カタラン数の一般化

田名網樹

1 動機

まず, 紙面の都合のため, 式変形の過程が一部省略されていることを断らせていただきます。
カタラン数 C_n は

$$C_0 = 1$$
$$C_{n+1} = \sum_{\substack{i,j \\ i+j=n}} C_i C_j$$

という特徴的な漸化式を満たし, その母関数 $f(x)$ は

$$\{f(x)\}^2 = \frac{f(x)-1}{x}$$

という方程式を満たす。ここで, 以下のような数列 $d_k(n)$ を考えた。

$$d_k(0) = 1$$
$$d_k(n+1) = \sum_{\substack{i_1,\ldots,i_k \\ i_1+\cdots+i_k=n}} d_k(i_1)\cdots d_k(i_k)$$

この数列の母関数 $f_k(x)$ は

$$\{f_k(x)\}^k = \frac{f_k(x)-1}{x}$$

という方程式を満たすと分かった。
だが, この数列の一般項はカタラン数のように求めることはできず, どうすれば一般項を求められるのか気になり, 研究を始めた。

2 研究内容

まずはカタラン数の一般項の求め方を探し, それを応用できないか試した。

2.1 一般化カタラン数

$$\sum_{\substack{i_1,\ldots,i_n \\ P(i_1,\ldots,i_n)}} f(i_1,\ldots,i_n)$$

は $P(i_1,\ldots,i_n)$ が真であるような n 個の非負整数の組 $(i_1,\ldots,i_n)$ すべてについて $f(i_1,\ldots,i_n)$ を足すことを表すとする。

定義 2.1 (一般化カタラン数). 正の整数 k と非負整数 n について

$$d_k(0) = 1$$
$$d_k(n+1) = \sum_{\substack{i_1,\ldots,i_k \\ i_1+\cdots+i_k=n}} d_k(i_1)\cdots d_k(i_k)$$

ここで, $d_2(n) = C_n$ である。
以降, k を正の整数とする。一般化カタラン数の母関数を

$$f_k(x) = \sum_{n=0}^{\infty} d_k(n)x^n$$

と定める。

定理 2.1.

$$\{f_k(x)\}^k = \frac{f_k(x) - 1}{x}$$

Proof. $\{f_k(x)\}^k$ の x^n の係数は, 定義 2.1 より

$$\sum_{\substack{i_1,\dots,i_k \\ i_1+\dots+i_k=n}} d_k(i_1)\cdots d_k(i_k) = d_k(n+1)$$

したがって

$$\{f_k(x)\}^k = \sum_{n=0}^{\infty} d_k(n+1)x^n = \frac{f_k(x) - d_k(0)}{x} = \frac{f_k(x) - 1}{x}$$

□

2.2 組合せ論的手法

定理 2.2. 正の整数 k と非負整数 n について $d_k(n)$ は $(0,0)$ から $(n,(k-1)n)$ まで, 格子点進む最短経路で, 領域 $y \le (k-1)x$ 内だけを移動する経路の総数である。

Proof. 最短経路の総数を $a_k(n)$ として, $a_k(n) = d_k(n)$ を示す。
ただし, $a_k(0) = 1$ と解釈し, 以降 i は整数とする。
$(1,0),(n-1,kn)$ は直線 $y = (k-1)x$ の上側にあるから, 最短経路は必ず $(0,0),(1,0),(n,kn-1),(n,kn)$ を通る。
l_i を直線 $y = kx - k + i$ とすると, $(1,0)$ は直線 l_0 上, $(n,kn-1)$ は直線 l_{k-1} 上である。
l_0 上から l_{k-1} 上へ移動するには, 必ず l_i $(1 \le i \le k-1)$ 上を通る必要がある。
したがって, 経路が初めて l_i 上を通る点を考えることができる。その点を $(s_i, ks_i - k + i)$ とする。
ただし $1 \le s_1 \le s_2 \le \dots \le s_{k-1} \le n$
$1 \le i \le k-2$ として,$(s_i, ks_i - k + i)$ から $(s_{i+1}, ks_{i+1} - k + i + 1)$ へ行く最短経路で, l_{i+1} 上を通らないような経路は $a_k(s_{i+1} - s_i)$ 通りで, これらの点を通る最短経路の総数は $a_k(s_1 - 1)a_k(s_2 - s_1)\cdots a_k(s_{k-1} - s_{k-2})a_k(n - s_{k-1})$ である。
逆に, ある経路について $(s_1, s_2, \dots, s_{k-1})$ の値は一つに定まる。したがって,

$$a_k(n) = \sum_{\substack{s_1,s_2,\dots,s_{k-1} \\ 1\le s_1\le s_2\le\dots\le s_{k-1}\le n}} a_k(s_1 - 1)a_k(s_2 - s_1)\cdots a_k(s_{k-1} - s_{k-2})a_k(n - s_{k-1})$$

ここで, $t_1 = s_1 - 1, t_2 = s_2 - s_1, \dots, t_{k-1} = s_{k-1} - s_{k-2}, t_k = n - t_{k-1}$ とおけば,
$t_1 + t_2 + \dots + t_k = n - 1$

$$a_k(n) = \sum_{\substack{t_1,t_2,\dots,t_k \\ t_1+t_2+\dots+t_k=n-1}} a_k(t_1)a_k(t_2)\cdots a_k(t_{k-1})a_k(t_k)$$

初項および漸化式が一致するので $a_k(n) = d_k(n)$ である。 □

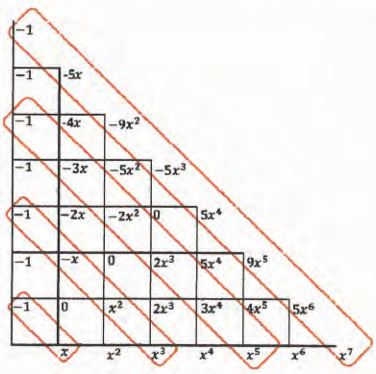
系 2.3.

