新・世界地図！！

桐蔭学園高等学校
黒田莉生、中川琴那、野村恵里、吉成美樹
指導教諭　千田守先生

はじめに
私達は今までに、地理の授業で様々な世界地図があることを学んできました。例えば、目的地までの方向が分かるメルカトル図法や、最短距離が分かる正距方位図法。そして面積を正しく表しているモルワイデ図法などがあります。これらの地図を見て、方向、距離、面積以外の指標で世界地図を作ることができないかと考えました。そこで、時差、重力、日照時間の3つに着目して、新しい地図を作ってみることにしました。時差は経度によって、重力と日照時間は緯度によって異なるため、それらに対応した新たな経線と緯線を設定し直しました。最初はメルカトル図法のように緯線と経線が垂直になるように設定し、次に緯線や経線を双曲線に設定した地図を描きました。

経度ごとに差が一定である時差では、「双曲線上の任意の点から2つの焦点までの距離の差が一定」という性質を利用して、経線を双曲線に変換した地図を描きました。緯度や標高により変化する重力については、標高を一定に定めて同様の考察をしました。日照時間については、「昼の長さ」＋「夜の長さ」＝24　と常に一定であることに着目し、「楕円上の任意の点から2つの焦点までの距離の和が一定」という性質を利用して地図を描きました。また、|(昼の長さ)―(夜の長さ)|が緯度によって決まることに着目し、緯線を双曲線で表した地図も描くことができました。このようにして、二次曲線を応用したユニークな世界地図をいくつも描くことができました。

いろいろな世界地図について考察した私達は、二次曲線を利用して異なる視点から物事を見つめることに興味を持ちました。そこで今回は日々の生活と関係が深い消費税を可視化しようと試みました。推測と検証を重ねた結果、日本の消費税を二次曲線を用いて分かりやすく表現することができました。また、消費税率は国によって様々なので、世界各国の消費税についても、可視化して比較することができました。

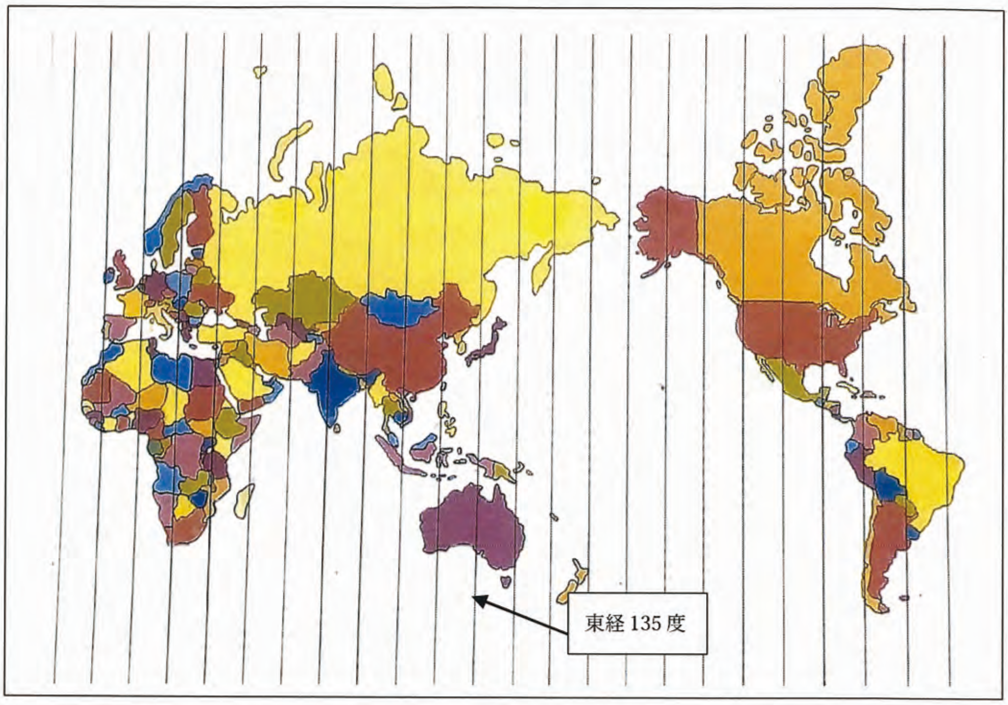
1章 新しい世界地図

§1. 経度によって変わる時差

初めに私達は、経度によって変わる日本との時差に着目し、「双曲線上の任意の点から2焦点までの距離の差が一定」という性質を利用して、ユニークで新しい世界地図を作れないかと考えました。
そこでヨーロッパを左端、カナダを右端、日本を中央に位置するように配置し、日本からの時差を表した世界地図を作ることにしました。そして、|PF－PF´|=(日本からの時差)により得られる双曲線を経線に設定し、方程式を以下のように定めました。この 24 本の双曲線を経度として、それに従って世界地図を双曲線の上に描きました。1 本の曲線ごとに 1 時間の時差で、日本との時差がa時間の経線を次のように定めました。これは時差による地図なので、インドネシア語で「時差」を意味する「parbedaan waktu」から、パラベタ図法と名付けました。

