

景気の波は関数だ!!

桐蔭学園中等教育学校3年

朝倉匠、河上怜奈、長谷井遼太郎、吉村隆志
指導教諭 千田守先生 唐澤俊之先生

はじめに

近年の日本経済は大きな転換点を迎つつある。日経平均株価が史上最高値を更新し、春闘での賃上げ率がバブル期以来の高水準を記録するなど、平成初頭のバブル崩壊からおよそ30年間にわたって続いた景気低迷が終わる兆しを見せる一方、歴史的な円安や世界的な物価高騰を受けてドイツに名目GDP世界第三位の座を譲るなど、世界経済における日本の立ち位置も岐路に立たされている。こうした時節にあつて、私たちは日本を始めとした**各国の景気の動向について興味を持ち、数学的な手法で分析ができないかと考えた。**

一般に景気は拡張期(谷→山)と後退期(山→谷)を通して循環するとされ、私たちは中学3年の公民の授業でこれを学習した。この「循環する」という点に着目し、景気の動向を三角関数を含んだ関数により近似できるのではないかと考えた。

工学や物理学においては、**離散的なデータを関数として分析する場合「離散時間フーリエ変換」「離散フーリエ変換」といった手法**を用いる。離散的な関数 $f(n)$ ($n \in \mathbb{Z}$)について、それぞれの変換の定義式を下に示す。

$$F(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n)e^{-i\omega n} \quad F(k) = \sum_{n=0}^{N-1} f(n)e^{-i\frac{2\pi k}{N}n}$$

$F(\omega)$: 離散時間フーリエ変換 $F(k)$: 離散フーリエ変換 ω : 角速度 k : 波数 N : 標本数

これらの変換を用いることで、**入力した離散的データを三角関数の級数として得ることができる。**特に**離散フーリエ変換は有限個のデータを項数が有限個の級数に分解できるため、現実存在するデータを周期関数に近似するために多用されるという。**

しかしながらこれらの計算は解析学の知識を必要とする。そこで私たちは、粗い精度であれば高校数学の知識のみを使って景気動向を捉えられるのではないかと考えた。そもそも景気の各局面の期間は一定ではないため、**景気循環をあくまで一定の周期で捉えられるように、時系列を正規化**してみた。すると、正規化された系列のもとではGDPを一次関数と三角関数の和として近似することができ、さらに**2025年初頭にGDPが極大になる**との予測も得た。正規化を施さないまま関数として捉えた場合、現時点での予測と将来の動向に乖離が生じる可能性が大きいため、**正規化によって景気循環を捉える発想**は有効だったと言える。

さらにはこの「**正規化して関数に近似**」という手法は**資産運用にも応用できるもの**と思われる。私達の計算では今(7月22日)は拡張期の終盤のため、すぐに**日経平均にリンクした投資信託**を買い、**1ヶ月後に売却**すると効果的な資産運用が出来そうである。次の買いに関しては日経平均が減少から増加に向かう谷を確認したところで、**新たな近似式を作り、ピーク時を計算することにより売却するタイミングを求めることができる。**

複素数平面の活用

またGDPの推移を視覚的に表すにあたっては、**複素数平面による極座標系**を用いた。GDPの値が r 、偏角(時刻)が θ である点 $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ について、偏角を正規化したものを描くことで、基調となる一次関数の推移に対する周期的な摂動の影響や、景気循環と摂動との間の位相差が明確に観察できた。私たちが調べた限りでは、**GDPの推移を極座標で表している例は見当たらず、先進的な手法である**と思う。

第1章 景気循環とGDPの変動

国内総生産(GDP)とは、一国で一定期間内に生産された付加価値の総額を示す指標である。特に、為替の変動の影響を除いた実質GDPは、その国の経済規模を測る基準として広く使われている。日本において景気の状態を測るのに用いられる景気動向指数(CI・DI)は、算出にあたってGDPと関連していない。景気の概況を判断する基準は国によって異なるが、多くの国でこの点は共通しているため、**GDPと景気動向に関連があるかどうかを調べることにした。**

§1 景気循環の周期

景気循環論によれば、市場経済の活動は拡張と収縮を繰り返しながら成長しており、回復・好況・後退・不況・再び回復、という4つの局面を経る循環的な動きを示すという。これを踏まえて市場の動向を分析するにあたり、景気の変動は周期関数により近似できるのではないかと考えた。

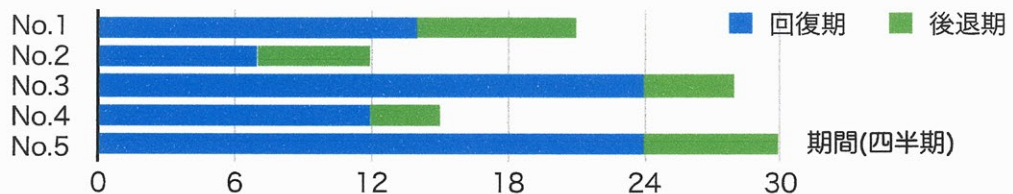
日本の景気循環において基準となる日付は、景気動向指数(CI・DI)の推移をもとに内閣府経済社会研究所が発表している。景気動向指数は、産業・金融・労働など様々な経済活動での景気指標30系列の動きをもとに算出したもので、文字通り景気動向の局面を示す。以下の表1.1.1は、データ比較の都合上、内閣府発表の日付を四半期に読み替えて抜粋したものである。

なお第1四半期(Q1)は1月から3月、第2四半期(Q2)は4月から6月、第3四半期(Q3)は7月から9月、第4四半期(Q4)は10月から12月にあたる。**Qはquaterの頭文字で四半期を指している。**

表1.1.1 景気基準四半期 内閣府HPより作成

循環	谷	山	谷	回復期(谷→山) の期間	後退期(山→谷) の期間
No.1	1993年Q4	1997年Q2	1999年Q1	14期 (42ヶ月)	7期 (21ヶ月)
No.2	1999年Q1	2000年Q4	2002年Q1	7期 (21ヶ月)	5期 (15ヶ月)
No.3	2002年Q1	2008年Q1	2009年Q1	24期 (74ヶ月)	4期 (12ヶ月)
No.4	2009年Q1	2012年Q1	2012年Q4	12期 (36ヶ月)	3期 (9ヶ月)
No.5	2012年Q4	2018年Q4	2020年Q2	24期 (74ヶ月)	6期 (18ヶ月)

グラフ1.1.2 各循環の長さ



グラフ1.1.2には、それぞれの景気循環の期間を示した。回復期よりも後退期の方が期間が短い傾向にはあるが、いずれの期間についても一定の規則性は読み取れないと判断した。

循環の期間が不定のままでは、景気循環を周期的に捉えることができない。そこで、**それぞれの回復期・後退期の期間を伸張・圧縮し、全ての循環を一定の周期へと正規化する。**