$$d_k(n) \le {}_{kn}\mathrm{C}_n$$

等号成立は $n = 0$ のときのみ。

2.2.1 多項式で処理する手法

$(1,0)$ に 1, $(0,1)$ に -1 を書く。
各点から右と上とへ進み, 前の点と同じ数字を書いていき, 経路が合流するときはその和を, 合流した点上に書く。
その後, すべての自然数 n について直線 $x = n$ 上の点に x^n をかける。このとき, $y = x$ 上は 0 であり, $y < x$ を見るとカタラン数のときと同じ状態にある。これに下図のようにグループに分け, 和をとり, それらを多項式の列 $A_n(x)$ と考える。



$$A_0(x) = x - 1$$
$$A_{n+1}(x) = (x+1)^2 A_n(x)$$

したがって $A_n(x) = (x+1)^{2n}(x-1)$ $A_n(x)$ の x^{n+1} の係数が C_n だから

$$\begin{aligned} C_n &= {}_{2n}\mathrm{C}_n - {}_{2n}\mathrm{C}_{n+1} \\ &= \frac{{}_{2n}\mathrm{C}_n}{n+1} \end{aligned}$$

しかし, この方法は格子の $y = x$ に関する対称性を用いているため, 一般化はできなかった。

2.3 再帰的手法

以降 $k>1$ とする。系 2.3 から $x>0$ において $f_k(x)<\sum_{n=0}^{\infty}{}_{kn}\mathrm{C}_n x^n$ だから, n を非負整数として

$$\begin{aligned}
\left|\frac{{}_{k(n+1)}\mathrm{C}_{n+1}x^{n+1}}{{}_{kn}\mathrm{C}_n x^n}\right| &= \frac{(k(n+1))!(kn-n)!n!}{(kn)!((k-1)(n+1))!(n+1)!}|x| \\
&= \frac{1}{n+1}\frac{(kn+k)(kn+k-1)\cdots(kn+2)(kn+1)}{((k-1)n+k-1)((k-1)n+k-2)\cdots((k-1)n+1)}|x| \\
&= \frac{kn+1}{n+1}\left(1+\frac{n+1}{(k-1)n+k-1}\right)\left(1+\frac{n+1}{(k-1)n+k-2}\right)\cdots\left(1+\frac{n+1}{(k-1)n+1}\right)|x| \\
&< \frac{kn+k}{n+1}(1+1)(1+1)\cdots(1+1)|x| = k2^{k-1}|x|
\end{aligned}$$

したがって, 任意の整数 $k>1$ についてダランベールの収束判定法と優収束定理より $|x|<1/(k2^{k-1})$ のとき $f_k(x)$ は収束する。

また, $n<r$ のとき ${}_n\mathrm{C}_r=0$ と定める。

ここで, 定理 2.1 の式を変形すれば $f_k(x)=x\{f_k(x)\}^k+1$ となり, 非負整数 n について

$$\begin{aligned}
g_{k,0}(x,y) &= y \\
g_{k,n+1}(x,y) &= g_{k,n}(x,xy^k+1)
\end{aligned}$$

とおけば,

$$\begin{aligned}
g_{k,0}(x,f_k(x)) &= f_k(x) \\
g_{k,n+1}(x,f_k(x)) &= g_{k,n}(x,x\{f_k(x)\}^k+1) = g_{k,n}(x,f_k(x)) = f_k(x)
\end{aligned}$$

が成り立つ。

定理 2.4. 整数 $n\geq 1, k>1$ について $g_{k,n}(x,y)=A_{k,n}(x)+x^n y^k B_{k,n}(x,y^k)$ となる整式 $A_{k,n}(x), B_{k,n}(x,y)$ が存在する。

Proof. 数学的帰納法を使って証明する。
[1] $n=1$ のとき, $g_{k,1}(x,y)=1+xy^k$ より成り立つ。
[2] $n=m$ で成り立つと仮定する。このとき,

$$\begin{aligned}
g_{k,m+1}(x,y) = g_{k,m}(x,xy^k+1) &= A_{k,m}(x)+x^m(xy^k+1)^k B_{k,m}(x,(xy^k+1)^k) \\
&= A_{k,m}(x)+x^m B_{k,m}(x,1)+x^m\{(xy^k+1)^k B_{k,m}(x,(xy^k+1)^k)-B_{k,m}(x,1)\}
\end{aligned}$$

$(xy^k+1)^k B_{k,m}(x,(xy^k+1)^k)-B_{k,m}(x,1)$ は $x=0$ または $y=0$ のときに 0 で, かつ y^k の整式だから xy^k で割り切れる。
したがって $n=m+1$ のとき条件を満たす $A_{k,m+1}(x), B_{k,m+1}(x,y)$ が存在する。
[1][2] より任意の整数 $n\geq 1$ について条件を満たす $A_{k,n}(x), B_{k,n}(x,y)$ が存在する。 □

定理 2.5. 1 より大きい整数 k と正の整数 n についてある非負整数の数列 $M_{k,n}, m_{k,n,i}$ が存在して

$$B_{k,n}(x,y)=\sum_{i=0}^{k^{n-1}-1}\sum_{j=m_{k,n,i}}^{M_{k,n}} b_{k,n,i,j}x^{i+j}y^i$$

と表せる。$(n\geq 1)$ さらに $m_{k,n,i}$ は i について単調非減少

Proof. 数学的帰納法で示す。
[1] $n=1$ のとき $B_{k,1}(x,y)=1$ であるから成り立つ。
[2] $n=m$ のとき成り立つと仮定する。

$$\begin{aligned}
A_{k,m+1}(x)+x^{m+1}y^k B_{k,m+1}(x,y^k) &= g_{k,m+1}(x,y) = g_{k,m}(x,xy^k+1) \\
&= A_{k,m}(x)+x^m(xy^k+1)^k B_{k,m}(x,(xy^k+1)^k) \\
&= A_{k,m}(x)+x^m\sum_{i=0}^{k^{m-1}-1}\sum_{j=m_{k,m,i}}^{M_{k,m}} b_{k,m,i,j}x^{i+j}(xy^k+1)^{ik+k} \\
&= A_{k,m}(x)+x^m\sum_{i=0}^{k^{m-1}-1}\sum_{j=m_{k,m,i}}^{M_{k,m}} b_{k,m,i,j}x^{i+j} \\
&\quad +x^{m+1}y^k\sum_{i=0}^{k^{m-1}-1}\sum_{j=m_{k,m,i}}^{M_{k,m}} b_{k,m,i,j}x^{i+j}\frac{(xy^k+1)^{ik+k}-1}{xy^k}
\end{aligned}$$