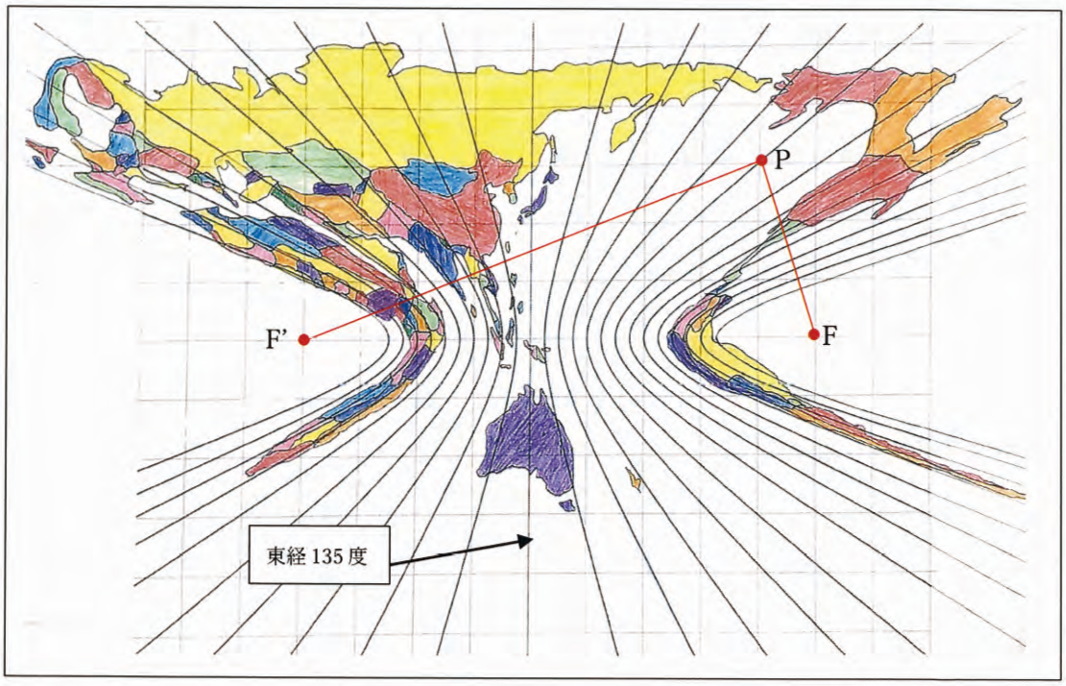
$$\frac{4x^2}{a^2}-\frac{400y^2}{440-1.1a^2}=1\left(1\leqq a\leqq 12\ \text{ただし}a\text{は自然数}\right)$$

メルカトル図法



経線 1 本につき 1 時間の時差、これは経度にすると 360÷24＝15°となります。日付変更線をはじめ、時差を決定するラインは必ずしも緯線と平行ではありませんが、日本との理論上の時差でのラインを引いてみました。

パラベタ図法



|PF－PF´|=(日本からの時差)より、メルカトル図法において平行な直線で表される経線が双曲線になるため、点 P を含む曲線上の全ての地点における日本との時差は 5 時間です。

南米・北米・アフリカのように、時差の大きい地域ほどメルカトル図法と比べて歪みが大きくなります。

この地図では、日本からの時差が等しい地域をユニークな形で確認することができます。メルカトル図法の地図と比べて、日本との経度の差が大きいほど大陸の形に大きな違いが生じました。

§2. 緯度によって変わる重力

次に、重力について調べました。一般に、重力は質量と重力加速度の積で表されます。重力について調べていくうちに、これは緯度と標高によって異なることを知りました。つまり、高緯度になればなるほど重力加速度は大きくなり、重力も大きくなります。そして標高が高くなればなるほど、重力は小さくなります。そこで私達は標高を0mとして考察しました。

まず、赤道(緯度 0°)において 100kg の物体が、緯度によって重さがどのくらい変わるのか調べました。すると、(表1)のようになりました。

(表1)　※標高 0mにおける重さ

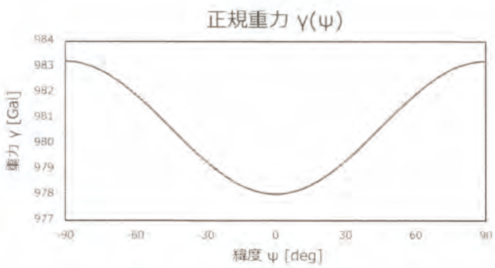
緯度(度)	重さ(kg)	増加幅(g)	重力加速度(m/s^2)
0	100	―	9.78
10	100.0159	15.9	9.781
20	100.0618	61.8	9.786
30	100.1321	132.1	9.793
40	100.2185	218.5	9.801
50	100.3106	310.6	9.81
60	100.3972	397.2	9.819
70	100.468	468	9.826
80	100.5142	514.2	9.83
90	100.5302	530.2	9.832

つまり、北緯 35° の日本で体重が 50kg の人は赤道直下のところに行くと体重が約 85g 減るということです。余談ですが、赤道直下のシンガポールで 1 トン(1000kg)の金を買い北緯 60° のオスロへ運ぶと 1004kg になり、4kg 増えます。これは 8 月 8 日のレートで 3370 万円です。もし 4 トンならば輸送費を引いても 1 億円以上の利益になります。本当にこんなに上手い資産運用ができるのだろうかと思いましたが、実際は貴金属の重さを計る際には天秤ばかりのように緯度や標高による重力変化の影響を受けないもので計って売買されるため、このような資産運用はできないことが分かりました。

標高によって重力が変わる例として、1968 年のメキシコオリンピックで走り幅跳びに出場したボブ・ビーモン氏の 8m90cmという記録が、1992 年まで 24 年間破られず現在でも歴代 2 位の記録であるのは、開催地が標高約 2400mの高地であるためだと言われています。

(表1)を用いて、赤道で 100kgの物体の重さの増加量が 60g、120g、180g、…となる緯度を以下の方法で求めました。

1. 物体の重さの増加量をtとおきます。
2. tが(表1)で緯度が何度と何度の間にあるかを確認します。例えば、t＝60 のときtは 15.9＜t＜61.8 を満たします。このことから、(表1)より、物体の重さの増加量が 60gとなる緯度は 10° と 20° の間であることが分かります。
3. 物体の重さの増加量がtであるときの緯度をx度としたとき、2. の操作でxがy＜x＜y＋10 を満たすことが分かり、ここで、緯度がyのときの増加量をα、y＋10 のときの増加量をβとしておきます。
4. (表1)を見ると、高緯度になればなるほど、重力加速度が大きくなっています。したがって、(表1)のみを見ると、緯度と重力加速度、すなわち緯度と物体の重さは比例しているように感じますが、右のグラフから分かるように緯度 0° ～90° と重力加速度の関係は緩やかな曲線になっています。ただ、微小区間においては緯度と重力加速度の関係はほぼ直線に近いため、この曲線を直線に近似して考えました。このとき ｛(y＋10)－y｝:(x－y)＝(β－α):(t－α) が成り立ちます。