具体的には位相 θ に関して、

$$\text{回復期が } 2n\pi \leq \theta \leq (2n+1)\pi, \text{ 後退期が } (2n+1)\pi \leq \theta \leq (2n+2)\pi \quad (n \in \mathbb{N})$$

となるようにデータの位相を設定する。この後で用いるデータは四半期ごとの数値であるため、各回復期・後退期の期間(T_n とおく)を、表1.1.1の右側2列から $T_1 = 14, T_2 = 7, T_3 = 7, T_4 = 5, T_5 = 24, \dots$

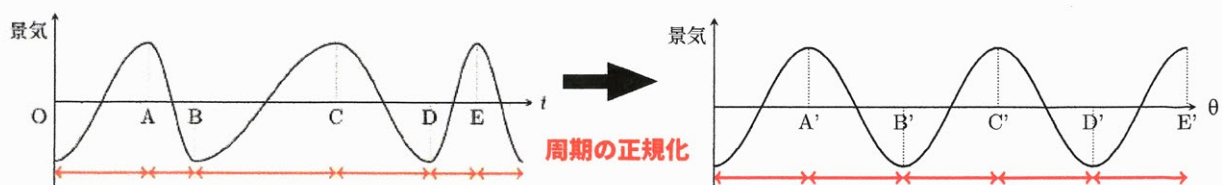
とすると、各データの位相差は $\omega_n = \frac{\pi}{T_n}$ となればよい。実際に各データの位相 θ_n を設定すると、

$$\frac{\pi}{14}, \frac{2}{14}\pi, \frac{3}{14}\pi, \dots, \frac{13}{14}\pi, \pi, \frac{8}{7}\pi, \frac{9}{7}\pi, \dots, \frac{13}{7}\pi, 2\pi, \frac{15}{7}\pi, \frac{16}{7}\pi, \dots, \frac{20}{7}\pi, 3\pi, \frac{16}{5}\pi, \dots$$

位相差 $\frac{\pi}{14}$
位相差 $\frac{\pi}{7}$
位相差 $\frac{\pi}{7}$
位相差 $\frac{\pi}{5}$

となり、時系列を位相 θ の系列に正規化できた。この正規化によりグラフは次のように変化する。

図1.1.3 景気循環のイメージ



次に実質GDPの値を r と置き、 θ を横軸、 r を縦軸とすることにより、2変数 θ, r による座標系を設定する。この θ - r 平面に点 (θ, r) を描いたものの一つが後述する§2のグラフ1.2.1である。 r にはGDPに限らずいろいろな経済指標を入れることができるが、ここでは先述の通り一国の経済規模を測る目的で実質GDPを用いる。分析したい指標の値を代入すると、 θ の変化に応じた r の推移を観察できる。 r が景気循環に則って変化しているならば、 r は θ の関数として表すことができる予想される。

§2 関数への近似

内閣府が発表した景気循環を§1で正規化した位相と実質GDPの関係について、連続的なデータを得られた1993年第4期から2020年第2期までの様子を θ - r 直交座標系で描くと次のグラフ1.2.1ようになる。



これを見ると $\theta = 6\pi$ に大きな下落があることがわかる。2008年9月に起きたリーマン・ショックの煽りを受けてGDPが底を打ったときのものである。実際の値でも、2008年第4期から2009年第1期にかけては r がおおよそ0.244(24.4兆円)落ち込んでいる。この落ち込みを無視して $0 \leq \theta \leq 10\pi$ 全体で連続な関数とすることは不適切だと判断した。

一方で、その前後の $0 \leq \theta \leq 6\pi$ と $6\pi \leq \theta \leq 10\pi$ それぞれの範囲について

$$f(\theta) = (\text{一次関数}) + (\text{三角関数})$$

の形により、 θ による滑らかな関数 $f(\theta)$ として近似できないかと考えた。もしも実質GDPが景気循環とほぼ一致して変動しているならば、 $f(\theta)$ における三角関数の項は、周期はほぼ 2π となるはずである。

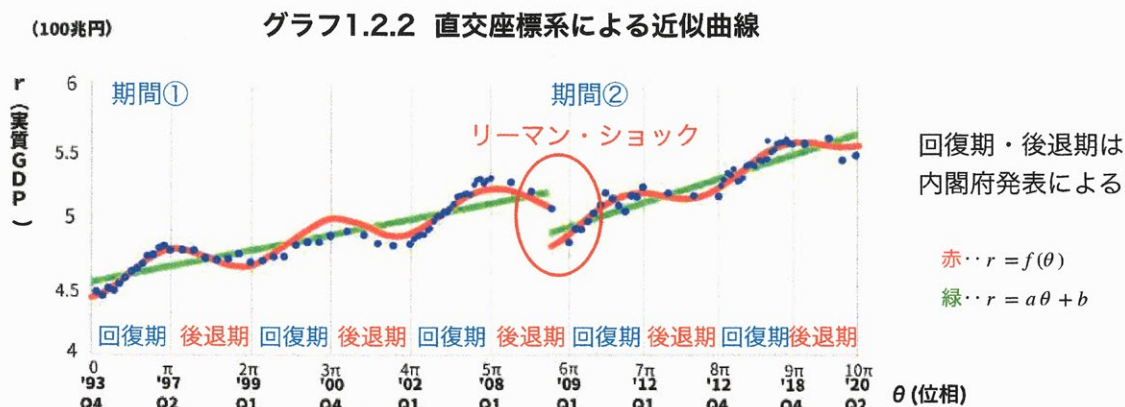
ここで、係数 a, b, c, d, e ($a > 0, c > 0$)を用いて

$$f(\theta) = a\theta + b + c\sin(d\theta + e)$$

とすると、 $0 \leq \theta \leq 6\pi$ と $6\pi \leq \theta \leq 10\pi$ のそれぞれの値を最小二乗法を用いて $f(\theta)$ へ近似した結果は、

