記数法なのに複素数のフラクタル!?

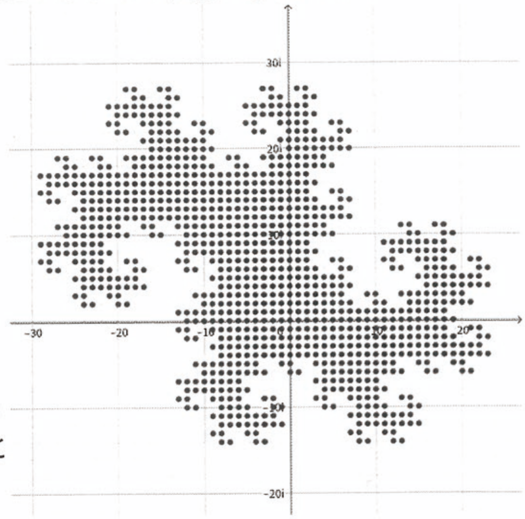
～煩雑と美の架け橋～

長野県屋代高等学校附属中学校　3年　宮澤希成

※紙面の都合上、フラクタル図形についての細かい説明や、式変形の過程を省略することを断らせていただきます。上付き角括弧の中に番号（[1]←このようなもの）を記したテキストには、第8章に注釈があります。また、iは虚数単位とします。

1.　研究の動機

「複素数のフラクタル」と聞いて皆さんは何を思い浮かべるだろうか。おそらく「マンデルブロ集合」「ジュリア集合」「ニュートンフラクタル」などが思いつくのではないだろうか。しかし、インターネットである記事[1]を読んで、今まで思いもよらなかったフラクタル図形に出会った。



それがこちらだ(右図は自分で作成[2])
一見すると、何の変哲もないツインドラゴン(に酷似した図形)に見える。
しかし、これは $-1+i$ を底とし、仮数を$1,0$とする記数法(以下 $-1+i$ 進法とする)で1桁目から10桁目のみを使って表せる数を複素平面上にプロットしたものである。
(0000000000, 0000000001, 0000000010,　…　1111111111)
複素数を表記できる他の記数法でもこの様なプロットが自己相似な構造を持つ物が多いようだ。
記数法と言えば底が自然数で、仮数も整数のものしか知らなかった(底が自然数、仮数に負の数を含むものもある)ので、今回、なぜこのような性質があるのか調べてみたいと思った。
※以下、便宜上複素数を表記する記数法を複素数記数法と呼ぶ。また、その表記は位取り記数法と同様に、
底がzであるとき、$\cdots z^2d_2 + z^1d_1 + z^0d_0 + z^{-1}d_{-1} + z^{-2}d_{-2}\cdots$　を

$d_2d_1d_0.d_{-1}d_{-2}$と表記する。仮数に必ず$1,0$を含み、底は10と表される。

2.　なぜフラクタル図形になるのか

まずは、複素数記数法で、ある桁数以下で表される数の集合のプロットがなぜフラクタル図形を描くのかについて考える。

nは自然数とし(このレポートでは以下nを自然数とする)、z, wは複素数とする。zがwを底とするある複素数記数法でn桁以下で表される数であるとすると、
その積のzwの偏角について、