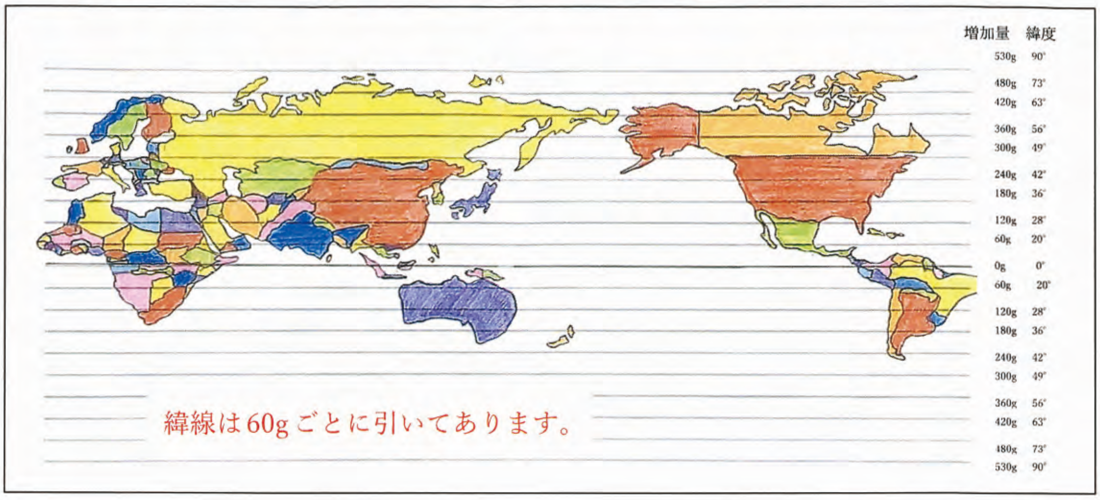
5. tを設定すると、(表1)からy、α、βの値が得られるので、上の方程式に代入するとxの値が求まります。このように、物体の重さの増加量からおよその緯度を計算することができます。その結果、xは 20° 、28° 、36° …となりました。すなわち、100kgの物体の重さが 60g増加する時の緯度は 20° 、120g増加する時の緯度は 28° …となります。そこで、0° と 20° 、20° と 28° 、…の緯線の幅が等しくなるような世界地図を描きました。この世界地図を「重力図」と名付けました。続いて、「緯度によって重力が異なる」ということを用いて時差と同様に新しい地図を作ることができないかと考えました。|PF－PF'|=(赤道との重力の差)によって得られる双曲線を緯線としました。曲線と地図が見やすくなるように調整を重ね、焦点の位置を(0, ±60)、赤道との重力の差を 2aとする双曲線の方程式を次のように定めました。

$$\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{14400-a^2}=\frac{1}{4}$$

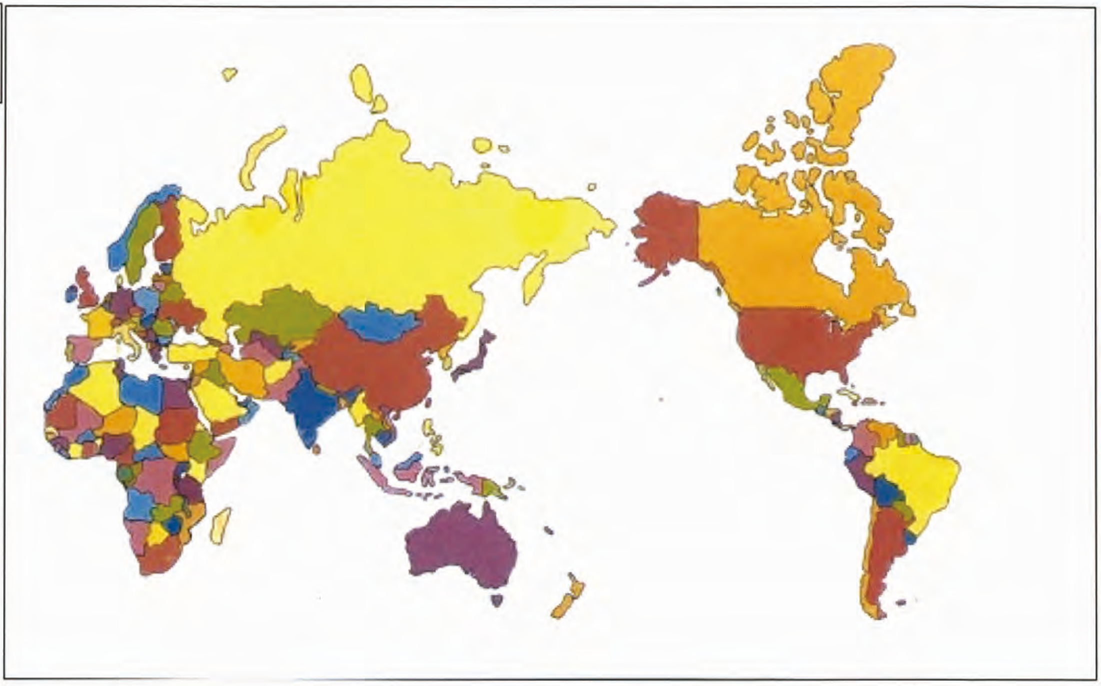
この双曲線を緯度とし、それに従って世界地図を双曲線の上に描きました。これは重力による地図なので、英語で「重力」を意味する「gravity」から、グラビティ図法と名付けました。これらをメルカトル図法と比べてみました。アフリカや南米のような赤道から離れた地域ほど、メルカトル図法の地図と比べて国の面積や形状に大きな違いが確認できます。

重力図

メルカトル図法に比べると、重力図の方はカナダ、ロシアが小さく見えますが、実際の面積比はロシア:米国:カナダ:中国=2:1:1:1 より、メルカトル図法より実際の面積比に近いと思われます。