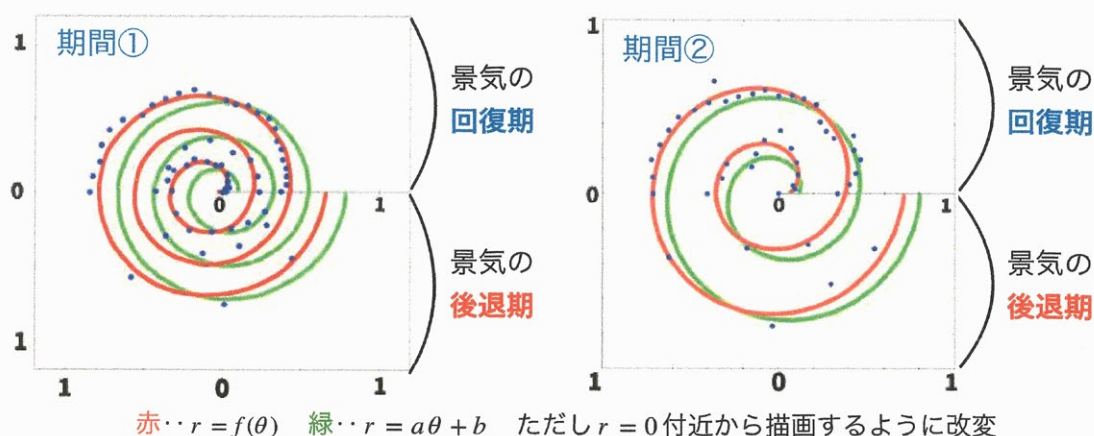
$$0 \leq \theta \leq 6\pi \text{ のとき } \begin{cases} a = 0.0365142 \\ b = 4.53181 \\ c = 0.126398 \\ d = 1.01455 \\ e = -1.5924 \end{cases} \quad \cdots \text{期間①} \qquad 6\pi \leq \theta \leq 10\pi \text{ のとき } \begin{cases} a = 0.0551925 \\ b = 3.89361 \\ c = 0.0948142 \\ d = 0.951823 \\ e = 0.200364 \end{cases} \quad \cdots \text{期間②}$$

となり、このときの $r = f(\theta)$ を θ - r 直交座標系で表すと、次のグラフ1.2.2ようになる。



ここから見て取れるように、リーマン・ショック前後では緑色の直線 $r = a\theta + b$ の様子が大きく異なっている。関数を分割するのか近似の誤差と見るかには恣意性が介在するものの、一つの関数と見なすには無理があると判断できるものは分割すべきであろう。この分割により $0 \leq \theta \leq 6\pi$ 、 $6\pi \leq \theta \leq 10\pi$ のそれぞれについて、概ね良い近似式を得ることができた。さらに次頁のグラフ1.2.3は、極座標を用いて推移を描いたものである。ただし半径方向の変化を見やすくするため、各関数から $f(\theta)$ の最小値を差し引いて描画している。

グラフ1.2.3 極座標系による近似曲線



グラフ1.2.3についても、 $\theta = 6\pi$ の前後での関数の違いを見てみよう。 $r = f(\theta)$ と $r = a\theta + b$ のグラフはややずれていることがわかる。これは期間①②ともに $d \approx 1$ 、即ち変動の周期がほぼ 2π であるため2曲線の交点は約半周おきに現れる故のことだが、交点の位相は e (rad)の値に対応して開きが生じている。また、赤い曲線と緑の曲線の距離の最大値を表す c の値は、 $\theta = 6\pi$ を境に縮小した。なお、 $d \approx 1$ となつて変動の周期はほぼ 2π であるということから、位相上のずれこそ存在するものの、**実質GDPと景気循環はほぼ連動して動いていることがわかった**。先述の通り**景気循環を決定する過程は実質GDPとの関連が無いことを考えれば、改めて大きな発見と言える**。

第2章 諸外国への適用

この章では、日本以外の国の実質GDPと景気循環について直交座標及び極座標で表してみる。先進国ではアメリカとEUの代表としてドイツを選び、新興国として中国とインドを選んだ。ただし国によって公表されているデータの期間がずれているため、グラフや分析する期間が異なっていること、また単位たる通貨も異なっているため、単純比較はできないことに注意して頂きたい。

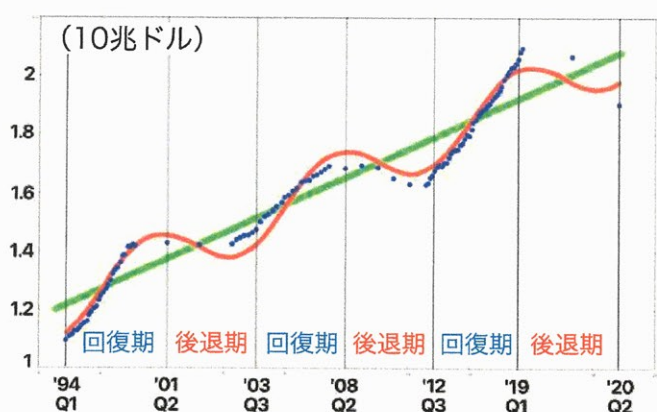
【アメリカ】(景気循環と実質GDP両方のデータが揃っている期間は1994年～2020年)

この節ではアメリカについて見ていく。下は1994年から2020年までの値を表した直交座標系(グラフ2.2.1)である。前章で述べたように、グラフ①の $f(\theta) = a\theta + b + c\sin(d\theta + e)$ と置いて近似したときの係数 a, b, c, d, e それぞれの値は、

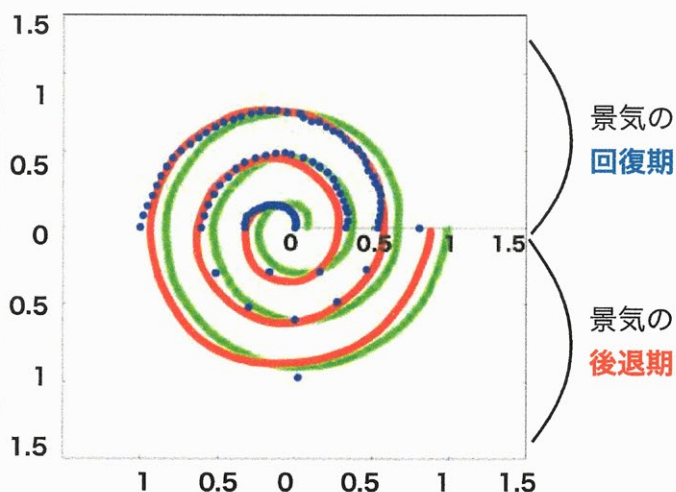
$$a = 0.0480086, \quad b = 1.17237, \quad c = 0.102625, \quad d = 1.04097, \quad e = 4.09957$$

となった。このときの $r = f(\theta)$ を、次のように θ - r 直交座標系(グラフ2.1.1)及び極座標系(グラフ2.1.2)で表した。これらのグラフの青点は実質GDPを表し、回復期・後退期は発表された景気循環による。以降の国々に関しても同様とする。

グラフ2.1.1(1994Q1~2020Q2)



グラフ2.1.2(1994Q2~2020Q2)



グラフを見ると、**回復期に点が集中していることがわかる**。これは**景気が緩やかに回復し急激に後退していることを意味する**。第1章では日本について、後退局面よりも回復局面の方が長い傾向があると述べたが、アメリカはこの傾向がさらに強くなっている。また、日本はリーマン・ショック発生前後で分けて近似する必要があったが、アメリカはリーマン・ショック発生前と発生後の近似曲線が概ね一致した。故に、リーマンショックにおけるアメリカの被害は、当事国でありながらも比較的軽微だったと言える。