$arg(zw) = arg\, z + arg\, w$

絶対値は

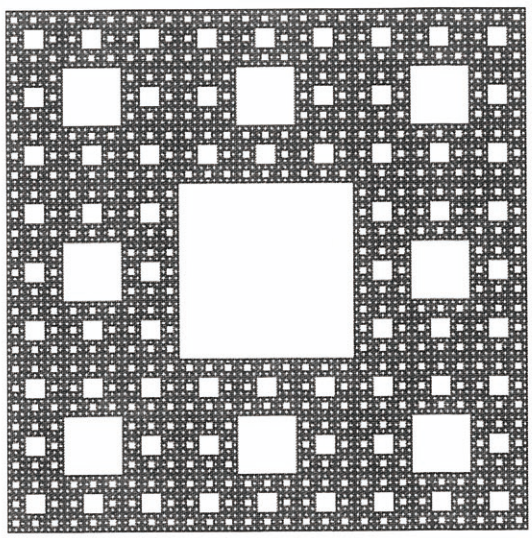
$|zw| = |z| \times |w|$
よって、n桁以下で表される数zを複素平面上で $arg\, w$ だけ回転させ、原点からの距離を$|w|$倍に拡大した点が示す数は、zにこの記数法での"10"(すなわちw)をかけた$n + 1$桁の数に等しい。　・・・①
また、すべてのz(n桁以下で表される数)についての$z \times 10$の集合をA、すべての$n + 1$桁の数の集合をBとする。Bの定義より、
$A \subset B$　・・・②
また、すべてのBの要素、即ちすべての$n + 1$桁の数は$\frac{b}{10} \times 10$ $(b \in B)$ と表せる。$\frac{b}{10}$はn桁の数であるから、Aの定義より、$\frac{b}{10} \times 10$ はAの要素である。よって、
$B \subset A$　・・・③
②,③より$A = B$である。　・・・④

また、すべてのn桁以下で表される数の集合をCとすると、①とAの定義より、複素平面上で、Cのプロットが描く図形を複素平面上で $arg\, w$ だけ回転させ、$|w|$倍に拡大した集合はAのプロットが描く図形と等しく、即ち④より、Bのプロットが描く図形とも等しい。よって、CとBのプロットが描く図形は相似である。　・・・⑤

また、B, Cの定義より、
$C \subset B$
よって、CはBの部分であり、⑤より、部分と全体は相似だと言える。複素数記数法である桁数以下で表される数の集合のプロットに自己相似性がある（非自明に相似な）物が多いのはこのためだろう。

3.　フラクタル次元は2か否か

　任意の複素数を表記できる複素数記数法である桁数以下で表記される数の集合の描くフラクタル図形は、複素平面上で面積を持ち、フラクタル次元は2であると考えた。
なぜなら、右のようなフラクタル次元が2未満の図形は、「穴」(白いところ)をもつが、今回考える記数法は複素平面上の任意の複素数を表記できるため、このような穴は生じないだろうと予想したからである。



実際に、-1+i 進法である桁数以下のプロットが描くツインドラゴンに酷似した図形を例として、そのフラクタル次元が2になるか確かめてみたいと思う。

まず、$(-1 + i)^n$の実部の値を求める。
　　※以下$a \div b$の余りを求める演算を$a \% b$とする。

$arg\, ((-1 + i)^n) = \frac{3}{4}\pi \times n$

$arg\, ((-1 + i)^{n+8}) = \frac{3}{4}\pi \times (n + 8) = \frac{3}{4}\pi n + 6\pi$
よって、

$arg\,((-1+i)^n) \equiv arg\,((-1+i)^{n+8}) \pmod{2\pi}$
だから、$\left[\frac{n}{8}\right]$を用いて、$(-1+i)^n$の実部の値を表すとき、次の8通りの場合がある。

$n\%8 = 0$ のとき

$$|-1+i| \times cos(arg\,((-1+i)^n)) = \sqrt{2}^{8\left[\frac{n}{8}\right]} \times cos(\frac{3}{4}\pi \times 8\left[\frac{n}{8}\right]) = 2^{4\left[\frac{n}{8}\right]}$$

$n\%8 = 1$ のとき

$$|-1+i| \times cos(arg\,((-1+i)^n)) = \sqrt{2}^{8\left[\frac{n}{8}\right]+1} \times cos(\frac{3}{4}\pi \times (8\left[\frac{n}{8}\right]+1)) = -2^{4\left[\frac{n}{8}\right]}$$

$n\%8 = 2$ のとき

$$|-1+i| \times cos(arg\,((-1+i)^n)) = \sqrt{2}^{8\left[\frac{n}{8}\right]+2} \times cos(\frac{3}{4}\pi \times (8\left[\frac{n}{8}\right]+2)) = 0$$

$n\%8 = 3$ のとき

$$|-1+i| \times cos(arg\,((-1+i)^n)) = \sqrt{2}^{8\left[\frac{n}{8}\right]+3} \times cos(\frac{3}{4}\pi \times (8\left[\frac{n}{8}\right]+3)) = 2^{4\left[\frac{n}{8}\right]+1}$$