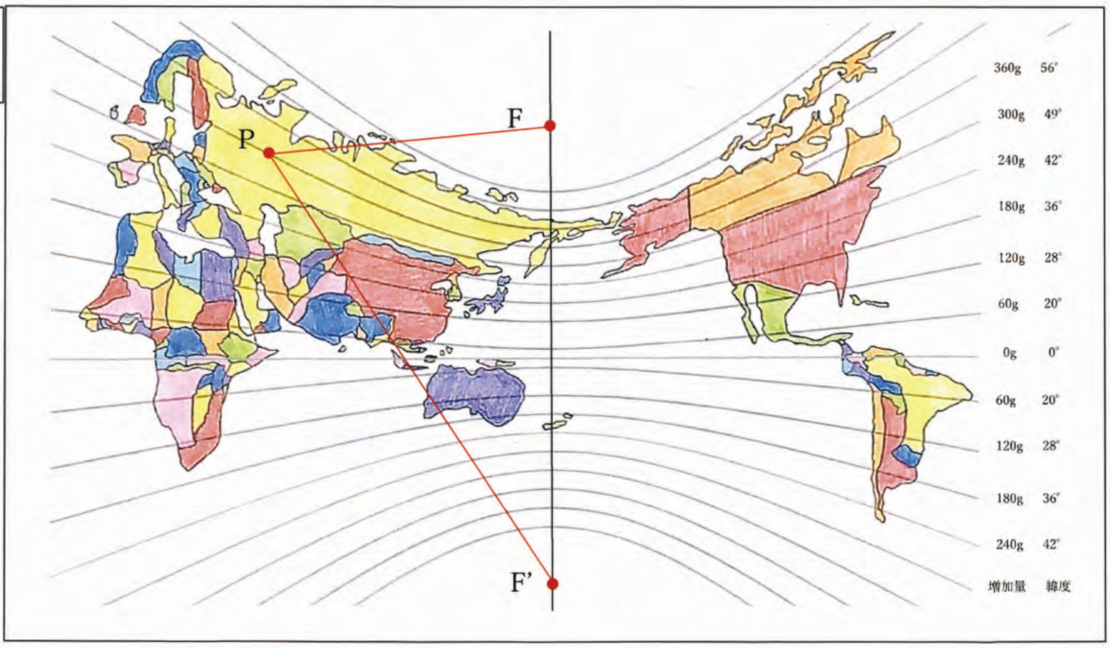
メルカトル図法



グラビティ図法

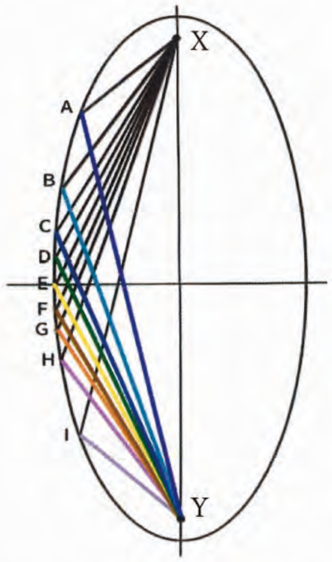
|PF − PF'|=(赤道との重力の差)

より、、点Pを含む曲線上の全ての地点における赤道との重力の差は360gです。メルカトル図法に比べると、アメリカとカナダの面積比が大きく異なりました。



§3. 緯度によって変わる各都市の日照時間

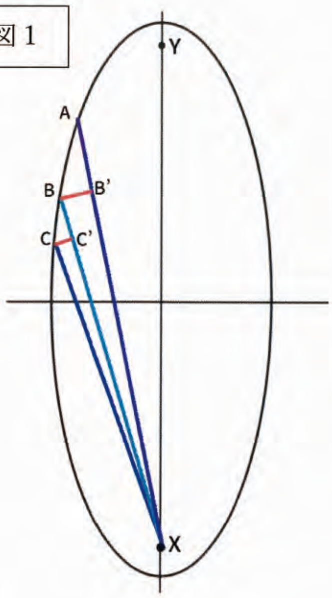
緯度によって昼の長さと夜の長さは異なりますが、それらの和は24時間で一定です。このことに着目し、楕円の「楕円上の任意の点から2つの焦点までの距離の和が一定」という性質を利用して、昼と夜の長さを緯度15°ごとに調べて、色分けしました。ただし、北緯66.6°を超えると白夜となり、南緯66.6°を超えると極夜となるため、60°までとしました。参考にしたのは夏至における昼と夜の時間で、右のような図が得られました。焦点Yと楕円上の点を結んだ線分の長さを昼の時間の長さ、焦点Xと楕円上の点を結んだ線分の長さを夜の時間の長さとしました。つまり点Aは北緯60°なので、線分AYの長さが北緯60°地点での昼の長さであり、線分AXの長さが夜の長さです。他の緯度についても同様に考えます。また、緯度ごとの日照時間をもとに考えると、地球上ではE地点とD地点の緯度の差もA地点とB地点の緯度の差も全て15°ですが、上の図ではA地点とB地点の間隔の方がE地点とD地点の間隔よりも大きいことが見て取れます。

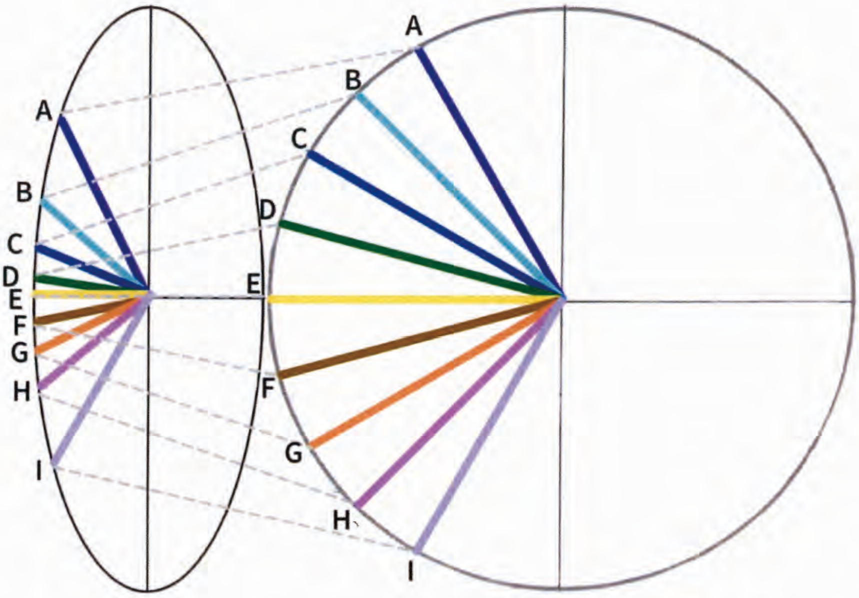


A 北緯60° (18.9h)
B 北緯45° (15.7h)
C 北緯30° (14.0h)
D 北緯15° (13.0h)
E 赤道 0° (12h)
F 南緯15° (11.2h)
G 南緯30° (10.2h)
H 南緯45° (8.8h)
I 南緯60° (5.9h)
()内は夏至における日照時間

