

ゴールの公式 — P K 編 —

福井大学教育学部附属義務教育学校後期課程 7年 高村 樹輝

1. 研究の動機

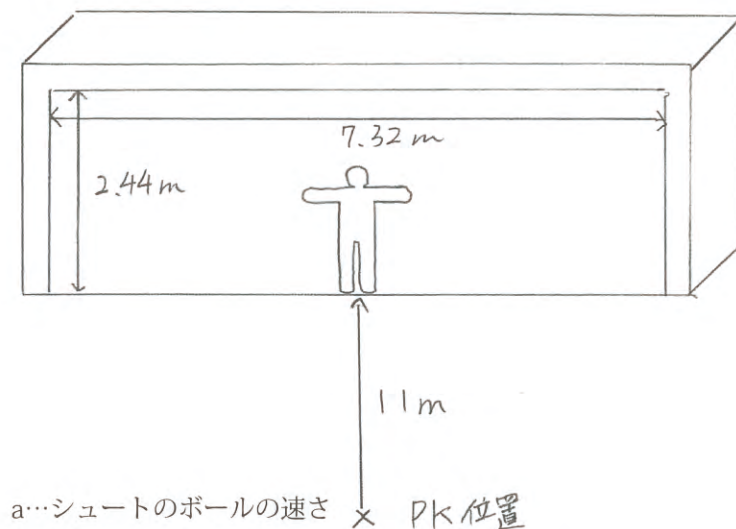
僕はサッカーをしています。サッカーは多くの点を取ったチームが勝ちなので、僕の入部しているチームが勝利するために、確実に点を取ることができないのかという疑問をもちました。そこでP Kのシーンを利用して、確実なシュートを数学を使って、探してみることにしました。

2. 研究方法

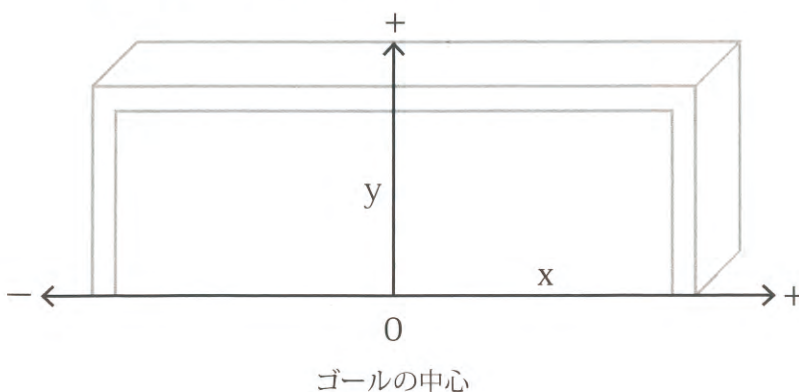
- (1) シュートコースまでの距離を計算する。
- (2) (1) の距離をだす関数の式をつくる。
- (3) ボールの飛行時間を計測する。
- (4) キーパーの守備範囲を求める。
- (5) (1) ~ (4) でわかったことをもとに、点数が入る場合の状態を式化する。
- (6) 実際に、自分と元チームメイトのデータを入力して、ゴールの公式が正しいことを証明する。