$n\%8 = 4$ のとき

$$|-1+i| \times cos(arg\,((-1+i)^n)) = \sqrt{2}^{8\left[\frac{n}{8}\right]+4} \times cos(\frac{3}{4}\pi \times (8\left[\frac{n}{8}\right]+4)) = -2^{4\left[\frac{n}{8}\right]+2}$$

$n\%8 = 5$ のとき

$$|-1+i| \times cos(arg\,((-1+i)^n)) = \sqrt{2}^{8\left[\frac{n}{8}\right]+5} \times cos(\frac{3}{4}\pi \times (8\left[\frac{n}{8}\right]+5)) = 2^{4\left[\frac{n}{8}\right]+2}$$

$n\%8 = 6$ のとき

$$|-1+i| \times cos(arg\,((-1+i)^n)) = \sqrt{2}^{8\left[\frac{n}{8}\right]+6} \times cos(\frac{3}{4}\pi \times (8\left[\frac{n}{8}\right]+6)) = 0$$

$n\%8 = 7$ のとき

$$|-1+i| \times cos(arg\,((-1+i)^n)) = \sqrt{2}^{8\left[\frac{n}{8}\right]+7} \times cos(\frac{3}{4}\pi \times (8\left[\frac{n}{8}\right]+7)) = -2^{4\left[\frac{n}{8}\right]+3}$$

表1

$n\%8$	0	1	2	3	4	5	6	7
$(-1+i)^n$ の実部	$2^{4\left[\frac{n}{8}\right]}$	$-2^{4\left[\frac{n}{8}\right]}$	0	$2^{4\left[\frac{n}{8}\right]+1}$	$-2^{4\left[\frac{n}{8}\right]+2}$	$2^{4\left[\frac{n}{8}\right]+2}$	0	$-2^{4\left[\frac{n}{8}\right]+3}$
正負	正	負	0	正	負	正	0	負

次に、n桁以下で表される数の集合が描くツインドラゴンに酷似した図形の実部の値の範囲から、相似比を考える。

k, lを自然数とし、$k \le n$であるものとする。また、mを整数とし、$m \le n$であるものとする。

n桁以下で表される数の集合実部の範囲 = 実部の最大値 − 実部の最小値

= {$(-1+i)^{k-1}$の実部が正であるようなk桁目と$(-1+i)^{-l}$の実部が正であるような小数点以下l桁目がすべて1であり、その他の桁がすべて0であるような数の実部}

− {$(-1+i)^{k-1}$の実部が負であるようなk桁目と$(-1+i)^{-l}$の実部が負であるような小数点以下l桁目がすべて1であり、その他の桁がすべて0であるような数の実部}　・・・⑥

表1より、

⑥ = {$m\,\%\,8$が0, 3, 5となるようなm桁目がすべて1であり、その他の桁がすべて0であるような数の実部}

− {$m\,\%\,8$が1, 4, 7となるようなm桁目がすべて1であり、その他の桁がすべて0であるような数の実部}

これは、$n\,\%\,8 = 0$のとき、表1から、

$$Re\left((-1+i)^{8\times\left[\frac{n}{8}\right]}\right) + \sum_{a=1}^{\infty}\left(Re(-1+i)^{8\left(\left[\frac{n}{8}\right]-a\right)+5} + Re(-1+i)^{8\left(\left[\frac{n}{8}\right]-a\right)+3} + Re(-1+i)^{8\left(\left[\frac{n}{8}\right]-a\right)+0}\right)$$

$$-\sum_{a=1}^{\infty}\left(Re(-1+i)^{8\left(\left[\frac{n}{8}\right]-a\right)+7} + Re(-1+i)^{8\left(\left[\frac{n}{8}\right]-a\right)+4} + Re(-1+i)^{8\left(\left[\frac{n}{8}\right]-a\right)+1}\right)$$

$$= 2^{4\times\left[\frac{n}{8}\right]} + \sum_{a=1}^{\infty}\left(2^{4\left(\left[\frac{n}{8}\right]-a\right)+2} + 2^{4\left(\left[\frac{n}{8}\right]-a\right)+1} + 2^{4\left(\left[\frac{n}{8}\right]-a\right)}\right) - \sum_{a=1}^{\infty}\left(-2^{4\left(\left[\frac{n}{8}\right]-a\right)+3} - 2^{4\left(\left[\frac{n}{8}\right]-a\right)+2} - 2^{4\left(\left[\frac{n}{8}\right]-a\right)}\right)$$