次にこの楕円の緯度の位置と地球の緯度の位置を比較し、日照時間という別の視点で新しい緯度を設定しました。地球儀の緯線は等間隔ですが、楕円上の新しい緯線は極に向かうにつれて間隔が大きくなっていきます。
(BXの長さ)=(B'Xの長さ)となるB'を線分AX上にとります。線分BX上にも(CXの長さ)=(C'Xの長さ)となるC'をBX上にとります。するとおおむね$\widehat{AB}:\widehat{BC}\fallingdotseq AB':BC'$となります。よって日照時間の差の比($\widehat{AB}:\widehat{BC}$)がおおむね図1における各緯度の間隔の比(AB':BC')となります。つまり、極に向かうほど日照時間の差が大きくなります。

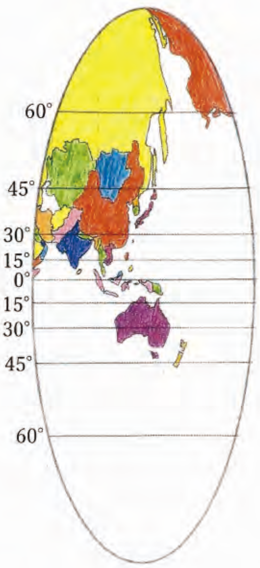
図1



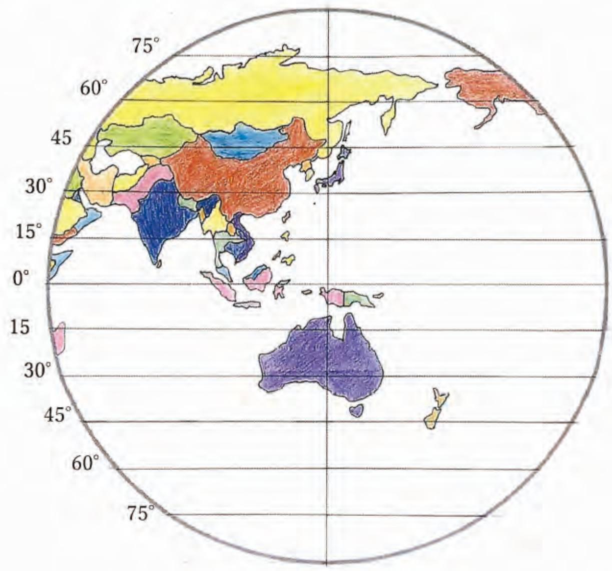


そして、この楕円の緯線に合わせて新しい地図を描くと次のページのようになりました。イタリア語で「日照時間」を意味する「Ore diurne」からディオルネ図法と名づけました。

ディオルネ図法



モルワイデ図法をアレンジした地図



昼の長さと夜の長さは緯度によって異なります。つまり、高緯度になればなるほど|(昼の長さ)−(夜の長さ)|が大きくなります。そこで私達は新たな緯線として昼の長さと夜の長さの差を考えました。|(昼の長さ)−(夜の長さ)|を 4h、8h、12h…と区切り、これらに対応する緯度を求めると、右の表のようになりました。ただし、北緯 66.6° を超えると白夜となり、南緯 66.6° を超えると極夜となるため、66° ～90° の間では常に 24h であると見なすことにしました。また、南緯 48° 以南は南極大陸を除いて主要な大陸が存在しなかったので、表には記載していません。北緯 0° (赤道)と北緯 29° 、北緯 29° と北緯 48° ・・・の緯線の幅が等しくなるような世界地図を「重力図」と同様の手順で描きました。そして、これを「日照時間図」と名付けました。

北緯 66° ～90°	(24 h)
北緯 65°	(20 h)
北緯 62°	(16 h)
北緯 57°	(12 h)
北緯 48°	(8 h)
北緯 29°	(4 h)
赤道 0°	(0 h)
南緯 29°	(4 h)
南緯 48°	(8 h)

() 内は夏至における
|(昼の長さ)−(夜の長さ)|

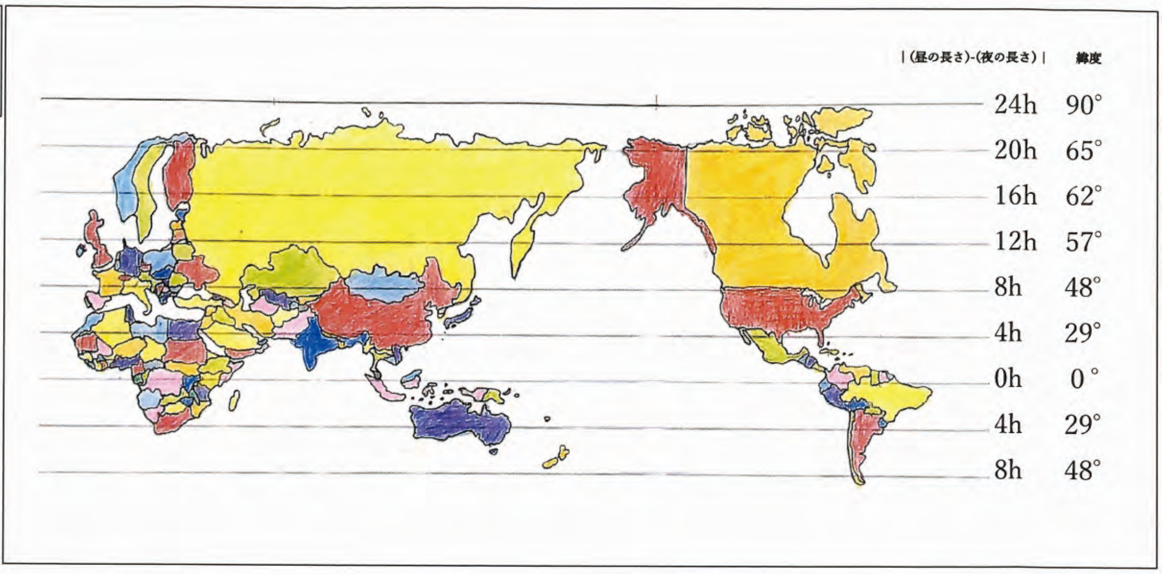
「双曲線上の任意の点から2焦点までの距離の差が一定」という性質を利用して、日照時間図を違った視点で捉え、新たな世界地図を描こうと試みました。2 焦点からの距離の差|PF−PF'|を$2a$とおき、その差を|(昼の長さ)−(夜の長さ)|としました。そして、|PF−PF'|=$2a$によって得られる双曲線を緯線としました。曲線と地図が見やすくなるように調整を重ね、焦点の位置を$(0,\ \pm\sqrt{16+a^2})$とする双曲線の方程式を以下のように定めました。