3. 研究の際の条件

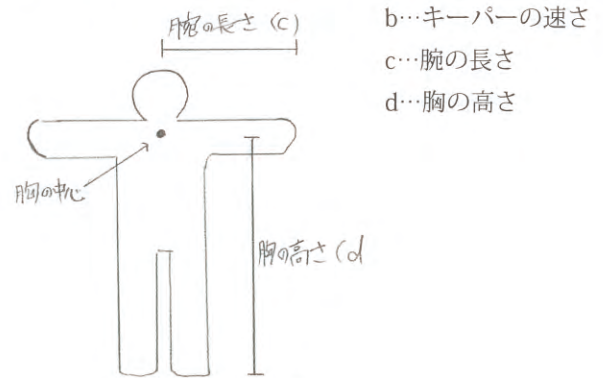
- (1) ゴールは11人制のサイズとする。



- (2) シュートコースの表し方



- (3) キーパーの体格



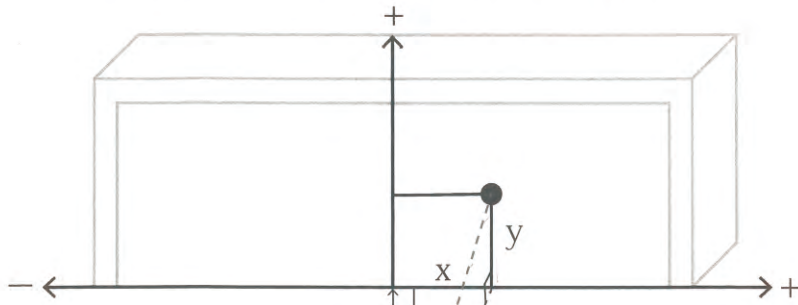
- (4) その他条件

- ボールは空気の抵抗を受けず、減速しない。
- ボールの直径は 0.22m で中心をける。
- キーパーはゴールの中心に立つ。
- キーパーはミスをしない。
- キーパーの縦横への移動速度は同じとし、減速しない。
- キーパーの手にボールの中心が触れている時に無得点とする。



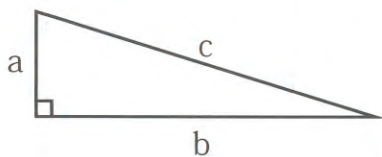
4. 研究結果

シュートコースまでの距離をだす関数の式



ボールの半径
0.11m  シュート位置

直角三角形の最も長い辺 c は



$$c = \sqrt{a^2 + b^2} \text{ で表せる}$$



よって $\sqrt{(\sqrt{11^2 + x^2})^2 + (y - 0.11)^2}$ がシュートコースまでの距離となる。

ボールの飛行時間は 時間 = 距離 ÷ ボールの速さ (a) なので

$$\frac{\sqrt{(\sqrt{11^2 + x^2})^2 + (y - 0.11)^2}}{a}$$

が、ボールの飛行時間となる。

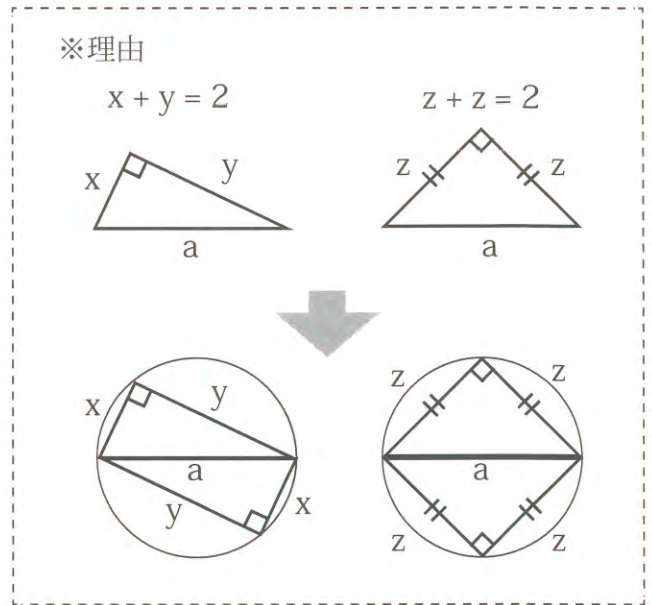


ボールの飛行時間 $\frac{\sqrt{(\sqrt{11^2 + x^2})^2 + (y - 0.11)^2}}{a}$ の間にキーパーが移動できる距離は

移動できる距離 = ボールの飛行時間 × キーパーの速さ (b) なので

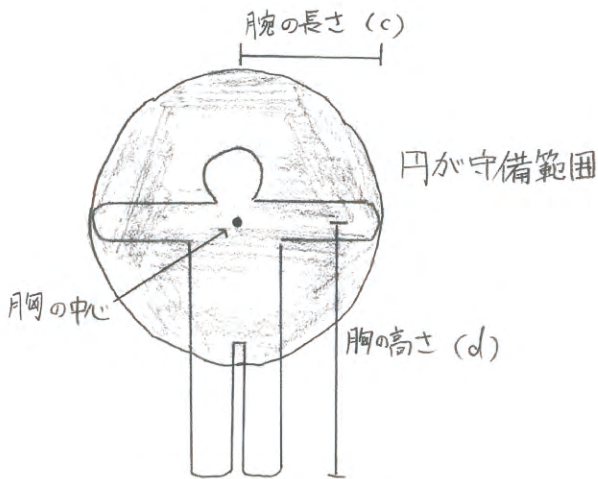
$$b \frac{\sqrt{(\sqrt{11^2 + x^2})^2 + (y - 0.11)^2}}{a}$$