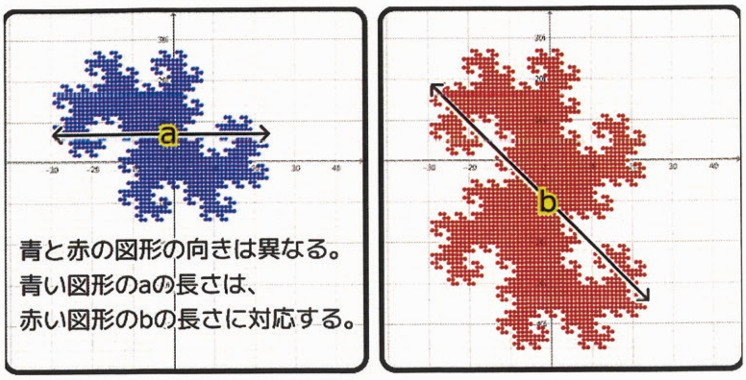
$$= \frac{7}{3}\times 2^{4\left[\frac{n}{8}\right]}$$

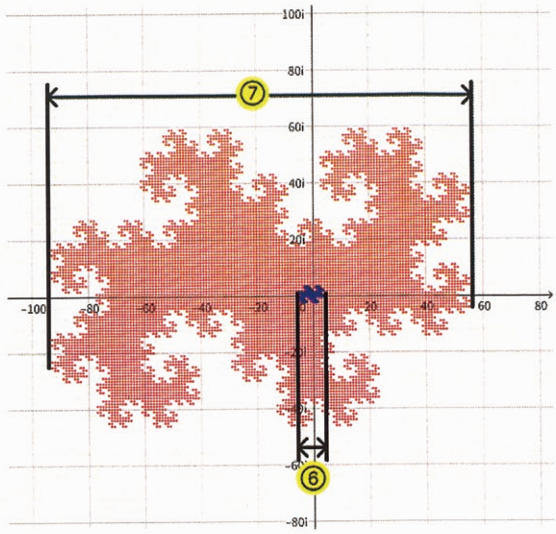
他のときも同様に求めると

表2

$n\,\%\,8$	0	1	2	3	4	5	6	7
⑥の値	$\frac{7}{3}\times 2^{4\left[\frac{n}{8}\right]}$	$\frac{10}{3}\times 2^{4\left[\frac{n}{8}\right]}$	$\frac{10}{3}\times 2^{4\left[\frac{n}{8}\right]}$	$\frac{16}{3}\times 2^{4\left[\frac{n}{8}\right]}$	$\frac{28}{3}\times 2^{4\left[\frac{n}{8}\right]}$	$\frac{40}{3}\times 2^{4\left[\frac{n}{8}\right]}$	$\frac{28}{3}\times 2^{4\left[\frac{n}{8}\right]}$	$\frac{52}{3}\times 2^{4\left[\frac{n}{8}\right]}$

実部の範囲で相似比を考えるとき、この2つの図形は下図のように違う向きではならない。





また、【2.　なぜフラクタル図形になるのか】⑤より、n桁以下で表される数の集合が描く図形と$n+1$桁以下で表される数の集合が描く図形の向きは、記数法の底の偏角、即ち、$\frac{3}{4}\pi$だけ異なっている。