$$\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{a^2}=-1$$

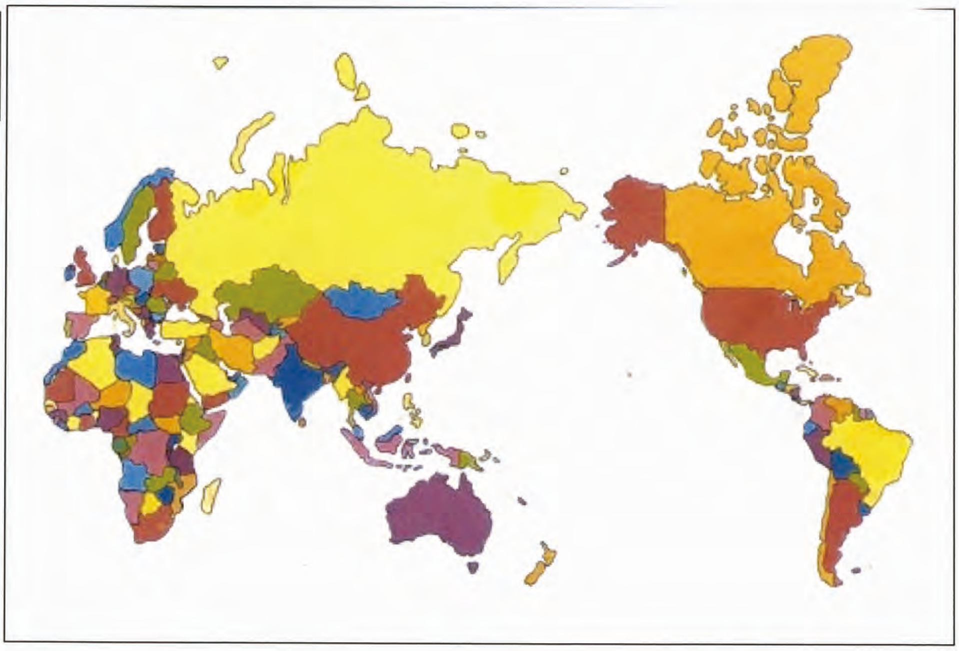
この双曲線を緯度とし、それに従って世界地図を双曲線の上に描きました。これは日照時間による地図なので、スンダ語で「日照時間」を意味する「wanci beurang」から、ワンチ図法と名付けました。日照時間図とワンチ図法をメルカトル図法と比べたものが次のページです。ちなみにスンダ語は、インドネシアのジャワ島西部で話されている言語です。

日照時間図

メルカトル図法に比べると、アメリカとカナダの面積比が、グラビティ図法と逆になりました。

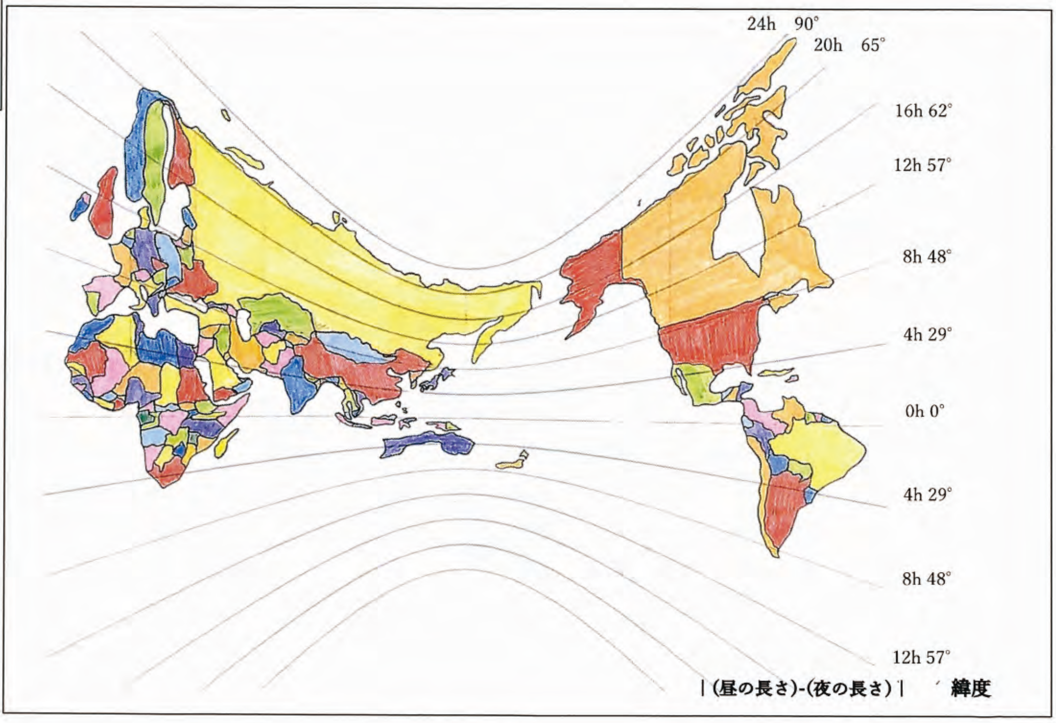


メルカトル図法



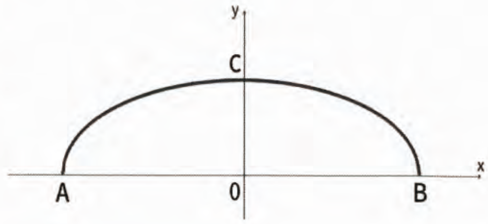
ワンチ図法

メルカトル図法と比べると、オーストラリアの面積がかなり縮んでいるように見えます。これは、地図の中央部分が縦に潰されているためです。



2章 目で見る消費税

§1. 消費税



私達は楕円を利用すればいろいろな消費税を可視化することができるのではないかと考えました。楕円の長軸 AB の長さを定価、弧 AB の長さを税込価格とし、A(−10, 0)、B(10, 0)、正のy切片をCとします。消費税が 10%の時、線分 AB＝20、弧 AB＝22 となるような楕円の方程式を求めようとしましたが、高校数学の知識では求めることができませんでした。