が、ボールの飛行時間内にキーパーの胸の位置 (d) が移動できる距離となる。



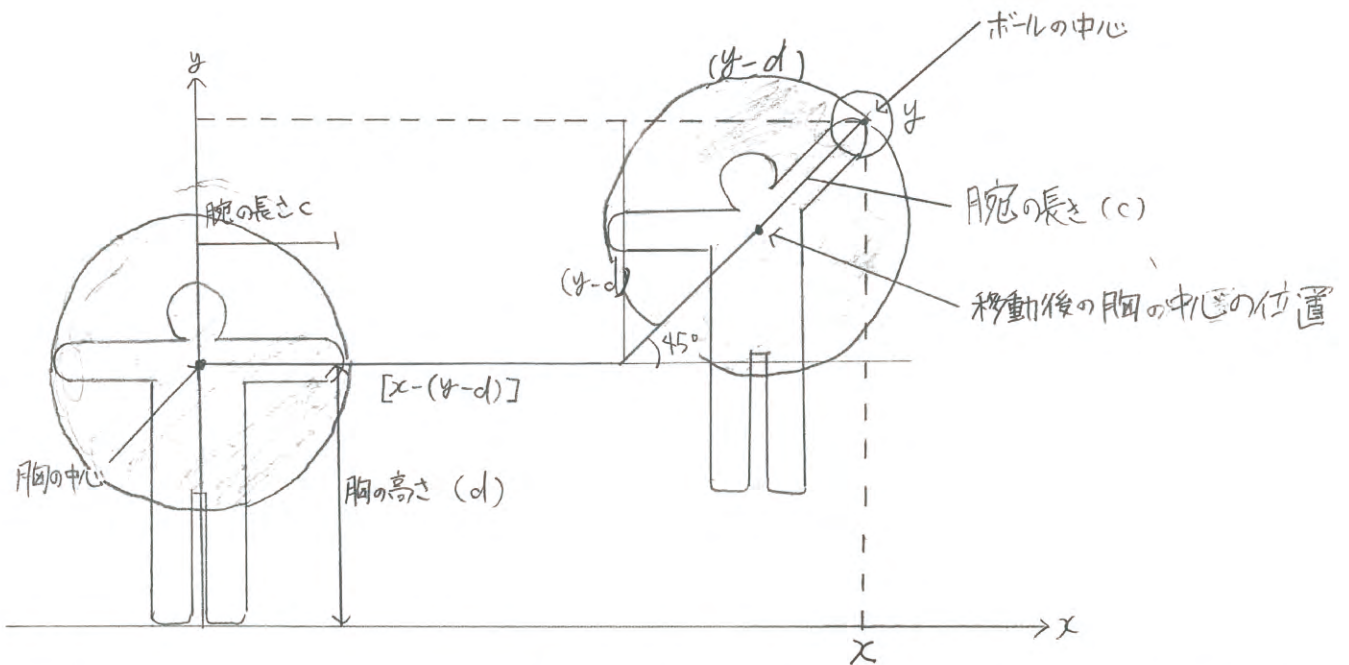
4. 研究結果

次にキーパーの守備範囲を考えると、キーパーの守備範囲は胸の位置 (d) から手の長さ (c) を中心に描いた円となる。



(y の高さが $y \geq d$ である場合)