$$A_{k,m+1}(x)+x^{m+1}y^kB_{k,m+1}(x,y^k)=A_{k,m}(x)+x^m\sum_{i=0}^{k^{m-1}-1}\sum_{j=m_{k,m,i}}^{M_{k,m}}b_{k,m,i,j}x^{i+j}$$
$$+x^{m+1}y^k\sum_{l=0}^{k^m-1}\sum_{i=\lceil(l-k+1)/k\rceil}^{k^{m-1}-1}\sum_{j=m_{k,m,i}}^{M_{k,m}}b_{k,m,i,j}\binom{ik+k}{l+1}x^{i+j+l}(y^k)^l$$
$$A_{k,m+1}(x)=A_{k,m}(x)+x^m\sum_{i=0}^{k^{m-1}-1}\sum_{j=m_{k,m,i}}^{M_{k,m}}b_{k,m,i,j}x^{i+j}$$
$$B_{k,m+1}(x,y)=\sum_{l=0}^{k^m-1}\sum_{i=\lceil(l-k+1)/k\rceil}^{k^{m-1}-1}\sum_{j=m_{k,m,i}}^{M_{k,m}}b_{k,m,i,j}\binom{ik+k}{l+1}x^{i+j+l}y^l \tag{1}$$
$$M_{k,m+1}=M_{k,m}+k^{m-1}-1$$

$$\begin{aligned}m_{k,m+1,l}&=\left\lceil\frac{l-k+1}{k}\right\rceil+\min\{m_{k,m,i}\mid\lceil(l-k+1)/k\rceil\le i\le k^{m-1}-1\}\\&=\left\lceil\frac{l-k+1}{k}\right\rceil+m_{k,m,\lceil(l-k+1)/k\rceil}\end{aligned}$$

このとき $m_{k,m+1,l}$ は l に関して単調非減少であるので $n=m+1$ のとき成り立っている。
[1][2] より任意の正の整数 n について成り立つ。 □

漸化式から $M_{k,m+1}=\frac{k^m-1}{k-1}-m$ である。
$A_{k,1}(x)=1$ から $\deg A_{k,1}(x)=(1-1)/(k-1)$ で $\deg A_{k,n}(x)=(k^{n-1}-1)/(k-1)$ ならば, $\deg A_{k,n}(x)<k^{n-1}$ より

$$\deg A_{k,n+1}(x)=\max\{\deg A_{k,n}(x),k^{n-1}+M_{k,n}+n-1\}=k^{n-1}+M_{k,n}+n-1=\frac{k^n-1}{k-1}$$

であるから $\deg A_{k,n}(x)=(k^{n-1}-1)/(k-1)$ がわかる。ここで

定義 2.2. 非負整数 $a_1,\dots,a_n,b_1,\dots,b_n,r,k,n$ について

$$\begin{aligned}{}_{(a_1,\dots,a_n)}\mathrm{C}_{(b_1,\dots,b_n)}&\coloneqq\prod_{k=1}^{n}{}_{a_k}\mathrm{C}_{b_k}\\r\cdot(a_1,\dots,a_n)&\coloneqq(ra_1,\dots,ra_n)\\\mathrm{push}((a_1,\dots,a_n),a_{n+1})&\coloneqq(a_1,\dots,a_n,a_{n+1})\\\mathrm{unshift}((a_1,\dots,a_n),a_0)&\coloneqq(a_0,a_1,\dots,a_n)\\S_0(k,n)&\coloneqq\{(i_1,\dots,i_n)\in(\mathbb{Z}_{\ge0})^n\mid i_1+\dots+i_n=k\}\\S_1(k,n)&\coloneqq\{(i_1,\dots,i_n)\in\mathbb{N}^n\mid i_1+\dots+i_n=k\}\end{aligned}$$

ただし, 空列 $()$ に対し, $r\cdot()=(),\mathrm{push}((),a)=\mathrm{unshift}((),a)=(a)$ で, $k=n=0$ のとき $S_0(k,n)=S_1(k,n)=()$ とする。

補題 2.6. 非負整数 j', 正の整数 n について

$$\forall a=(a_1,\dots,a_{n-1})\in S_1(n+j'-1,n-1),P_{i,j'}(a_{n-1}-1,j'-a_{n-1}+1)\vee{}_{k\cdot\mathrm{unshift}(a,1)}\mathrm{C}_{\mathrm{push}(a,i+1)}=0$$

Proof. $j',a=(a_1,\dots,a_{n-1})\in S_1(n+j'-1,n-1)$ を固定し, $\mathrm{C}={}_{k\cdot\mathrm{unshift}(a,1)}\mathrm{C}_{\mathrm{push}(a,i+1)}$ とする。$\mathrm{C}\ne0$ と仮定すると

$$\begin{gathered}{}_k\mathrm{C}_{a_1}\cdot{}_{ka_1}\mathrm{C}_{a_2}\cdots{}_{ka_{n-2}}\mathrm{C}_{a_{n-1}}\cdot{}_{ka_{n-1}}\mathrm{C}_{i+1}\ne0\\a_1\le k,a_2\le ka_1,\dots,a_{n-1}\le ka_{n-2}\\a_{n-1}\le ka_{n-2}\le\dots\le k^{n-2}a_1\le k^{n-1}\\a_{n-1}-1\le k^{n-1}-1\end{gathered}$$

$$\begin{aligned}ka_{n-1}&\ge i+1\\a_{n-1}-1&\ge\left\lceil\frac{i-k+1}{k}\right\rceil\\n+j'-1&=a_1+a_2+\dots+a_{n-2}+a_{n-1}\\&\le k+k^2+\dots+k^{n-2}+a_{n-1}\\&=\frac{k^{n-1}-1}{k-1}+a_{n-1}-1\end{aligned}$$

$$j' - a_{n-1} + 1 \leq M_{k,n-1}$$

ここで, 正の整数 a, b, c についてある非負整数 p, q, r が存在して $a = pbc + qb + r$ と表せる。$(0 \leq q < c, 0 \leq r < b)$ ゆえに,

$$\left\lceil \frac{\lceil a/b \rceil}{c} \right\rceil = p + 1 = \left\lceil \frac{a}{bc} \right\rceil$$