そこで、弧 AB＝22 となる楕円の方程式を求めるのではなく探そうと発想を切り替えました。

私達は、以下の方法で方程式を探すことにしました。 まず初めに、消費税 10%の場合を考えました。

1. 図1のように線分 AB＝20cm となる直線を紙に書きます。
2. 図2のように 22cm の糸を用意し、AB の両端に貼りつけます。
3. 図3のように手探りで糸を楕円に近づけ、AB の中点 O と C の長さを計測します。(CO と AB は垂直)

図1

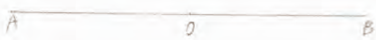


図2

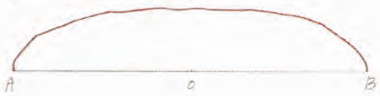
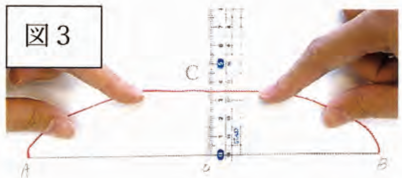


図3



4. 計測の結果、CO＝3.5cm となったので、楕円の式を $x^2+8.2y^2=100$ と推測しました。
5. 関数アプリにこの式を入力し、実寸大で線分 AB の長さが 20cm となるように拡大コピーします。それが図4です。そして、22cm の糸を楕円に沿って手作業で図5のようにセロハンテープで貼りつけます。すると右端の方に 5mm の誤差が生じました。この右端を拡大したものが図6です。

図4

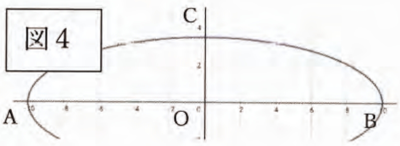


図5

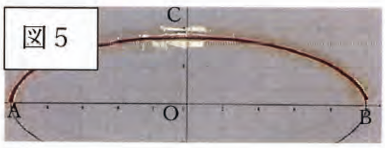


図6

6. 誤差を小さくするために CO の長さを短くし、CO＝3.3cm として式を修正します。
7. 先程と同様に、糸を手作業で貼りつけ、誤差を計測します。
8. 7で生じた誤差がなくなるように式を修正し直します。それをプリントしたものが図7です。
9. 誤差が1mm 未満になるまで、この操作を繰り返します。

数回の修正により、図8のように誤差が1mm 未満になるような楕円の方程式を探すことができました。この右端を拡大したものが図9です。

図7

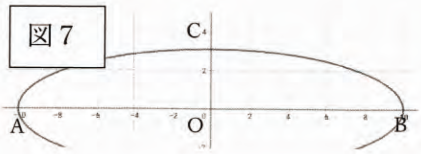


図8

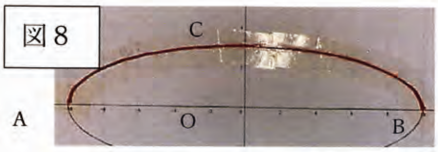
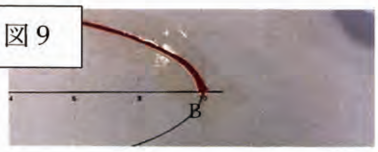
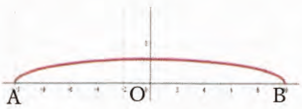


図9

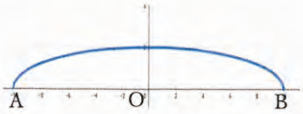


このような方法で、日本のいままでの消費税を曲線で表しました。線分 AB の長さを定価とするとき、弧 AB の長さが税込価格です。

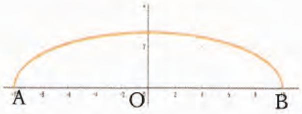
日本3%(1989 年～1997 年)



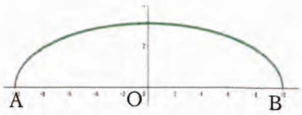
5%(1997 年～2014 年)



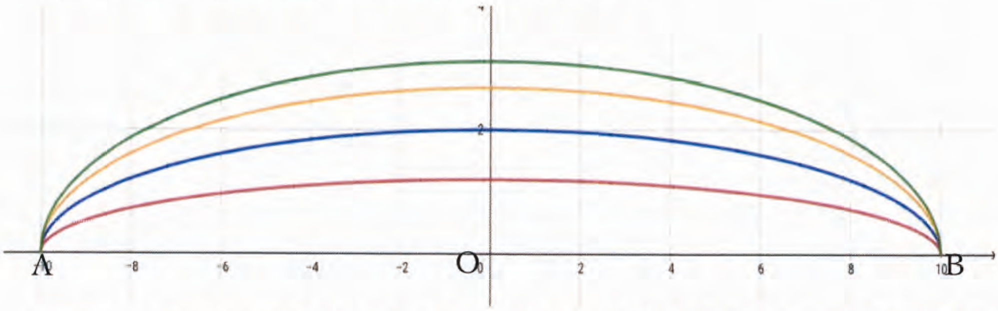
8%(2014 年～2019 年)



10%(2019 年～)



これら日本の消費税の変化を重ねるとこのようになります。

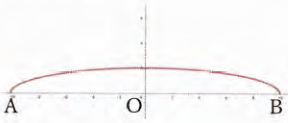


緑色→10%
黄色→8%
青色→5%
赤色→3%

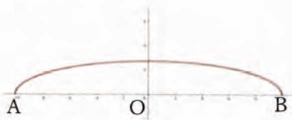
このようにして可視化することにより、今までの消費税の移り変わりやその大きさを実感することができました。線分 AB という経路に対し、緑色の弧 AB という経路はかなり遠回りしているように見えます。このようにしてみると、100円に対して10円の消費税というのはそこまで大きくないと思っていましたが、かなり大きな負担のように感じます。

同様にして、世界各国の消費税についても曲線で表しました。

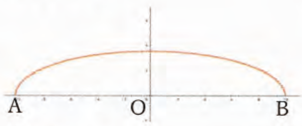
カナダ(5%)



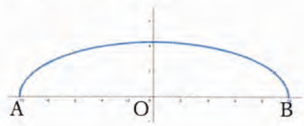
タイ(7%)



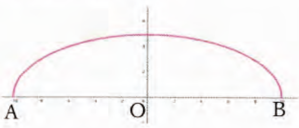
フィリピン(12%)



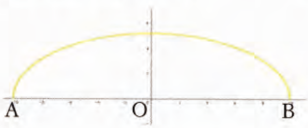
ニュージーランド(15%)