キーパーはボールに最短で到達するために、x 方向に横移動してから、ボールの中心に向かって、 45° の角度でジャンプすると仮定する。



ボールを止めるためには、胸の中心がボールの中心から腕の長さ (c) を引いた位置に移動している必要がある為、

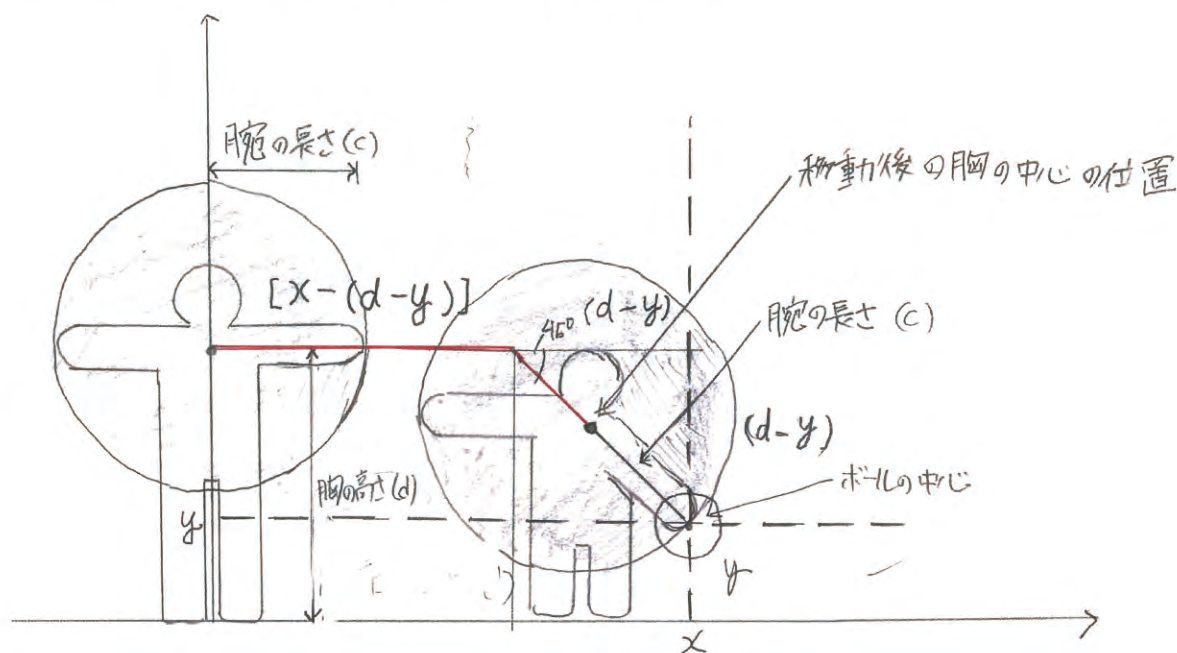
y の高さが $y \geq d$ である場合のボールを止める為の胸の中心の移動距離は

$$\sqrt{(y-d)^2 + (y-d)^2} - c + [x - (y-d)] \text{ となる。}$$

4. 研究結果

(yの高さが $y < d$ である場合)

キーパーはボールに最短で到達するために、x方向に横移動してから、ボールの中心に向かって、45°の角度でかがんで手を伸ばすと仮定する。



ボールを止めるためには、胸の中心がボールの中心から腕の長さ (c) を引いた位置に移動している必要がある為、

yの高さが $y < d$ である場合のボールを止める為の胸の中心の移動距離は

$$\sqrt{(d-y)^2 + (d-y)^2} - c + [x - (d-y)] \text{ となる。}$$

よって、完成したゴールの公式は

$y \geq d$ である場合

$$b \frac{\sqrt{(\sqrt{11^2 + x^2})^2 + (y - 0.11)^2}}{a} < \sqrt{(y-d)^2 + (y-d)^2} - c + [x - (y-d)]$$

$y < d$ である場合

$$b \frac{\sqrt{(\sqrt{11^2 + x^2})^2 + (y - 0.11)^2}}{a} < \sqrt{(d-y)^2 + (d-y)^2} - c + [x - (d-y)]$$

(シュート到達までに胸の位置が移動できる距離)

(ボールを止める為に必要な胸の位置の移動距離)

となる。

この公式に当てはまる場合にゴールが決まるということになる。

ただし、ゴールの枠内に入れる必要がある為、ボールの半径を除くと x は 3.55m 以内、y は 2.33m 以内である必要がある。

5. 考察

この公式から、ゴールキーパーのデータと自分のデータを知っていれば、PKでは確実に点がとれるはず。さらに面積で考えると、比例などの関係になるのではないかと思ったので、実際に自分のデータと元チームメイトの手鹿くんのデータで考えてみます。

・自分のデータ

蹴ったボールが11mの距離を進む時間を測定

※5回蹴った平均にて算出

1回目	2回目	3回目	4回目	5回目
0.48 秒	0.50 秒	0.40 秒	0.46 秒	0.48 秒



平均 0.464 秒
a…シュートのボールの速さ
23.70m/秒

・ゴールキーパーのデータ (手鹿くん13才)