これを用いれば,

$$\begin{aligned}
m_{k,n,a_{n-1}-1} &= \left\lceil \frac{a_{n-1} - k}{k} \right\rceil + m_{k,n-1,\lceil (a_{n-1}-k)/k \rceil} \\
&= \left\lceil \frac{a_{n-1}}{k} \right\rceil - 1 + m_{k,n-1,\lceil a_{n-1}/k \rceil - 1} \\
&= \left\lceil \frac{a_{n-1}}{k} \right\rceil - 1 + \left\lceil \frac{\lceil a_{n-1}/k \rceil}{k} \right\rceil - 1 + m_{k,n-1,\lceil \lceil a_{n-1}/k \rceil /k \rceil - 1} \\
&= \left\lceil \frac{a_{n-1}}{k} \right\rceil + \left\lceil \frac{a_{n-1}}{k^2} \right\rceil + \cdots + \left\lceil \frac{a_{n-1}}{k^{n-1}} \right\rceil - n + 1 \\
n + j' - 1 &= a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} \\
&\geq \left\lceil \frac{a_{n-1}}{k^{n-2}} \right\rceil + \left\lceil \frac{a_{n-1}}{k^{n-3}} \right\rceil + \cdots + \left\lceil \frac{a_{n-1}}{k} \right\rceil + a_{n-1} \\
j' - a_{n-1} + 1 &\geq 1 + \left\lceil \frac{a_{n-1}}{k^{n-2}} \right\rceil + \left\lceil \frac{a_{n-1}}{k^{n-3}} \right\rceil + \cdots + \left\lceil \frac{a_{n-1}}{k} \right\rceil - n + 1 \\
&\geq \left\lceil \frac{a_{n-1}}{k^{n-1}} \right\rceil + \left\lceil \frac{a_{n-1}}{k^{n-2}} \right\rceil + \left\lceil \frac{a_{n-1}}{k^{n-3}} \right\rceil + \cdots + \left\lceil \frac{a_{n-1}}{k} \right\rceil - n + 1 \\
&= m_{k,n,a_{n-1}-1}
\end{aligned}$$

以上より

$$\left\lceil \frac{i - k + 1}{k} \right\rceil \leq a_{n-1} - 1 \leq k^{n-1} - 1$$

$$m_{k,n,a_{n-1}-1} \leq j' - a_{n-1} + 1 \leq M_{k,n-1}$$

$$(a_{n-1} - 1) + (j' - a_{n-1} + 1) = j'$$

だから $\mathrm{C} \neq 0$ のとき $(a_{n-1} - 1, j' - a_{n-1} + 1)$ は条件 $P_{n,i,j'}$ を満たす。
つまり $\mathrm{C} = 0 \lor P_{i,j'}(a_{n-1} - 1, j' - a_{n-1} + 1)$ は真である。 □

定理 2.7. 整数 $n \geq 2$ について

$$b_{k,n,i,j} = \sum_{s \in S_1(n+j-2, n-2)} {}_{k \cdot \mathrm{unshift}(s,1)}\mathrm{C}_{\mathrm{push}(s,i+1)}$$

Proof. 数学的帰納法を用いて証明する。
[1] $n = 2$ のとき $B_{k,2}(x, y) = (xy)^{k-1} + {}_k\mathrm{C}_{k-1}(xy)^{k-2} + \cdots + {}_k\mathrm{C}_1$ で, $b_{k,2,i,0} = {}_k\mathrm{C}_{i+1}$ であるので成り立つ。
[2] n 以下の全ての自然数で成り立っていると仮定する。
式 (1) より, x, y それぞれについて係数比較をすると

$$B_{k,n+1}(x, y) = \sum_{i=0}^{k^n - 1} \sum_{j=\lceil (i-k+1)/k \rceil}^{k^{n-1}-1} \sum_{l=m_{k,n,j}}^{M_{k,n}} b_{k,n,j,l} \binom{jk + k}{i + 1} x^{i+j+l} y^i$$

$$\sum_{j'=m_{k,n+1,i}}^{M_{k,n+1}} b_{k,n+1,i,j'} x^{j'} = \sum_{j=\lceil (i-k+1)/k \rceil}^{k^{n-1}-1} \sum_{l=m_{k,n,j}}^{M_{k,n}} \sum_{s \in S_1(n+l-2,n-2)} {}_{k \cdot \mathrm{unshift}(s,1)}\mathrm{C}_{\mathrm{push}(s,j+1)} \binom{jk + k}{i + 1} x^{j+l}$$

$$b_{k,n+1,i,j'} = \sum_{\substack{j,l \\ P_{n,i,j'}(j,l)}} \sum_{s \in S_1(n+l-2,n-2)} {}_{k \cdot \mathrm{unshift}(s,1)}\mathrm{C}_{\mathrm{push}(s,j+1)} \binom{jk + k}{i + 1}$$

ただし, $P_{n,i,j'}(j, l) \Leftrightarrow \lceil (i - k + 1)/k \rceil \leq j \leq k^{n-1} - 1, m_{k,n,j} \leq l \leq M_{k,n}, j + l = j'$

補題 2.6 より

$$\begin{aligned}
\sum_{s \in S_1(n+j'-1,n-1)} {}_{k \cdot \mathrm{unshift}(s,1)}\mathrm{C}_{\mathrm{push}(s,i+1)} &= \sum_{\substack{j,l \\ P_{n,i,j'}(j,l)}} \sum_{s \in S_1(n+l-2,n-2)} {}_{k \cdot \mathrm{unshift}(s,1)}\mathrm{C}_{\mathrm{push}(s,j+1)} \binom{jk + k}{i + 1} \\
&= b_{k,n+1,i,j'}
\end{aligned}$$

$n+1$ のとき成り立つ。[1][2] より任意の整数 $n \geq 2$ について

$$b_{k,n,i,j} = \sum_{s \in S_1(n+j-2,n-2)} {}_{k\cdot \mathrm{unshift}(s,1)}\mathrm{C}_{\mathrm{push}(s,i+1)}$$

□

補題 2.6 から $0 \leq j' < m_{k,n+1,i}$ のとき

$$\begin{aligned} j' - a_{n-1} + 1 \leq j' &< m_{k,n+1,i} \\ &= \left\lceil \frac{i-k+1}{k} \right\rceil + m_{k,n,\lceil (i-k+1)/k \rceil} \\ &\leq \left\lceil \frac{i-k+1}{k} \right\rceil + m_{k,n,a_{n-1}-1} \\ &\leq m_{k,n,a_{n-1}-1} \end{aligned}$$