【ドイツ】（景気循環と実質GDP両方のデータが揃っている期間は1992年～2020年）

ドイツはリーマン・ショックが発生した2008年から2009年にかけてGDPが近似曲線よりも大幅に下回ったため、日本と同様に2009年Q1までと2009年Q2以降の2つの期間に分けた。

$f(\theta) = a\theta + b + c\sin(d\theta + e)$ と置いて近似した時の係数 a, b, c, d, e それぞれの値は、

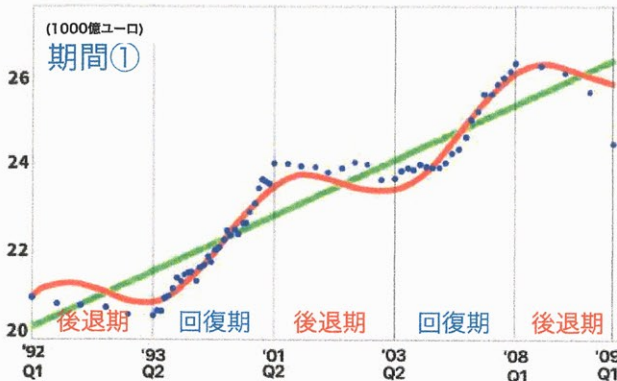
$$a = 0.101164, \quad b = 5.07252, \quad c = 0.184242, \quad d = 1.01521, \quad e = 1.19927 \quad \dots \text{期間①}$$

$$a = 0.127915, \quad b = 4.65593, \quad c = 0.384783, \quad d = 0.934537, \quad e = 2.77858 \quad \dots \text{期間②}$$

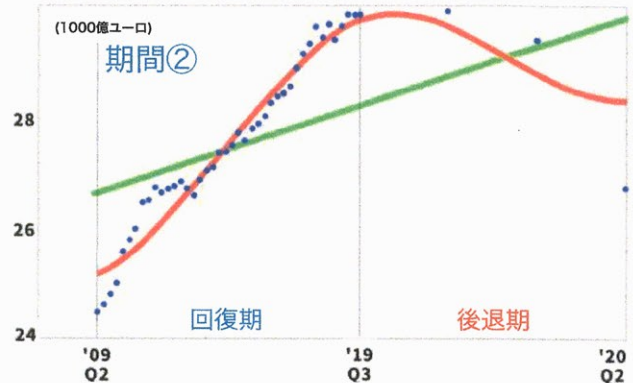
となった。そして、このときの $r = f(\theta)$ を下の θ - r 直交座標系（グラフ2.2.1及び2.2.2）及び極座標系（グラフ2.2.3及び2.2.4）で表した。

ドイツは1989年の東西再統一から長期間にわたり経済が混乱していたが、近年は回復傾向にある。期間①よりも②の方が a の値が大きくなっていることにも、その様子を見ることができる。

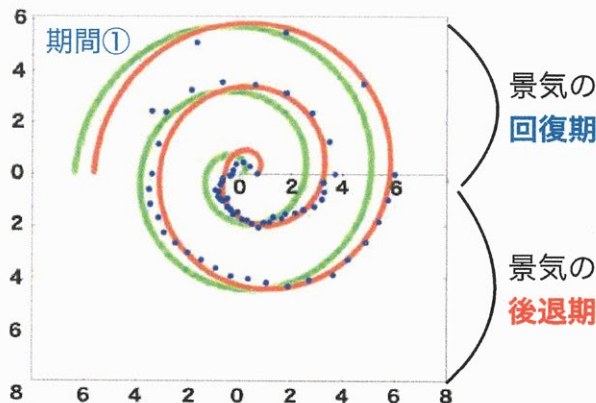
グラフ2.2.1(1992Q1~2009Q1)



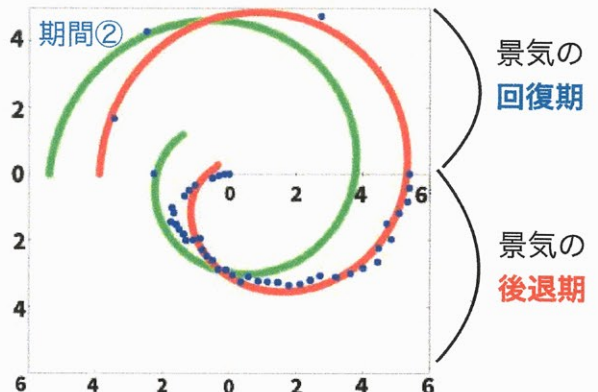
グラフ2.2.2(2009Q2~2020Q2)



グラフ2.2.3(1992Q1~2009Q1)



グラフ2.2.4(2009Q2~2020Q2)



【中国】（景気循環と実質GDPの両方のデータが揃っている期間は1992年～2005年）

次に中国について見ていく。次頁の2つのグラフは1992年7月から2005年1月までの値を表した直交座標系（グラフ2.3.1）、及び極座標系（グラフ2.3.2）である。これらのグラフの見方も、先ほどと同様である。中国のグラフは、ある年を境にした大きなプラス成長またはマイナス成長が見られないので、1つのグラフで考察することができる。

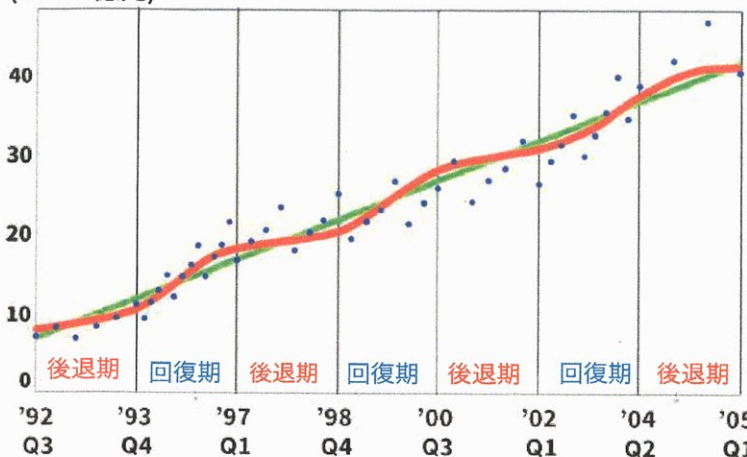
$f(\theta) = a\theta + b + c\sin(d\theta + e)$ と置いて近似した時の係数 a, b, c, d, e それぞれの値は、

$$a = 1.58059, \quad b = 6.87226, \quad c = 1.45069, \quad d = 0.905155, \quad e = 2.35912$$