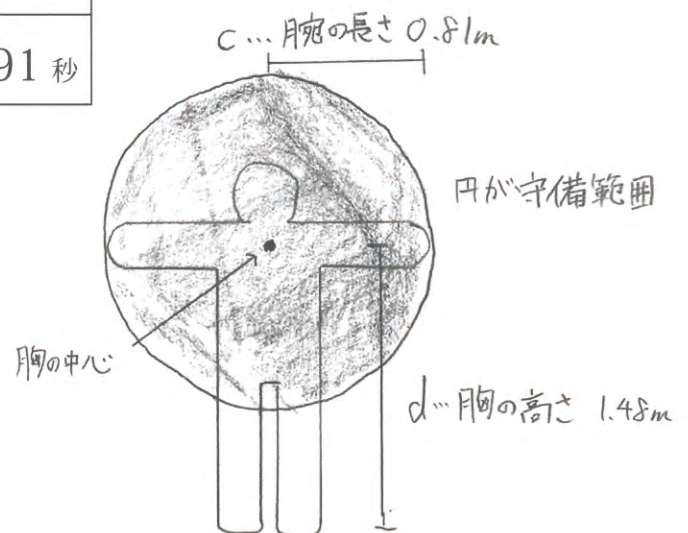
ゴールの中心からゴールポストまでの距離 (3.66m) を横移動で進む時間を測定

※5回実施した平均にて算出

1回目	2回目	3回目	4回目	5回目
1.05 秒	1.03 秒	0.99 秒	0.90 秒	0.91 秒



平均 0.976 秒
b…キーパーの速さ
3.75m/秒



よって各文字が表す数は

a=23.70 m/秒 b=3.75 m/秒 c=0.81m d=1.48m となります。

5. 考察

次にボールを蹴る高さ y を 1.48m としたとき、ゴールが決まる x の距離を 0.5m ごとに入力して、ゴールがきまる x の最小値を考えます。

(シュート到達までに胸の位置が移動できる距離 = e とする)

$$e = 3.75 \frac{\sqrt{(\sqrt{11^2 + x^2})^2 + 1.37^2}}{23.70}$$

(ボールを止める為に必要な胸の位置の移動距離 = f とする)

$$f = \sqrt{(1.48 - 1.48)^2 + (1.48 - 1.48)^2} - 0.81 + [x - (1.48 - 1.48)]$$



$y = 1.48$ (小数点 3 以下は切り捨てにて計算)

x	0.0m	0.5m	1.0m	1.5m	2.0m	2.5m	2.62m	3.0m
e	1.753	1.755	1.760	1.769	1.782	1.797	1.802	1.816
f	-0.81	-0.31	0.19	0.69	1.19	1.69	1.81	2.19
ゴール成功	×	×	×	×	×	×	○	○

次にボールを蹴る高さ y を最小の 0.11m として、同様にゴールがきまる x の最小値を考えます。

$y = 0.11$ (小数点 3 以下は切り捨てにて計算)

x	0.0m	0.5m	1.0m	1.5m	2.0m	2.20m	2.5m	3.0m
e	1.756	1.742	1.747	1.756	1.768	1.774	1.784	1.803
f	-0.243	0.257	0.757	1.257	1.757	1.777	2.257	2.757
ゴール成功	×	×	×	×	×	○	○	○

