テープリッツ(1989) の最小包囲円の条件「包囲円上の3点からなる三つの弧のうちどの弧も半円以下」の条件を満たす三点の図であり、その三点からなる三角形は鋭角三角形である。

図11

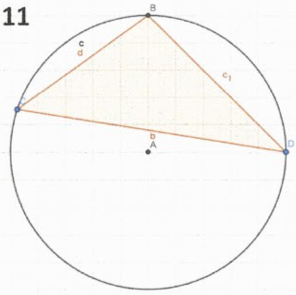


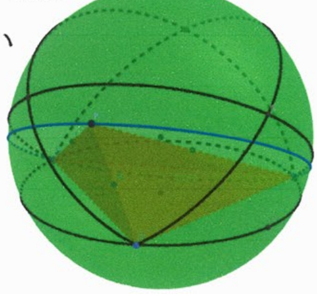
図11はこの条件を満たさない三角形であり、鈍角三角形となる。(円周角の定理より条件を満たさないことと鈍角三角形を作ることは同値)

そこで、三次元の場合で条件を満たさなかった四点に対して鈍角を定義できるのではないかと考えた。

定義
包囲球の球面上にある4点のうち3点からなる平面で切断された四面体を含まない方の球欠が中心を含むとき、その球欠と反対側にある残りの一点と他の三点との位置関係を鈍角であるとする。

この定義について平面の三平方の定理の大小関係を立体のデカルト・グアの定理(俗に言う四平方の定理)を用いて検証する。

図12



(ⅲ)の場合はどちらの面を定理の斜面として使えばいいのか判断できなかったので(ⅱ)の場合だけで検証した。

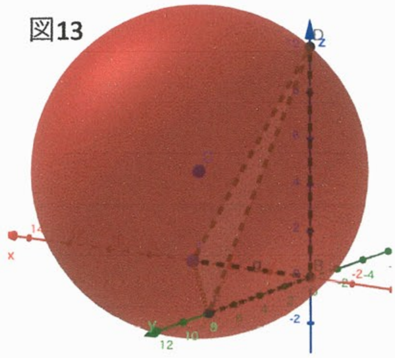
結果(特殊解)
15926<11903+5465+5379

一般化はできなかったが反例がでたのでこの定理から定義する鈍角と最小包囲球の条件から定義する鈍角は違うことが分かる。

考察

最小包囲円、最小包囲球の条件の結果からn次元の最小包囲超球もn+1個の点からなる、n+1次元で最も単純な図形の内部に超球の中心があることが条件であると考えた。

図13



鈍角の定義が合致しなかった理由に考えられるのは図13のように定理が等号を示していても斜面が大円上にないときがあることだ。最小包囲球の定義からこれは鈍角となってしまう。

今後の展望

この研究の目標はn次元の最小包囲超球の半径の範囲を二点間の最大の距離の一次式で表すユングの定理の三次元の場合を初等幾何で証明するというものなので、最小包囲球の条件が示せたことは大きな進歩だと思う。鈍角の拡張についてもこの研究の別の視点として使えると思うので探究を続けていきたい。

参考文献

「数と図形」H・ラーデマッヘル、O・テープリッツ(1989)