$(a_{n-1}-1, j'-a_{n-1}+1)$ は条件 $P_{i,j'}$ を満たさないので ${}_{k\cdot \mathrm{unshift}(a,1)}\mathrm{C}_{\mathrm{push}(a,i+1)} = 0$
$b_{k,n+1,i,j'} = 0 \ (0 \leq j' < m_{k,n+1,i})$ と数列の定義域を拡張できる。また，補題 2.6 から $j' > M_{k,n+1}$ のとき

$$j' - a_{n-1} + 1 > M_{k,n+1} - k^{n-1} + 1 = M_{k,n}$$

$(a_{n-1}-1, j'-a_{n-1}+1)$ は条件 $P_{i,j'}$ を満たさないので ${}_{k\cdot \mathrm{unshift}(a,1)}\mathrm{C}_{\mathrm{push}(a,i+1)} = 0$
$b_{k,n+1,i,j'} = 0 \ (j' > M_{k,n+1})$ と数列の定義域を拡張できる。

$$\begin{aligned} A_{k,n+1}(x) &= A_{k,n}(x) + x^n \sum_{i=0}^{k^{n-1}-1} \sum_{j=m_{k,n,i}}^{M_{k,n}} b_{k,n,i,j} x^{i+j} \\ &= A_{k,n}(x) + x^n \sum_{i=0}^{k^{n-1}-1} \sum_{j=0}^{\infty} b_{k,n,i,j} x^{i+j} \end{aligned}$$

だから $d_{k,n} = \deg A_{k,n}(x)$ とおき，

$$A_{k,n}(x) = \sum_{i=0}^{d_{k,n}} a_{k,n,i} x^i$$

とすると，

$$\begin{aligned} a_{k,n+1,n} &= a_{k,n,n} + b_{k,n,0,0} = a_{k,n-1,n} + b_{k,n-1,0,1} + b_{k,n-1,1,0} + b_{k,n,0,0} \\ &= \sum_{\substack{p,q \\ 0 \leq p+q \leq n}} b_{k,p,q,n-p-q} \\ &= \sum_{\substack{p,q \\ 0 \leq p+q \leq n}} \sum_{s \in S_1(n-q-2,p-2)} {}_{k\cdot \mathrm{unshift}(s,1)}\mathrm{C}_{\mathrm{push}(s,q+1)} \end{aligned}$$

ここである $p+q \leq n, s \in S_1(n-q-2, p-2)$ を固定し，
s' を s の後ろに $q+1$ と 0 を $n-p+1$ 個加えた組とすると $s' \in S_0(n-1, n-1)$ である。
$c = (c_1, \ldots, c_{n-1}) \in S_0(n-1, n-1)$ で $c_i = 0 \wedge c_j \neq 0 \ (i < j)$ となる (i, j) が存在すれば，${}_{k\cdot \mathrm{unshift}(c,1)}\mathrm{C}_{\mathrm{push}(c,0)} = 0$ であるので

$$\begin{aligned} a_{k,n+1,n} &= \sum_{\substack{p,q \\ 0 \leq p+q \leq n}} \sum_{s \in S_1(n-q-2,p-2)} {}_{k\cdot \mathrm{unshift}(s,1)}\mathrm{C}_{\mathrm{push}(s,q+1)} \\ &= \sum_{s \in S_0(n-1,n-1)} {}_{k\cdot \mathrm{unshift}(s,1)}\mathrm{C}_{\mathrm{push}(s,1)} \end{aligned}$$

$n \geq 1$ のとき

$$d_k(n) = \sum_{s \in S_0(n-1,n-1)} {}_{k\cdot \mathrm{unshift}(s,1)}\mathrm{C}_{\mathrm{push}(s,0)}$$

2.4 ラグランジュの反転公式

定理 2.1 の式を変形すれば $\{\sqrt[k]{{}^{k}x} f_k(x)\}^k - \{\sqrt[k]{{}^{k}x} f_k(x)\} + \sqrt[k]{{}^{k}x} = 0$
ここで，$g(x) = x - x^k$ とおくと，$g(\sqrt[k-1]{x} f_k(x)) = \sqrt[k-1]{x}$
$g(0) = 0, g'(0) \neq 0$ だから，ラグランジュの反転公式より $g^{-1}(z) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \frac{z^n}{n!}$(ただし $c_n = \lim_{t \to 0} \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} \left(\frac{t}{t-t^k}\right)^n$)

$$\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}\frac{1}{1-t} = \frac{(n-1)!}{(1-t)^n}$$
$$\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}(1+t+t^2+\cdots) = \sum_{i=0}^{\infty}\frac{(n+i-1)!}{i!}t^i$$
$$\frac{1}{(1-t^{k-1})^n} = \sum_{i=0}^{\infty}{}_{n+i-1}\mathrm{C}_i\,t^{(k-1)i}$$
$$c_n = \lim_{t\to 0}\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}\frac{1}{(1-t^{k-1})^n} = \lim_{t\to 0}\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}\sum_{i=0}^{\infty}{}_{n+i-1}\mathrm{C}_i\,t^{(k-1)i}$$

$n \not\equiv 1 \pmod{k-1}$ のとき, $c_n = 0, n$ に $(k-1)n+1$ を代入すると,

$$c_{(k-1)n+1} = \lim_{t\to 0}\frac{d^{(k-1)n}}{dt^{(k-1)n}}\sum_{i=0}^{\infty}{}_{(k-1)n+i}\mathrm{C}_i t^{(k-1)i} = {}_{kn}\mathrm{C}_n((k-1)n)!$$

$$g^{-1}(z) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n\frac{z^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty}{}_{kn}\mathrm{C}_n\frac{z^{(k-1)n+1}}{(k-1)n+1}$$

$$\sqrt[k-1]{x}f_k(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{{}_{kn}\mathrm{C}_n}{(k-1)n+1}(\sqrt[k-1]{x})^{(k-1)n+1}$$
$$f_k(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{{}_{kn}\mathrm{C}_n}{(k-1)n+1}x^n$$
$$d_k(n) = \frac{{}_{kn}\mathrm{C}_n}{(k-1)n+1}$$

2.5 有理数カタラン数

組合せ的な意味付けを利用して, さらに次のように有理数全体へ一般化することを考えた。

定義 2.3. 有理数カタラン数 $d_{q/p}(n,a)$ を $(0,0)$ から $(n,[\frac{q}{p}n+\frac{\bar{a}}{p}])$ まで格子点を通っていく経路で, $y \geq \frac{q}{p}x+\frac{\bar{a}}{p}$ の範囲で行く最短経路の総数とする。ただし, p と q は互いに素で, $\bar{x}$ で x を p で割ったあまりを表す。

定理 2.8. q/p を正の既約分数, $n, a \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$ とする。このとき $d_{q/p}(n,a)$ は以下の連立漸化式を満たす。

$$d_{q/p}(0,a) = \cdots = d_{q/p}(Q-1,a) = 1$$
$$d_{q/p}(n+Q,a) = \sum_{\substack{i_1,\ldots,i_{I+1}\\ i_1+\cdots+i_{I+1}=n}} d_{q/p}(i_1,a+qQ)d_{q/p}(i_2,a+qi_1+qQ)\cdots d_{q/p}(i_{I+1},a+qi_1+\cdots+qi_I+qQ)$$