5. 考察

最後にボールを蹴る高さ y を最大の 2.33m として、同様にゴールがきまる x の最小値を考えます。

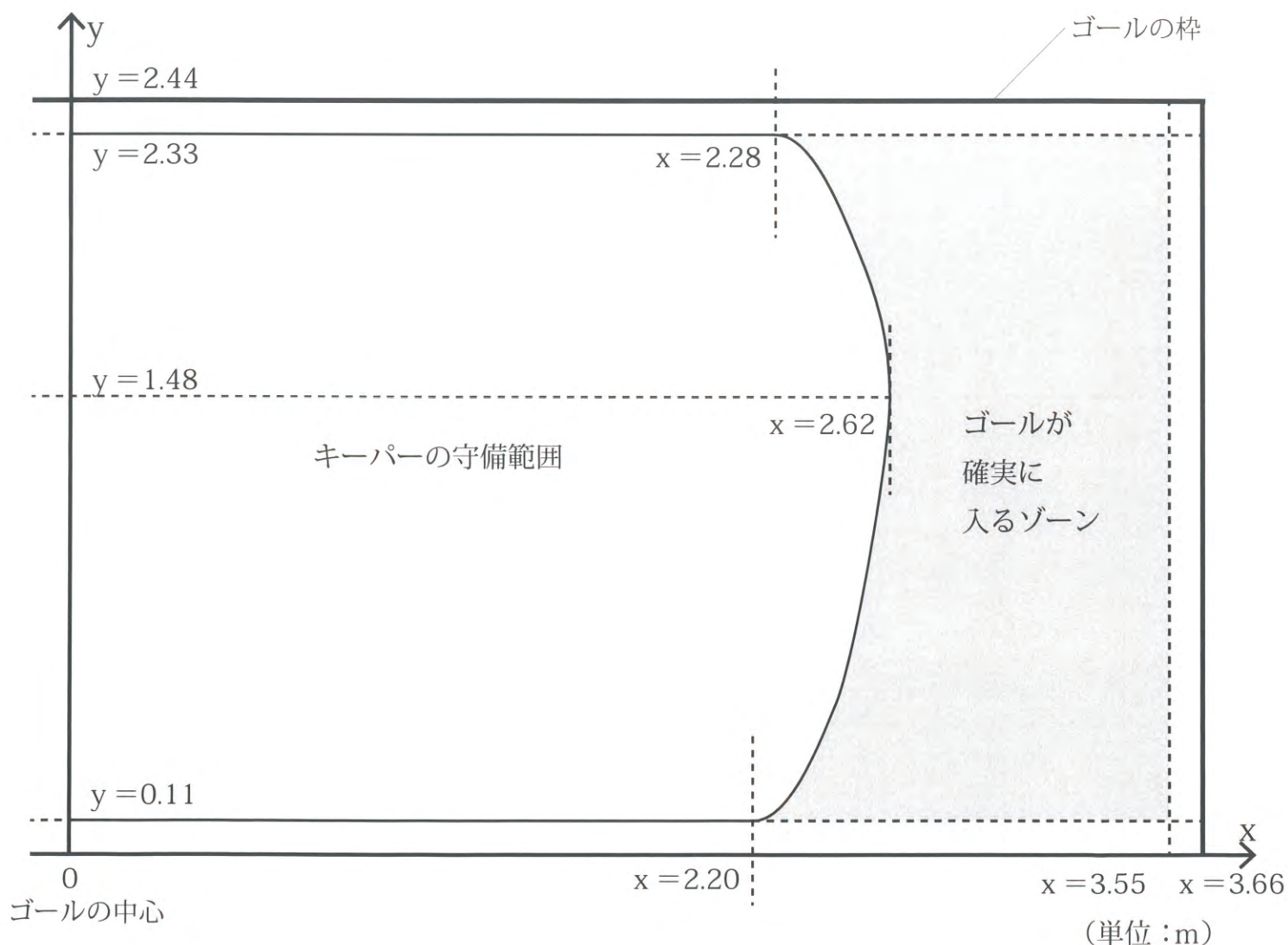
$y=2.33$ (小数点 3 以下は切り捨てにて計算)

x	0.0m	0.5m	1.0m	1.5m	2.0m	2.28m	2.5m	3.0m
e	1.775	1.777	1.782	1.791	1.803	1.811	1.818	1.837
f	-0.458	0.042	0.542	1.042	1.542	1.822	2.042	2.542
ゴール成功	×	×	×	×	×	○	○	○

この時、ゴールが確実に入るゾーンは次のようになります。

キーパーの守備範囲は、中心から手を回した範囲になるから、このような楕円になると予想しました。

ゴールの中心から左右対称になるため、右半分のみ記載しています。



6. 感想

今回の数学自由研究で僕は、ゴールの公式を作りましたが、特に立式の段階で【数学って楽しい】という気持ちを強く感じました。途中、難しすぎたり、辻褄が合わなかったり、後から条件が抜けていることに気付いたり、大変だったことがたくさんでできましたが、解決していくたびに数字の無限大のすごさに感動しました。

今回は pk と場所を指定したり直線でボールが進むなど色々と条件を指定しましたが、実際には、あり得ないこともあったので、次回は蹴る場所や、ボールの軌道、回転も計算に入れた、究極の公式を作りたいです。この究極の公式を作れば、附属中のサッカー部も全国大会に出場できるはず、そして僕は得点王になれるはずです。

これからも、数学の世界をたのしみたいです。