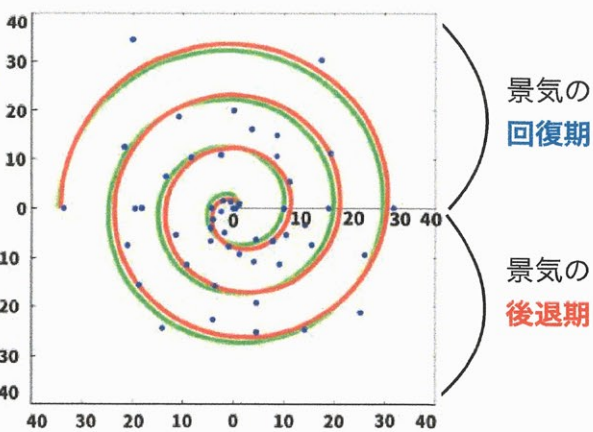
となった。なお、グラフ2.3.1について詳しく見てみると毎年Q4が最大となり、翌年のQ1で大きく下落することを毎年繰り返していることがわかる。なぜこのようなことを毎年繰り返しているのかは不明であるが、毎年の季節的な上下は中国の経済周期全体にはあまり関係がないものと考えて、より大きい経済周期を近似したため青点と近似曲線（赤色）にずれが生まれている。

グラフ2.3.1より、赤色の曲線 $r = f(\theta)$ と緑色の直線 $r = a\theta + b$ とを比較すると差がほとんどないことがわかる。またグラフ2.3.2から今まで紹介した3カ国と後述するインドの極座標系のグラフと比べて赤色の曲線 $r = f(\theta)$ は緑色の曲線 $r = a\theta + b$ とほぼ一致している。中国は1978年に始まった改革開放政策により、約40年間で大きな好不況の波がなく、順調な経済成長を遂げたことがわかる。

グラフ2.3.1(1992Q3~2005Q1)



グラフ2.3.2(1992Q3~2005Q1)



【インド】 (景気循環と実質GDPの両方が揃っている期間は1996年～2018年)

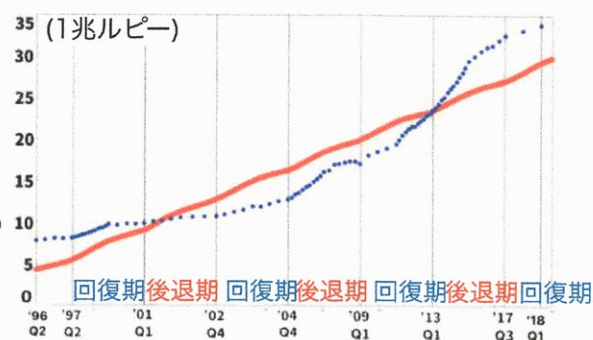
ここではインドについて見ていく。右のグラフ2.4.1は1996年から2018年までの値を表したものである。グラフの見方は先述のものと同じである。

グラフ2.4.1 (1996Q2~2018Q1)

$f(\theta) = a\theta + b + c\sin(d\theta + e)$ と置いて近似した時の係数 a, b, c, d, e それぞれの値は

$$a = 0.325883, \quad b = 0.990503, \quad c = 1.76345, \\ d = 0.56716, \quad e = 4.12561$$

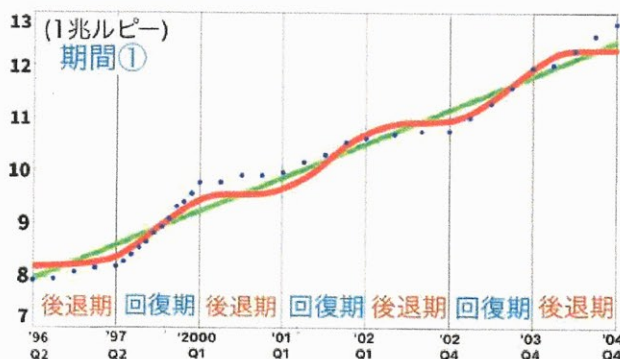
となった。このときの $r = f(\theta)$ を θ - r 直交座標系で表すと、グラフ2.4.1の赤い曲線ようになった。実際のGDP(青)の推移は途中で大きく傾きが変わっており、赤線で表される関数は良い近似式であるとは言えない。そのため、2004年Q4までと2005年Q1以降とに分けてそれぞれ近似を行った。



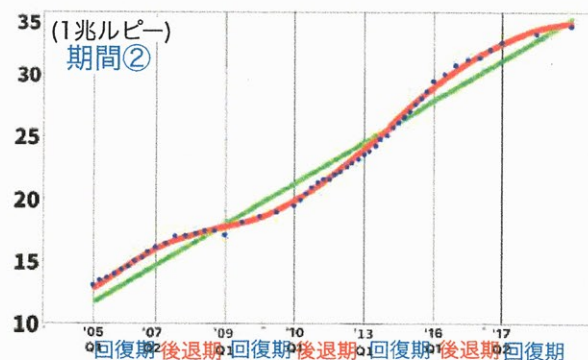
その結果は、 $a = 0.210012, \quad b = 7.89959, \quad c = 0.230366, \quad d = 0.892005, \quad e = 2.16705$ ・・・期間①
 $a = 1.0456, \quad b = -11.6651, \quad c = 1.53211, \quad d = 0.403839, \quad e = -8.1626$ ・・・期間②

であった。そして、それを再び $r = f(\theta)$ の θ - r 直交座標系で表すと、下の直交座標系で表した2つのグラフ、グラフ2.4.2、及びグラフ2.4.3のようになった。

グラフ2.4.2(1996Q2~2004Q4)



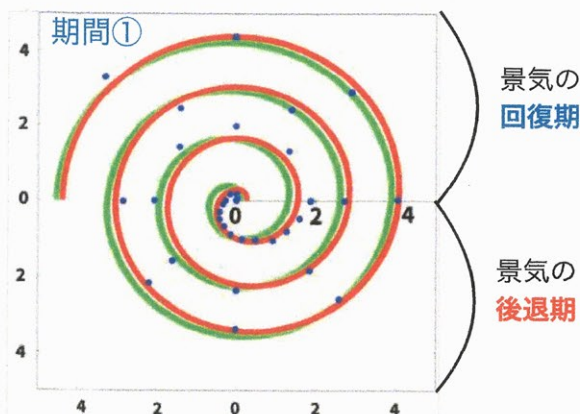
グラフ2.4.3(2005Q1~2017Q4)



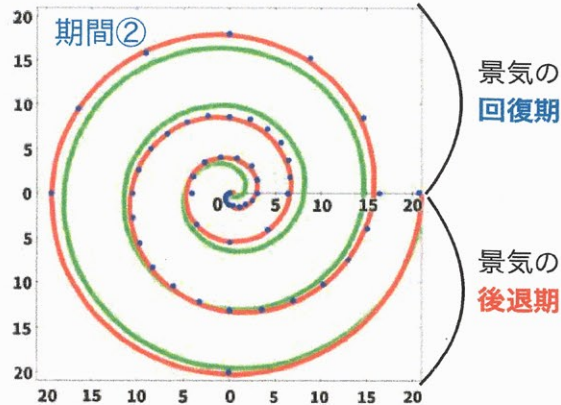
上記の2つで示したグラフ及び近似した際の係数値を比較・考察すると、緑の直線の傾きを表す係数 a の値が期間①の0.210012から期間②の1.0456へと大きく変化しており、2005年以降に大きな経済成長が起こったことが読み取れる。また、グラフ2.4.3のほとんどの青い点は赤い近似曲線の線上にあることから、かなり正確な近似式であると言える。しかしながら d の値を見ると、日本や米国、ドイツはおおよそ $d \approx 1$ だったのに対して、インドの近似式ではこの傾向が薄れている。特に期間②では d が1からかけ離れており、景気循環がGDPの変動に及ぼす影響は小さくなった。