ただし, $Q = \left\lceil \frac{p}{q}-\frac{\bar{a}}{q}\right\rceil, I = \left[\frac{q}{p}Q+\frac{\bar{a}}{p}\right], \bar{a}$ で a を p で割ったあまりを表す。

Proof. $l_i = \left\{(j,[\frac{q}{p}j+\frac{\bar{a}}{p}-i]) \in \mathbb{Z}^2 \middle| j \in \mathbb{Z}\right\}$ とおく。
(x,y) が l_i 上であるとは $(x,y) \in l_i$ であることをいう。また, 同じラベルを転用し, $l_i : x \mapsto (x,[\frac{q}{p}x+\frac{\bar{a}}{p}-i])$ とする。
このときすべての経路は必ず $(Q,0)$ を通る。($\because \frac{q}{p}(Q-1)+\frac{\bar{a}}{p} < 1 \leq \frac{q}{p}Q+\frac{\bar{a}}{p}$) したがって, $d_{q/p}(0,a) = \cdots = d_{q/p}(Q-1,a) = 1$
また、有理数カタラン数の定義よりすべての経路は $(n,[\frac{q}{p}n+\frac{\bar{a}}{p}])$ を通る。
$(n,[\frac{q}{p}n+\frac{\bar{a}}{p}])$ は l_0 上であり, さらに, $[\frac{q}{p}Q+\frac{\bar{a}}{p}-I-1] < 0 \leq [\frac{q}{p}Q+\frac{\bar{a}}{p}-I]$ だから,
$(Q,0)$ から $(n,[\frac{q}{p}n+\frac{\bar{a}}{p}])$ へ移る間には $l_I, l_{I-1}, \ldots, l_0$ すべてを通る必要がある。
したがって, 初めて通る l_{I-i} 上の点の x 座標を s_i とすれば
$(0,0), l_I(Q), l_I(s_1), l_{I-1}(s_1), l_{I-1}(s_2), \ldots, l_0(s_I), (n,[\frac{q}{p}n+\frac{\bar{a}}{p}]))$ を通るように $s_1,\ldots,s_I$ を定められる。
ただし $Q \leq s_1 \leq \ldots \leq s_I \leq n$
すべての $(s_1,s_2,\ldots,s_I)$ について考えれば, すべての経路を漏れなくダブりなく数えられて,
対応している経路の総数は $d_{q/p}(s_1-Q,a+qQ)d_{q/p}(s_1-s_2,a+qs_1)\cdots d_{q/p}(n-s_I,a+qs_I)$ だから

$$d_{q/p}(n,a) = \sum_{\substack{s_1,\ldots,s_I\\ Q\leq s_1\leq\cdots\leq s_I\leq n}} d_{q/p}(s_1-Q,a+qQ)d_{q/p}(s_2-s_1,a+qs_1)\cdots d_{q/p}(n-s_I,a+qs_I)$$

n を $n+Q$ と置き直し, $i_1 = s_1-Q, i_2 = s_2-s_1, \ldots, i_{I+1} = n-s_I$ とおけば,

$$d_{q/p}(n+Q,a)=\sum_{\substack{i_1,\dots,i_{I+1}\\ i_1+\dots+i_{I+1}=n}} d_{q/p}(i_1,a+qQ)d_{q/p}(i_2,a+qi_1+qQ)\cdots d_{q/p}(i_{I+1},a+qi_1+\cdots+qi_I+qQ)$$

□

まず, 母関数がどのような方程式を満たすかを考える。

ただし, 以降, q/p を正の既約分数,$a\in\mathbb{Z}_{\geqslant 0}, Q=\left\lceil\frac{p}{q}-\frac{\bar{a}}{q}\right\rceil$, $I=\left[\frac{q}{p}Q+\frac{\bar{a}}{p}\right]$,$\bar{a}$ で a を p で割ったあまりとする。
$f_{q/p,a}(x)=\sum_{n=0}^{\infty}d_{q/p}(n,a)x^n$, $f_{q/p,a,r}(x)=\sum_{n=0}^{\infty}d_{q/p}(pn+r,a)x^n$ と定める。また

$$\sum_{\substack{a,b\\ 0\le am+b\le n}} f(a,b)=\sum_{a=0}^{[n/m]-1}\sum_{b=0}^{m-1}f(a,b)+\sum_{b=0}^{n-m[n/m]}f([n/m],b)$$

と表す。

$$\sum_{i=0}^{n}f(n)=\sum_{\substack{a,b\\ 0\le am+b\le n}} f(am+b)$$

であることに注意すれば

$$\begin{aligned}
&d_{q/p}(n+Q,a)\\
=&\sum_{\substack{i_1,\dots,i_{I+1}\\ i_1+\dots+i_{I+1}=n}} d_{q/p}(i_1,a+qQ)d_{q/p}(i_2,a+qi_1+qQ)\cdots d_{q/p}(i_{I+1},a+qi_1+\cdots+qi_I+qQ)\\
=&\sum_{i_1=0}^{n}\cdots\sum_{i_I=0}^{n-i_1-\cdots-i_{I-1}} d_{q/p}(i_1,a+qQ)d_{q/p}(i_2,a+qi_1+qQ)\cdots d_{q/p}(n-i_I-\cdots i_1,a+qi_1+\cdots+qi_I+qQ)\\
=&\sum_{\substack{i_1,r_1\\ 0\le i_1p+r_1\le n}}\sum_{\substack{i_2,r_2\\ 0\le i_2p+r_2\le n-i_1p-r_1}}\cdots\sum_{\substack{i_I,r_I\\ 0\le i_Ip+r_I\le n-i_1p-r_1-\cdots-i_{I-1}p-r_{I-1}}}\prod_{j=1}^{I}d_{q/p}(i_jp+r_j,a+qQ+qr_1+\cdots+qr_{j-1})\\
&\times d_{q/p}(n-i_1p-r_1-\cdots-i_Ip-r_I,a+qr_1+\cdots+qr_I+qQ)
\end{aligned}$$