したがって、$\frac{3}{4}\pi \equiv \frac{3}{4}\pi \times 8 \ (mod\ 2\pi)$ より、

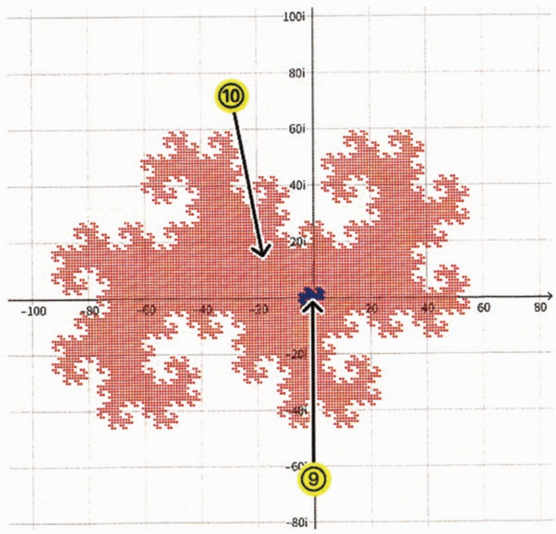
n桁以下で表される数の集合が描く図形(青)と

$n+8$桁以下で表される数の集合が描く図形(赤)の

向きは等しい(右図)

表2より、⑥の値は、$n \% 8$の値に関わらず、$q \times 2^{4\left[\frac{n}{8}\right]}$ の形になっており、この2つの図形の相似比（⑥:⑦）は、

$q \times 2^{4\left[\frac{n}{8}\right]} : q \times 2^{4\left[\frac{n+8}{8}\right]} = 1 : 2^4$ ･･･⑧



また、この2つの図形の面積を⑨,⑩とする。

n桁以下で表される数の集合の各要素に

この記数法の1桁目から8桁目までを使って表される

すべての数に10^nを乗じた2^8個の数(次頁の図)

$00000000\overbrace{0\cdots0}^{n個}$	$00000011\overbrace{0\cdots0}^{n個}$		$11111101\overbrace{0\cdots0}^{n個}$
$00000001\overbrace{0\cdots0}^{n個}$	$00000100\overbrace{0\cdots0}^{n個}$	・・・	$11111110\overbrace{0\cdots0}^{n個}$
$00000010\overbrace{0\cdots0}^{n個}$	$00000101\overbrace{0\cdots0}^{n個}$		$11111111\overbrace{0\cdots0}^{n個}$

このような数をそれぞれ足す

をそれぞれ足してできる数の集合2^8個を合わせた集合について、この要素はすべて$n+8$桁以下で表される数であるから、この集合は$n+8$桁以下で表される数の集合の部分集合である。$n+8$桁以下の数はすべて、n桁以下の数と、図の数のいずれかを足したものであるから、$n+8$桁以下で表される数の集合は、n桁以下で表される数の集合の各要素に図のような数を足したものの集合2^8個を合わせた集合の部分集合である。よって、この2つの集合は相等である。

また、$(-1+i)$進法は冗長でない（一つの複素数に対して複数の表記を持たない）から、この2^8個の集合に重なりはなく、ある複素数を足すことは複素平面上での平行移動に当たるので、n桁以下で表される数の集合と合同なものを2^8個合わせたものがこの集合である。・・・⑪

あるフラクタル図形を$\frac{1}{A}$に縮小したものをB個並べて元の図形と一致するときの$A^D = B$　となるDがフラクタル次元であるから、

$D = \frac{log\,B}{log\,A}$（対数の基数は任意）

⑧,⑪より、

$A = 2^4 \qquad B = 2^8$

$D = \frac{log\,2^8}{log\,2^4} = 2$

予想通り、フラクタル次元は2になった。

厳密な証明には至っていないが(これから取り組んでみたい)、任意の複素数を表記できる記数法のフラクタル次元は2でありそうだ。この仮説が正しいとすると、n桁以下で表される数の集合のプロットと、$n+1$桁以下で表される数の集合のプロットの相似比が$1:A$のとき、面積比は$1:A^2$であるはずだ。

また、底をzとすると、【2.　なぜフラクタル図形になるのか】⑤より、相似比は$1:|z|$となるので、面積比は$1:|z|^2$となる。また仮数の個数をBとすると、$0,1$を含むそれぞれの仮数に10^nを乗じたものを足して、複素平面上で平行移動したB個の集合は$n+1$桁以下で表される数の集合と相等で（⑪と同様に証明できる)、面積比は$1:B$でもある。