次にこれらを極座標系で表した。次頁のグラフ2.4.4、及びグラフ2.4.5を見てみる。これらのグラフからも2005年以降の大きな経済成長がわかり、グラフ2.4.4と比べてグラフ2.4.5の1周当たりの伸びが大きいことがよくわかる。

グラフ2.4.4(1996Q2~2004Q4)



グラフ2.4.5(2005Q1~2018Q1)



第3章 最新の動向と未来予測

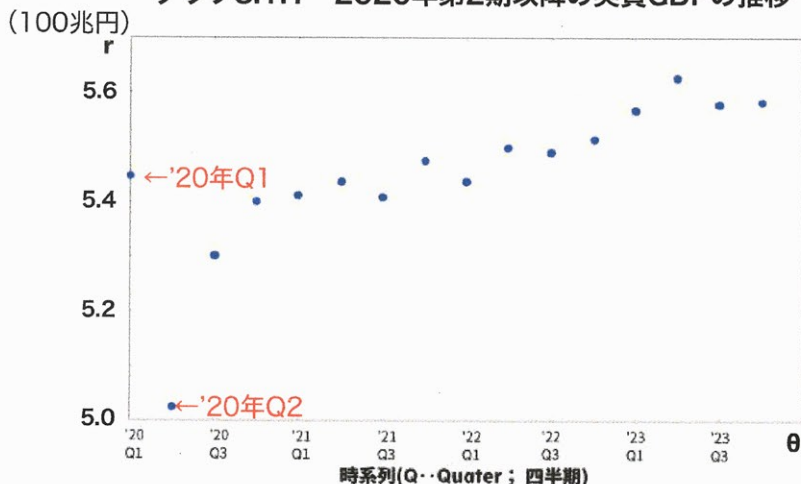
この章では再び日本のGDPの推移に目を向ける。直近の3年間は政府による景気循環の基準日付は未発表であるため、精密に正規化することができない。そこで、**正規化を施す前のデータから正規化後の関数を予想し、理論的に次にGDPの振動が極大となる時期を予測した。**

§1 景気循環の日付がわからない区間の予測

第1章では、内閣府が発表した景気循環の基準日付をもとに回復期・後退期の期間を決定し、時系列の伸長・圧縮を施すことで正規化した。当然、正規化を行うには景気循環の日付の情報が必要である。しかしこの日付は、実際に景気循環の山・谷を超えたのち数年経ってから決定されるものである。故に、執筆時点(2024年6月)で最新の「2020年第2期の谷」以降については正確な正規化ができない。

一方で、四半期のGDP(r 軸)は毎期発表されているため、正規化していない単純な時系列で r の値を観察することはできる。次の**グラフ3.1.1**に、GDPは発表されているが景気循環が発表されていない、2020年第2期から2023年第4期までのGDPの推移を示す。**このグラフの時系列は正規化されていない。**

グラフ3.1.1 2020年第2期以降の実質GDPの推移



谷の直前の2020年第1期と比較すると、第2期では r の値が大きく落ち込んでいる。これは記憶にも新しいコロナ危機によるものであり、ここで約0.423(42.3兆円)下落した。2008年のリーマン・ショックではおよそ0.244(24.4兆円)の落ち込みだったことを踏まえれば、正規化後の関数が谷の前後で連続しているとは考えるのは無理がある。関数が連続している場合はその逆関数に r の値を代入するだけで各点の位相を求めることができたが、コロナ禍の期間を含めると連続な関数が見つからない。

図3.1.2 景気循環のイメージ(三角関数のみ抽出)

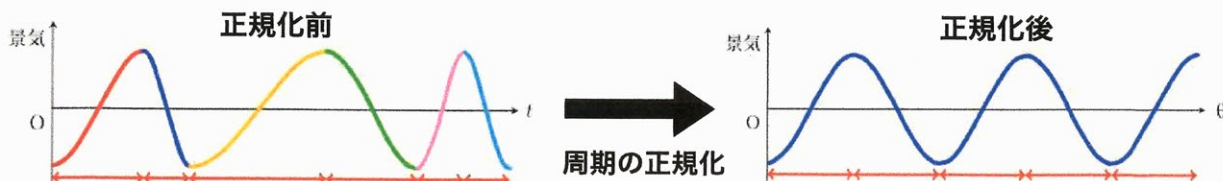


図3.1.2のように、正規化前のグラフは、個々の回復期・後退期を表すグラフの各色の部分に限定すると、それぞれ一次関数と三角関数の和として近似できるが、全体としては一つの関数に近似することはできない。しかし、正規化前の各色の曲線は、時間軸(位相軸)の縮尺を変えて正規化することにより、全体を一つの関数で近似することが可能となる。従って、**グラフ3.1.1の区間(2020年Q2-)を単一の回復期と考えて近似すれば、GDPの振動が極大となる時期が求まる。**

§2 理論的思索

次にGDPの振動が極大となる時期を予測するにあたって、「コロナショックの谷以来まだ次の山は来ていない」ということを仮定する(①)。グラフ3.1.1を見ても、一旦下落したのちは概ね上昇傾向にあることから、当面は景気の回復局面が続いていると見なした。

グラフ3.1.1について、正規化前の四半期による時系列を t とおき、グラフ1.2.2における2020年第1期($\theta = 10\pi$)を $t = 0$ とする。また、仮定①に注意すると、次に景気の山となる位相は $\theta > 10\pi$ であるので、 $\theta' = \theta - 10\pi$ と置く。

係数 j, k, l, m, n ($j > 0, l > 0$)を置き、 t - r 座標で表された一連の点の集合を

$$r = jt + k + l \sin(mt + n) \quad \dots(2)$$

という関数と見なす。仮定①よりこれらの点は全て同一の局面にあり位相差は等しいため、先述の通り正規化にあたっては時系列 t を定数倍することで θ' の次元に変換される。この定数を縮尺 ϵ として、

$$\theta' = \epsilon t \Leftrightarrow t = \frac{\theta'}{\epsilon}$$

とする。これを(2)に代入すると

$$r = \frac{j}{\epsilon} \theta' + k + l \sin\left(\frac{m}{\epsilon} \theta' + n\right)$$