ただし, $Q,I,\bar{a}$ は定理 2.8 で定めたものと同じとする。ここから, 級数の積を展開したときの係数を考えれば $S=\{0,1,\dots,p-1\}$ とおくと,

$$\frac{f_{q/p,a}(x)-x^{Q-1}-\cdots-1}{x^Q}=\sum_{(r_1,r_2,\dots,r_I)\in S^I}x^{\sum r_i}f_{q/p,a+qQ+q\sum r_i}(x)\prod_{i=1}^{I}f_{q/p,a+qQ+q\sum_{j=1}^{i-1}r_j,r_i}(x^p)$$

ただし,$\sum r_i=\sum_{i=1}^{I}r_i$ で, $\sum_{j=1}^{0}r_j=0$ とする。さらに, $0\le r\le p-1$ である整数 r について
$\overline{r+Q}<Q$ のとき

$$\frac{f_{q/p,a,\overline{r+Q}}(x)-1}{x}=\sum_{(r_1,r_2,\dots,r_I)\in S^I}x^{[(\overline{r^*}-r^*)/p]}f_{q/p,a+qQ+q\sum r_i,\overline{r^*}}(x)\prod_{i=1}^{I}f_{q/p,a+qQ+q\sum_{j=1}^{i-1}r_j,r_i}(x)$$

$\overline{r+Q}\ge Q$ のとき

$$f_{q/p,a,\overline{r+Q}}(x)=\sum_{(r_1,r_2,\dots,r_I)\in S^I}x^{[(\overline{r^*}-r^*)/p]}f_{q/p,a+qQ+q\sum r_i,\overline{r^*}}(x)\prod_{i=1}^{I}f_{q/p,a+qQ+q\sum_{j=1}^{i-1}r_j,r_i}(x)$$

ただし, $r^*=r-\sum r_i$

2.6 $p>1,q=1$ の場合

$p>1,q=1$ の場合を考える。

$$\frac{1}{p}\left(\frac{p}{1}-\frac{\bar{a}}{1}\right)+\frac{\bar{a}}{p}\le\frac{1}{p}\left\lceil\frac{p}{1}-\frac{\bar{a}}{1}\right\rceil+\frac{\bar{a}}{p}<\frac{1}{p}\left(\frac{p}{1}-\frac{\bar{a}}{1}+1\right)+\frac{\bar{a}}{p}$$

$$1\le I\le 1+\left[\frac{1}{p}\right]=1$$

したがって $I=1$ であり，母関数は

$$\frac{f_{1/p,a}(x)-x^{Q-1}-\cdots-1}{x^Q}=\sum_{r\in S}x^r f_{1/p,a+Q+r}(x)f_{1/p,a+Q,r}(x^p)$$

さらに，漸化式の形を見ると，I の値は $I=1$ で a の値に関わらず一定だから
$d=\bar{a'}-\bar{a}$ とすると

$$Q-Q'=\left(\left\lceil\frac{p}{q}-\frac{\bar{a}}{1}\right\rceil-\left\lceil\frac{p}{1}-\frac{\bar{a'}+d}{1}\right\rceil\right)=d=\bar{a'}-\bar{a}$$

より常に $\bar{a}+Q=\bar{a'}+Q'$ が成り立つ。
このとき漸化式の形が一致して，$d_{1/p}(n+Q,a)=d_{1/p}(n+Q',a'),d_{1/p}(n+\bar{a'}-\bar{a},a)=d_{1/p}(n,a')$ が成り立つ。
さらに，$a=0$ とすると $Q=p$ で，母関数の方程式は

$$\frac{f_{1/p,0}(x)-x^{p-1}-\cdots-1}{x^p}=\sum_{r\in S}x^r f_{1/p,r}(x)f_{1/p,0,r}(x^p)$$

$$\frac{f_{1/p,0}(x)-x^{p-1}-\cdots-1}{x^p}=f_{1/p,0}(x)f_{1/p,0,0}(x^p)+\sum_{r=1}^{p-1}x^r\frac{f_{1/p,0}(x)-x^{r-1}-\cdots-1}{x^r}f_{1/p,0,r}(x^p)$$

$$(x-1)f_{1/p,0}(x)-x^p+1=(x-1)f_{1/p,0}(x)f_{1/p,0,0}(x^p)x^p+x^p\sum_{r=1}^{p-1}((x-1)f_{1/p,0}(x)-x^r+1)f_{1/p,0,r}(x^p)$$

このように変形できる。さらに $f_{1/p,0}(x)=\sum_{r=0}^{p-1}x^r f_{1/p,0,r}(x^p)$ であるから

$$\begin{aligned}(x-1)f_{1/p,0}(x)-x^p+1=&(x-1)f_{1/p,0}(x)f_{1/p,0,0}(x^p)x^p-x^p f_{1/p,0}(x)+x^p f_{1/p,0,0}(x^p)\\&+x^p\sum_{r=1}^{p-1}((x-1)f_{1/p,0}(x)+1)f_{1/p,0,r}(x^p)\end{aligned}$$

$$(x^p+x-1)f_{1/p,0}(x)-x^p+1=x^p((x-1)f_{1/p,0}(x)+1)\sum_{r=0}^{p-1}f_{1/p,0,r}(x^p)$$

ここでさらに $f_{1/p,0,0}(x)$ についての方程式を考えると

$$\frac{f_{1/p,0,0}(x)-1}{x}=\sum_{r=0}^{p-1}x^{[(\overline{-r}+r)/p]}f_{1/p,r,\overline{-r}}(x)f_{1/p,0,r}(x)$$

$$\frac{f_{1/p,0,0}(x)-1}{x}=f_{1/p,0,0}(x)f_{1/p,0,0}(x)+\sum_{r=1}^{p-1}xf_{1/p,r,p-r}(x)f_{1/p,0,r}(x)$$

$$\frac{f_{1/p,0,0}(x)-1}{x}=f_{1/p,0,0}(x)f_{1/p,0,0}(x)+\sum_{r=1}^{p-1}x\frac{f_{1/p,0,0}(x)-1}{x}f_{1/p,0,r}(x)$$

$$\sum_{r=0}^{p-1}f_{1/p,0,r}(x)=-\frac{xf_{1/p,0,0}(x)-f_{1/p,0,0}(x)+1}{x(f_{1/p,0,0}(x)-1)}$$

$$(x^p+x-1)f_{1/p,0}(x)-x^p+1=((x-1)f_{1/p,0}(x)+1)\left(-\frac{x^pf_{1/p,0,0}(x^p)-f_{1/p,0,0}(x^p)+1}{(f_{1/p,0,0}(x^p)-1)}\right)$$