よって、$B = |z|^2$であり、任意の複素数を表記できる記数法の仮数の個数は底の絶対値の2乗である必要がある。これは、仮説が正しいことを前提に考えたが、実際にこれらのウェブページ[3]にも、

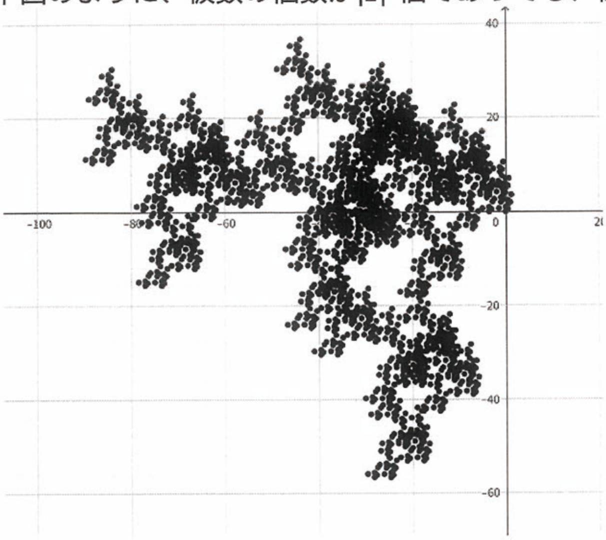
「仮数がn通りであれば、底の絶対値は$\sqrt{n}$となる。」「zを底とする複素記数法の仮数は$|z|^2$個です。」

と記述があるので、この仮説はおそらく正しいだろう。

しかし、仮数の個数は底の絶対値によって決定されることがわかっても、仮数をどんな値にすれば冗長でない複素数記数法になるのかは不明だ。

4. 冗長にならない仮数の値は?

下図のように、仮数の個数が$|z|^2$個であっても、任意の複素数を表記できない記数法もある。



←特に何も考えずに仮数の値を決めた場合

任意の複素数を表記でき、冗長でない記数法はどのような仮数を持つのか考える。

I. どれも互いに等しくない
II. 比が一対底になる組み合わせがない

a, bを仮数に含まれる数とし、zを底とする。Ⅰ.が成り立たない記数法について、aと表記される数はbとも表記されてしまい、冗長になってしまう。Ⅱ.が成り立たないと、$a:b = 1:z$であるとき、$a0$（$= az$）と表される数はbとも表される。

ただ、その２つの条件に従って仮数を決定しても、任意の複素数を表記できない事が多い。これら以外にもなにか条件があるはずだ。

先程から参考にしている2つのウェブページ[3]では、片方は記載なし、もう片方では、既存の記数法の仮数の値を一定の規則の上で変更することで新しい記数法を見出しているようだが、仮数の値を何もないところから決定するような根拠はなく、それは困難なことだという記載もあった。

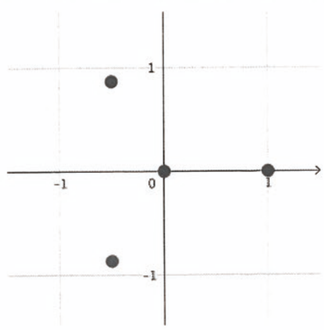
そこで、既存の記数法をヒントに、どんな仮数の個数でも任意の複素数を表記できる冗長でない記数法を見いだすことはできないかと考えた。

その記数法として、-2を底とし、0, 1, $-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$, $-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$を底とする記数法（小数点以下の桁を使わずにアイゼンシュタイン整数[4]を表記できるため以下アイゼンシュタイン記数法とする）を用いようと思う。この記数法の仮数を複素平面上に表すと、右図の様になる。