となり、これを $r = f(\theta')$ 即ち $r = a\theta' + b + c \sin(d\theta' + e)$ と係数比較すると、

$$a = \frac{j}{\epsilon}, \quad b = k, \quad c = l, \quad d = \frac{m}{\epsilon}, \quad e = n$$

と求めることができる。さて、次にGDPの三角関数の項が極大となる位相は、仮定①に注意すると、

$$\theta' > 0 \text{ かつ } \frac{d}{d\theta'} c \sin(d\theta' + e) = 0 \text{ かつ } \frac{d^2}{d\theta'^2} c \sin(d\theta' + e) < 0 \quad \dots(3)$$

となる最小の θ' である。

$$\frac{d}{d\theta'} c \sin(d\theta' + e) = 0 \Leftrightarrow cd \cos(d\theta' + e) = 0$$

$$\frac{d^2}{d\theta'^2} c \sin(d\theta' + e) < 0 \Leftrightarrow -cd^2 \sin(d\theta' + e) < 0 \Leftrightarrow \sin(d\theta' + e) > 0$$

$$\therefore d\theta' + e = \frac{\pi}{2} + 2t\pi \quad (t \in \mathbb{Z})$$

従って(3)を満たす最小の θ' は

$$\theta' = \frac{1}{d} \left(\frac{\pi}{2} + 2X\pi - e \right) \quad (X \text{ は } \frac{\pi}{2} + 2X\pi > e \text{ を満たす最小の整数})$$

$$\therefore \begin{cases} \theta = 10\pi + \frac{1}{d} \left(\frac{\pi}{2} + 2X\pi - e \right) \\ t = \frac{1}{\epsilon d} \left(\frac{\pi}{2} + 2X\pi - e \right) = \frac{1}{m} \left(\frac{\pi}{2} + 2X\pi - n \right) \end{cases} \quad \dots(4)$$

となり、理論的には次のGDPの振動の山の位相と時期を正規化前の関数から算出することができた。

§3 実際の値

上記の文字式は仮定①のもとでは理論的に疑いようはない。しかしながら、ここへ実際に代入する具体的な値はデータの近似によって得る必要があり、近似の精度によって結果が左右されてしまう。特に今回については、グラフ3.1.1に示された正規化前のデータを一次関数と三角関数の和として見ることは、多分に恣意性を孕む。マクロには一次関数と三角関数に従うものとして読み取れるはずだが、データのある期間がごく一部に限られるため正確な値は得ることは難しい。よって、以下に示す計算はあくまで一つの解釈であることに留意する必要がある。

実際に近似するにあたっては、 $t = 1$ (2020年第2期の谷)の点は除外して計算した。このとき、

$$j = 0.0178571, \quad k = 5.32775, \quad l = 0.018338, \quad m = 0.125882, \quad n = -0.936178$$

だった。また、第1章と同様に $d = 1$ であると考えたと $\epsilon = m$ となる。これらを代入すると $X = 0$ と決まり、(4)に値を代

入すると $\begin{cases} \theta = 33.9229 \approx 10.598\pi \\ t = 19.9153 \end{cases}$ という計算結果が得られる。これは、2020年第1期から約20期後、つまり**2025年第1**

期近辺でGDPの振動が極大となることを示す。

実際のところ約20期という値は、表1.1.1の過去の回復局面の期間と比べても不自然な値ではなさそうである。とはいえ執筆時点(24年第2期)で既に極大を迎えている可能性も、逆に25年第2期以降も上昇する可能性もあるが、**来年第1期頃に計算通りGDPの振動の極大が来るか注目である**。そして、数年後にデータが揃ってからもう一度吟味したい。

§4 正規化を株に応用

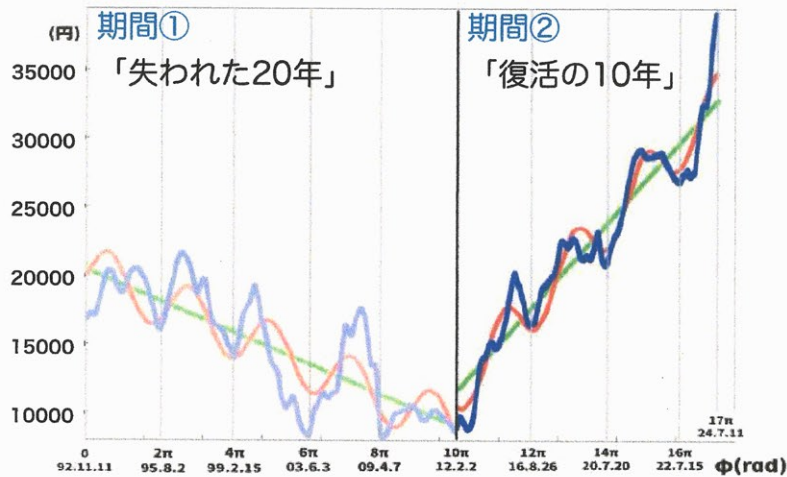
正規化という発想は、ここまで扱ってきた景気とGDPだけに留まらず、他にもさまざまなデータに応用し得る。例えばここでは日経平均株価について正規化してみた。

そのままの日経平均株価では微小な変動が多いため、過去100営業日間の平均値(100日移動平均)を用いた。1992年から2024年の間に2~3年単位で大幅な下落があった箇所を抜き出して正規化し、位相 ϕ を求めた。その上で日経平均株価を $f(\phi) = a\phi + b + c\sin(d\phi + e)$ に近似すると、以下ようになった。

'92.11/11~'12.2/1	a=-363.836	b=20396.9	c=2010.23	d=0.91616	e=6.0498	…期間①
'12.2/2~'24.7/11	a=957.552	b=-18480.8	c=2097.83	d=1.04601	e=2.2643	…期間②

なお、ごく最近の区間は変動の極大付近にいるものと想定し、直近で最高値を記録した本年7月11日が $\phi = \pi + 2Y\pi$ ($Y \in \mathbb{Z}$)の形を取るように正規化したところ、 $2Y\pi = 16\pi$ となった。

グラフ3.4.1 正規化した日経平均株価(1992-2024)



先程の期間②の関数を利用して、来るべき日経平均株価の極大を推測しよう。

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\phi} f(\phi) &= a + c d \cos(d\phi + e) = 0, \quad \frac{d^2}{d\phi^2} = -cd^2 \sin(d\phi + e) < 0 \text{ として} \\ d\phi + e &= \cos^{-1}\left(-\frac{a}{cd}\right) + 2Z\pi \quad (\text{ただし } Z \text{ は } \phi > 2Y\pi = 16\pi \text{ となる整数}) \\ \phi &= \frac{1}{d} \left(\cos^{-1}\left(-\frac{a}{cd}\right) + 2Z\pi - e \right) \end{aligned}$$