$$\begin{aligned}&\{(x^p+x-1)(f_{1/p,0,0}(x^p)-1)+(x-1)(x^pf_{1/p,0,0}(x^p)-f_{1/p,0,0}(x^p)+1)\}f_{1/p,0}(x)\\=&(x^p-1)(f_{1/p,0,0}(x^p)-1)-x^pf_{1/p,0,0}(x^p)+f_{1/p,0,0}(x^p)-1\end{aligned}$$

$$\{x^{p+1}f_{1/p,0,0}(x^p)-x^p\}f_{1/p,0}(x)=-x^p$$

$$f_{1/p,0}(x)=\frac{1}{1-xf_{1/p,0,0}(x^p)}$$

有理数カタラン数の定義から $d_{1/p}(pn,0)=d_{p/1}(n,0)$ で

$$f_{1/p,0}(x)=\frac{1}{1-xf_{p/1,0}(x^p)}$$

ここで新たに以下のような数列を考えてみる。

定義 2.4. 正の既約分数 q/p と非負整数 n,a について,
$d^*_{q/p}(n,a)$ を $(0,0)$ から $(n,\left\lfloor \frac{q}{p}n+\frac{a}{p}\right\rfloor)$ まで格子点を進む最短経路で, 領域 $y\le\frac{q}{p}x+\frac{a}{p}$ 内だけを進む経路の総数とする。

以前定義したものと比べて, $\bar{a}$ が a に変わっているだけだから, $a<p$ のとき $d^*_{q/p}(n,a)=d_{q/p}(n,a)$
このようにすると, 以下の漸化式を得る。

定理 2.9. 正の既約分数 q/p と非負整数 n,a について

$$d^*_{q/p}(0,a)=d^*_{q/p}(1,a)=\cdots=d^*_{q/p}(Q-1,a)=1$$
$$d^*_{q/p}(n+Q,a)=\sum_{i=0}^{n}d^*_{q/p}(i,0)d^*_{q/p}(n-i,R(i))$$

ただし, $Q=\max\left(0,\left\lceil\frac{p}{q}-\frac{a}{q}\right\rceil\right),R(i)=a-p+qQ+\overline{qi}$

Proof. まず, $0\le n<Q$ のとき, 任意の経路は $(Q,0)$ を通るから $d^*_{q/p}(n,a)=1$
$l=\left\{\left(i,\left\lfloor\frac{q}{p}(i-Q)+1\right\rfloor\right)\middle|i=1,2,...,n-1\right\}$ とする。
$(x,y)\in l$ であるとき, (x,y) は l 上にあるという。また, ラベルを転用し, $l(x)=\left\lfloor\frac{q}{p}(x-Q)+1\right\rfloor$ とする。
このとき, $(Q,1)$ は l 上にあり, 経路は必ず $(Q,0)$ を通るから, 経路は必ずある l 上の点 $(i,l(i))$ を通っていて, $i\ge Q$ である。
$(0,0)$ から $(i,l(i))$ へ l 上を通らずに行く最短経路の総数は $d^*_{q/p}(i-Q,0)$ で,
$(i,l(i))$ から $(n,[\frac{q}{p}n+\frac{a}{p}])$ まで領域 $y\le\frac{q}{p}x+\frac{a}{p}$ で行く経路の総数は $d^*_{q/p}\left(n-i,p(\frac{q}{p}i+\frac{a}{p}-l(i))\right)$
ここで, $i'=i-Q,n'=n-Q$ とおけば, 経路の総数は
$d^*_{q/p}(i-Q,0)d^*_{q/p}\left(n-i,p(\frac{q}{p}i+\frac{a}{p}-l(i))\right)=d^*_{q/p}(i',0)d^*_{q/p}\left(n'-i',p(\frac{q}{p}i+\frac{a}{p}-l(i))\right)$
$p(\frac{q}{p}i+\frac{a}{p}-l(i))=qi'+qQ+a-p\lfloor qi/p+1\rfloor=a-p+qQ+\overline{qi'}$
したがって,

$$d^*_{q/p}(n+Q,a)=\sum_{i=0}^{n}d^*_{q/p}(i,0)d^*_{q/p}(n-i,R(i))$$

□

$f^*_{q/p,a}(x)=\sum_{n=0}^{\infty}d^*_{q/p}(n)x^n,\ f^*_{q/p,a,r}(x)=\sum_{n=0}^{\infty}d^*_{q/p}(pn+r)x^n$ とすれば,

$$\frac{f^*_{q/p,a}(x)-x^{Q-1}-\cdots-x-1}{x^Q}=\sum_{r=0}^{p-1}x^rf^*_{q/p,0,r}(x^p)f^*_{q/p,R(r)}(x)$$

また, 組み合わせから, $p+q>a\ge q$ のとき $d^*_{q/p}(n,a)=d^*_{q/p}(n+1,a-q)$ だから

$$1+xf^*_{q/p,a}(x)=f^*_{q/p,a-q}(x)$$

$a\ge p+q$ のとき $d^*_{q/p}(n,a)=d^*_{q/p}(n+1,a-q)-d^*_{q/p}(n+1,a-p-q)$ だから

$$xf^*_{q/p,a}(x)=f^*_{q/p,a-q}(x)-f^*_{q/p,a-p-q}(x)$$

これによって, 有理数カタラン数の母関数についての単純な方程式で表せたが、この方程式を解くため、登場する母関数を消去していくと結局前の方程式のようになってしまうため、解くことができなかった。

3 まとめと今後の課題

一般化カタラン数の一般項については

$$d_k(n)=\frac{{}_{kn}\mathrm{C}_n}{(k-1)n+1}=\sum_{s\in S_0(n-1,n-1)}{}_{k\cdot\mathrm{unshift}(s,1)}\mathrm{C}_{\mathrm{push}(s,0)}$$

という 2 つの表示を見つけることができた。全く違う見た目の 2 つの式が得られて驚きを感じた。一方, 有理数カタラン数については, 母関数の満たす方程式は分かったが, 一般項を求めることはできなかった。

4 今後の課題

今回はラグランジュの反転公式を用いたが, より初等的に求める方法も見つけたい。有理数カタラン数の母関数の方程式を, できるだけきれいな形を保ったまま変形する方法を考えたい。

5 参考文献

[1] 学び Times(2021)「カタラン数の意味と漸化式」https://manabitimes.jp/math/657 (参照 2022 年 8 月 1 日)
[2]WolframMathWorld “Lagrange Inversion Theorem” https://mathworld.wolfram.com/LagrangeInversionTheorem.html (参照 2022 年 8 月 22 日)