仮数0を三角形の重心(また、垂心、外心、内心でもある)として、正三角形を描くように他の3つの仮数が並んでいる。

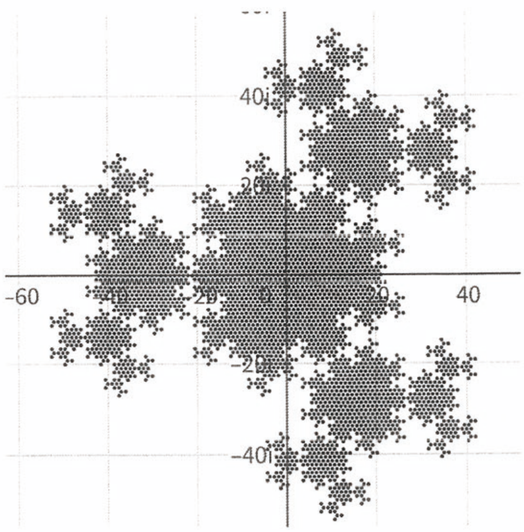
これを、三角形意外の正多角形にも拡張することで、任意の仮数の個数で目的とするような記数法が見つかるのではないかと考えた。

ちなみに、この記数法である桁数以下で表記される数のプロットは、



この様なフラクタル図形を描く。

これを参考に、色々な方法で拡張を試みたが、四角形以降への拡張は現時点で成功していない。



5. まとめと分かったこと

今回の研究でわかったこととして、

1. 記数法は自然数だけでなく、底や仮数を複素数にまで拡張して考えることができる。
2. 複素数記数法である桁数以下で表される数のプロットは、全体と部分が相似であり、自己相似性を持つ（非自明に相似である）物も多い。
3. 任意の複素数を表記できる記数法である桁以下で表される数のプロットが描く図形のフラクタル次元はおそらく全て2である。
4. 任意の複素数を表記できる記数法の仮数の個数は底の絶対値の2乗である必要がある。
5. 仮数の個数が底の絶対値の2乗個であっても、任意の複素数を表記できない記数法もある。

が上げられる。

6. 未解決事項と考察

締切の直前まで粘ったが、仮数の値を決定する因子は何なのか解明することができなかったので、これからも研究を継続していきたい。

これからのアプローチとして、

- 底から仮数を考えていたが、逆に仮数から底を決定できないか考える。
- 任意の複素数を表記できる記数法のある桁以下で表される数のプロットが描く図形は自分自身をタイル張り（敷き詰め）できるから、最初の仮数の複素平面上での配置を敷き詰め可能な平面図形（三角形、四角形、六角形）を参考に考える。
- 他の自分自身をタイル張りできるフラクタルを探し、それを参考に仮数を考えたり、自分自身をタイル貼りできるフラクタルの法則を探し証明することで、仮数を決定する因子を見つける。

などが考えられる。

また、プロットのフラクタル次元が必ず2であるかどうかなども厳密な証明に至っていないので、厳密に証明したいと思う。

7.　感想

今回の研究を通して、複素数の基本的な知識が身についてきたり、新たな学びが多かった。まだ当分学校では登場しないだろうが、自分の中で、忘れないようにしたい。

また、今回は、図の作成も自分で行ったが、ソフト上でモデルを得るために、本筋とは関係ないプログラミング的な所も関わってきて、非常に面白かった。

そして、未解決事項が残ってしまった原因として、複素数記数法の演算の煩雑さが考えられる。10進法での実部や虚部の値が少し変わるだけで、複素数記数法では桁数がいくつも変わることもあるし、絶対値や偏角の大小で、表記の長さの大小も測れないので、数字だけを見てどんな数であるか全く検討がつかない。
代わりに、これらの記数法はフラクタル幾何と複素数の分野を結びつけるもので、人間のわかりやすい、わかりにくい、などといった勝手な主観を超えた美しさがあった。
よく、「数学ってなんの役に立つの？」といった質問を目にする。無論、現代の文明を支える上で、数学は非常に役に立っているが、今回のように日常では役に立たないものこそ、美しかったり、宇宙の神秘を目の当たりにするような気分になれるし、頭脳をフル回転してそこにたどり着くこと自体に価値があるのではないか。そんなことを思った。