ここで、 $16\pi \leq \phi$ の区間では $\omega = \frac{\pi}{488}$ (rad/営業日) の速さで位相が変化していた。日経平均株価が極大を迎える日を、7月11日から数えて N 営業日後と置くと、

$$N = \frac{1}{\omega} (\phi - 16\pi) = \frac{488}{\pi} \left[\frac{1}{d} \left\{ \cos^{-1}\left(-\frac{a}{cd}\right) + 2Z\pi - e \right\} - 16\pi \right]$$

ここに②の値を代入すると、 $2Z\pi = 2Y\pi = 16\pi$ となり、 $N = 26.6089 \approx 27$ となった。

よって、7月11日から27営業日後、つまり8月21日頃までに日経平均株価は極大になると予想ができる。また、次回極小となるのは計算上、 $\frac{\pi}{\omega} = 488$ 営業日後、即ち2026年7月14日頃となる。それ以降は、実際に株価が底を打ったことを確認して新たな近似式を作り、算出する。このようにして求めた近似式により大まかな株価の動きが推測でき、効率的な資産運用への活用が期待できる。

おわりに

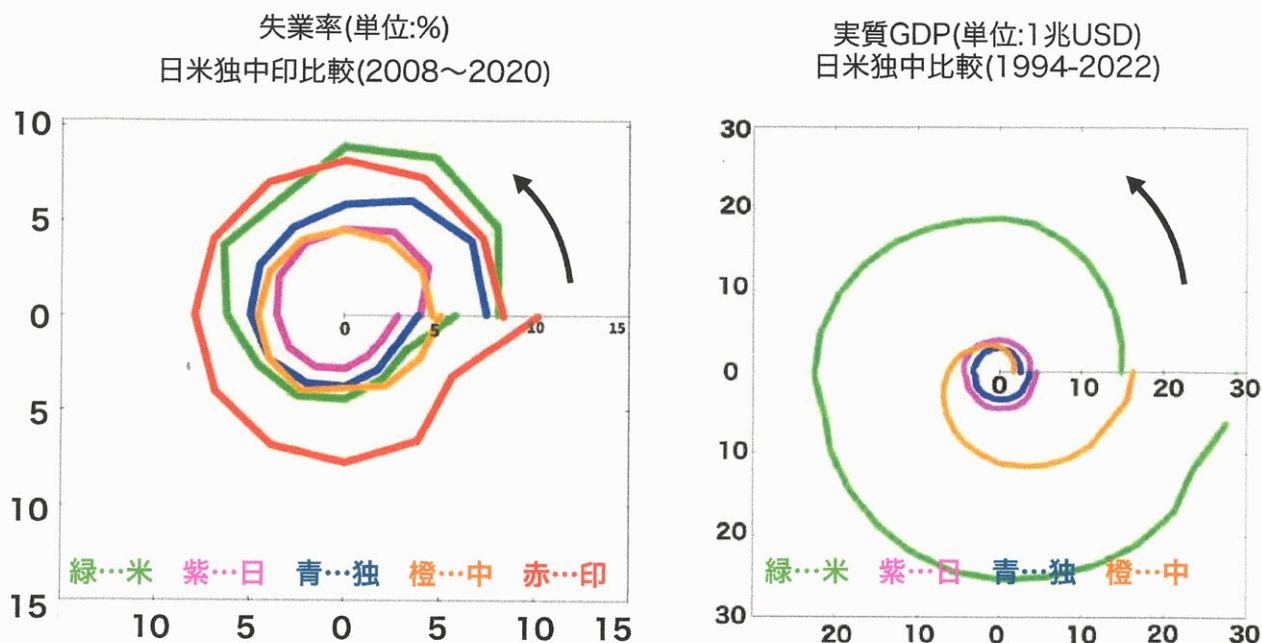
本研究では「景気循環を実際の周期関数に関連づけて捉える」ということを主題に探究した。第1章では景気循環の位相による座標系の正規化を行い、日本の景気動向と実質GDPの値を代入することにより、実質GDPと位相の間に周期的な変動を見出すに至った。第2章ではこのモデルを諸外国にも応用したところ、先進国では概ねこれに適合した一方で、新興国として挙げた国はあまりモデルに沿わない場合もあった。第3章においては再び日本に注目し、公式のデータが未発表のため正規化ができない部分についても理論上予測が可能なることを導き、今後のGDPの推移を大まかに推定した。そして、正規化の応用として日経平均株価についても今後の予測を行った。

今回の探究における意義として、一つに時系列の正規化という発想が挙げられよう。景気循環と関連のあるデータを関数として考える上で、時系列の正規化によって周期性をより明快に示すことができた。一方でこれを逆手に取って、周期性から正規化の基準を推定することもできた。また、GDPと同様に株価についても正規化を通すことで一定の規則性を見出すことができた。

二つ目には、**各国の近似した関数を示すときに直交座標系だけでなく極座標系も用いたことが挙げられる**。景気の循環は何かと直交座標表示による波動の形を連想されがちだが、循環を端的に表す表示の方法として極座標表示を忘れてはならない。直交座標表示では一次関数の切片などがわかりやすい一方で、**変動の周期性には極座標表示の方が有効である**。**過去の景気循環を扱った論文等を見ても極座標系で捉えているものは見当たらず、先進的な発想と言えそうである**。

その点では今回扱ったGDPに限らず、例えば失業率や物価指数など他の経済指標を観察したいときにも活用できる。
(次の**グラフ4**参照)

グラフ4 極座標で様々なグラフを描画



ところで物理学においては、天体の運行など、主要な力によって定められた運動に対して、副次的な力による付加項が加わり攪乱されることで生じるずれを、摂動(*perturbation*)と呼ぶ。ここで扱っている $f(\theta)$ では、景気循環に基づく $\sin(d\theta + e)$ の項が摂動と似たはたらきをしているとも考えられる。今回は主たる関数を一次関数として計算したが、より複雑な関数に代えた場合でも、同様に景気循環による周期的な摂動が見られるはずであり、この点はさらに探究する余地がありそうだ。経済学は実のところ物理学の理論のアナロジーとなっているものが多いというが、景気循環を力学と絡めて分析するという視点も有効かもしれない。

その意味で、今回得た経験は経済だけでなくさまざまな分野に通ずるものであり、今後研究するにあたってもぜひ活かしたい。本研究を行う機会を下さった千田守先生と唐澤俊之先生への感謝をもって、本研究を終えさせていただく。

出典・参考文献

<https://www.cao.go.jp/>
<https://fred.stlouisfed.org/>
<https://www.jcer.or.jp/>
<https://www.sachverstaendigenrat-wirtschaft.de/en/index.html>
<https://www.ons.gov.uk/>
<https://www.niesr.ac.uk/>
<https://www.rbi.org.in/home.aspx>
<https://www.jstage.jst.go.jp/browse/-char/ja/>
<https://kotobank.jp/>
<https://www.statista.com/>
<https://www.macrotrends.net/>
<https://unstats.un.org/unsd/snaama/Basic>
<https://indexes.nikkei.co.jp/>