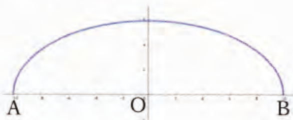
イギリス(20%)



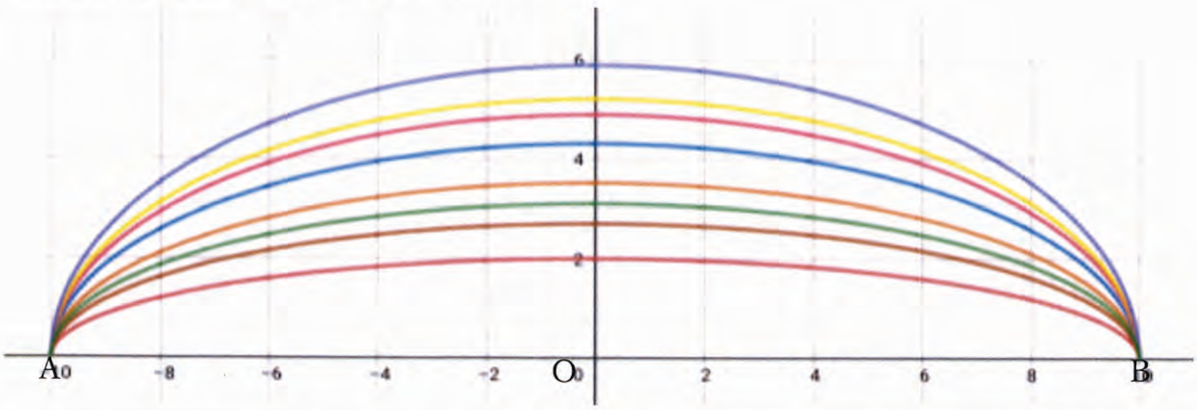
フィンランド(23%)



ハンガリー(27%)



世界の国ごとの消費税を重ねると次のようになります。

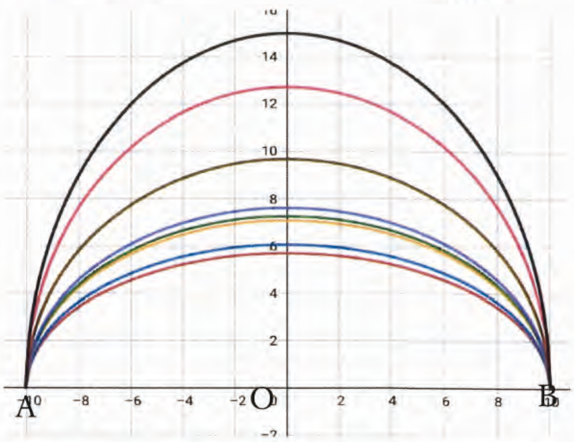


下から、赤色→カナダ(5%)、茶色→タイ(7%)、緑色→日本(10%)、オレンジ色→フィリピン(12%)
青色→ニュージーランド(15%)、ピンク色→イギリス(20%)、黄色→フィンランド(23%)、紫色→ハンガリー(27%)

このような曲線の作成により、世界各国の消費税が定価に対してどの程度であるのか、ということを半楕円を用いて視覚的に捉えることができました。こうして見ると、高いと感じていた日本の消費税もヨーロッパなどに比べると割安に感じられます。

§2.収入と手取り金額の差

図1



消費税について考察した私達は、他の税金についても同様に分かりやすく表現することができないかと考え、収入と手取り金額の差を表現することにしました。このとき、手取り金額は収入から所得税、住民税、健康保険料、年金を引いた金額とします。まず、日本で収入が300万、500万、800万、1000万、1500万、2000万、5000万、1億円の人の実際の手取り金額をそれぞれ調べました。配偶者の有無や扶養家族の人数により支払う税金が変わるため、独身者という条件で比較しました。

楕円の弧 AB の長さを収入、線分 AB の長さを手取り金額とし、A(−10, 0)、B(10, 0)、AB の中点を O とします。国税庁の2019年のデータによると年収が500万円のとき手取り金額は391万円となるので、391万円を20cm の線分 AB に対応させます。このとき、500万円は約25. 58cm となります。そこで、25. 58cm の糸を用意し、AB の両端につけます。ここからは、§1と同じ操作により収入と手取り金額の違いを曲線を用いて表しました。

収入と手取り金額の違いを重ねると、図1のようになります。

黒色→1億円
ピンク色→5000万円
茶色→2000万円
紫色→1500万円
緑色→1000万円
黄色→800万円
青色→500万円
赤色→300万円

この比較では、収入が増えるにつれて楕円は円に近づき、収入が5000万円を超えると縦長の楕円ができました。このことから、低収入の人に比べ、高収入の人はどのくらい多くの税金を負担しているのかが分かります。

年収300万円と500万円であまり差がないこと、そして、800万円と1500万円もあまり差がないことに驚きました。

感想

私たちはこの論文で、経度による時差や、緯度による重力・日照時間の違いに着目して、私たちだけのユニークな世界地図を描くことができました。世界地図の緯線や経線を双曲線に置き換えたり、地球上の緯度を楕円上で新たに設定したりすることにより、数学で学んだ知識を活用して新しい世界地図を作成することができました。

また、定価に対する消費税の大きさを楕円を用いて分かりやすく可視化することにも成功しました。このときの工夫により、今の学力では求めることができない問題に出会ったときに、諦めるのではなく、工夫を凝らすことで目標に近づくという貴重な経験をすることができました。

今回は二次曲線を用いましたが、この他にもたくさんの関数が存在するので、これからも身の回りにある様々な事柄を多種多様な関数の性質を活かして分かりやすく可視化し、表現していきたいと思います。

今回得られた経験や数学的視点を大切にして、難しく感じられがちなことを分かりやすく表現することにより、社会に貢献できるようになりたいと思います。

参考文献

・地球の概観（重力） https://www.keirinkan.com
・メルカト図法の世界地図　画像 https://jp.123rf.com
・日の出入り http://eco.mtk.nao.ac.jp/koyomi/koyomix/koyomix.html
・重力加速度は 9.8 じゃない！？ http://www.eps.sci.kyoto-u.ac.jp/research/introduction/07/index.html
・税の国際比較 https://www.nta.go.jp/taxes/kids/hatten/page13.htm
・国税庁 令和元年分 民間給与実態統計調査 https://www.nta.go.jp