8.　注釈　参考

・注釈

[1]：新しい記数法を作ろう - 偽計数学妨害罪
https://hassium277.hatenablog.com/entry/2020/11/19/000000　（2023/09/03最終閲覧）

[2]：このレポートの複素平面の図は主にgeogebra全機能版を使用　https://www.geogebra.org/classic

[3]：[1]に加え　広義の記数法 - Wikipedia　https://ja.wikipedia.org/wiki/%E5%BA%83%E7%BE%A9%E3%81%AE%E8%A8%98%E6%95%B0%E6%B3%95
（2023/09/03最終閲覧）

[4]：$a+\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)b$と表される複素数。複素平面上で正三角形を成す格子の格子点に当たる。

・参考

広義の記数法 - Wikipedia　https://ja.wikipedia.org/wiki/%E5%BA%83%E7%BE%A9%E3%81%AE%E8%A8%98%E6%95%B0%E6%B3%95　（2023/09/03最終閲覧）

ドラゴン曲線 - Wikipedia　https://ja.wikipedia.org/wiki/%E3%83%89%E3%83%A9%E3%82%B4%E3%83%B3%E6%9B%B2%E7%B7%9A　（2023/09/03最終閲覧）

位取り記数法 - Wikipedia　https://ja.wikipedia.org/wiki/%E4%BD%8D%E5%8F%96%E3%82%8A%E8%A8%98%E6%95%B0%E6%B3%95　（2023/09/03最終閲覧）

複素数の偏角 - Wikipedia　https://ja.wikipedia.org/wiki/%E8%A4%87%E7%B4%A0%E6%95%B0%E3%81%AE%E5%81%8F%E8%A7%92　（2023/09/03最終閲覧）

複素数の極形式｜ポイントの絶対値・偏角と併せて例題から解説 | 合格タクティクス
https://yama-taku.science/mathematics/complex-number/polar-form/　（2023/09/03最終閲覧）

複素数平面の公式まとめ（極形式・回転・ドモアブルの定理） | 理系ラボ
https://rikeilabo.com/complex-plane　（2023/09/03最終閲覧）

【集合】『集合の相等』2つの集合が等しいことを示す | 数学学習サイト｜Math kit
https://www.smoeducation.net/?p=5286　（2023/09/03最終閲覧）

図形の相似 - Wikipedia　https://ja.wikipedia.org/wiki/%E5%9B%B3%E5%BD%A2%E3%81%AE%E7%9B%B8%E4%BC%BC　（2023/09/03最終閲覧）

フラクタルって知っていますか－1.26次元や1.58次元の図形ってどんなものなのだろう－　|ニッセイ基礎研究所　https://www.nli-research.co.jp/report/detail/id=68116?site=nli（2023/09/03最終閲覧）

フラクタル次元 - Wikipedia　https://ja.wikipedia.org/wiki/%E3%83%95%E3%83%A9%E3%82%AF%E3%82%BF%E3%83%AB%E6%AC%A1%E5%85%83（2023/09/03最終閲覧）

合同式(mod)の意味とよく使う６つの性質 | 高校数学の美しい物語　https://manabitimes.jp/math/683　（2023/09/03最終閲覧）

無限等比級数の収束，発散の条件と証明など | 高校数学の美しい物語
https://manabitimes.jp/math/1055　（2023/09/03最終閲覧）

数学記号の由来について（8）－「数」を表す記号－　|ニッセイ基礎研究所
https://www.nli-research.co.jp/report/detail/id=69195?site=nli　（2023/09/03最終閲覧）

アイゼンシュタイン整数 - Wikipedia　https://ja.wikipedia.org/wiki/%E3%82%A2%E3%82%A4%E3%82%BC%E3%83%B3%E3%82%B7%E3%83%A5%E3%82%BF%E3%82%A4%E3%83%B3%E6%95%B4%E6%95%B0　（2023/09/03最終閲覧）

GeoGebraの基本操作覚書 - うしブログ　https://usidesu.hatenablog.com/entry/2020/01/01/000000　（2023/09/03最終閲覧）

チャート研究所　「チャート式基礎からの数学I+A」　数研出版株式会社　2023/1/20発行