日本の理数科教育をサポートする

Rimse

Research Institute for Mathematics and Science Education

No. 31
June
2021

特集 数学と産業 Ⅱ

Rimse (財)理数教育研究所

Contents

巻頭言

Kantougen

京都大学大学院 教育学研究科 教授
明和 政子 / みょうわ まさこ

京都大学大学院教育学研究科博士後期課程修了。博士（教育学）。文部科学省科学技術・学術審議会委員，日本学術会議連携会員。ヒトとヒト以外の霊長類を胎児期から比較し，ヒト特有の脳と心の発達およびその生物学的基盤を明らかにする「比較認知発達科学」という分野を開拓した。単著に『まねが育むヒトの心』（岩波書店），『ヒトの発達の謎を解く―胎児期から人類の未来まで』（筑摩書房）など多数。2016 年放送の NHK スペシャル 2 編『ママたちが非常事態!?　～最新科学で迫るニッポンの子育て 1・2 ～』，2017 年放送の『ニッポンの家族が非常事態!?　～第 1 集 わが子がキレる本当のワケ～』などの監修・出演など，現代社会の子育てに関する様々な問題を，最新の科学的知見から理解する活動にも力を注いでいる。

子どもにとっての「新しい生活様式」を考える

新型コロナウイルス感染症の世界的大流行から既に一年以上が経とうとしています。コロナ禍で求められてきた「新たな生活様式」は，長期化の様相を呈しています。感染症の拡大を最小限に食い止めるために，他者と身体的距離をとる，密を避ける，マスクを着用するなどの実践は，今後も長期戦で求められていくでしょう。また，コロナ禍で，オンライン（仮想空間）でのコミュニケーションが私たちの日常の一部となったことも大きな変化でした。

感染症の拡大を最小限に食い止めるために，新しい生活様式の実践は大切です。仮想空間でのコミュニケーションには，便利な面がたくさんあることを知りました。しかし，生物としてのヒトの脳の発達，特に，環境の影響を強く受けながら脳を発達させていく時期の子どもたちにとっては，話は別です。これほどコロナ禍が長期化すると，生物としてのヒトの脳と心の発達を研究している者として危惧を感じられずにはいられません。ヒトは，他者との「密・接触」を基本とする社会的環境に適応しながら，長い時間をかけて進化してきた生物だからです。個体は，社会的環境との相互作用を繰り返しながら，種特有の脳と心を発達させていきます。その過程において重要となるのは，以下の３点です。(1) ヒトを含む哺乳類動物は，他個体との身体接触なしには生存できない，(2) 特に，発達初期の脳の発達には他個体との身体接触が不可欠である，(3) 発達初期の経験は，その後の脳と心の発達に直接的に影響する。現行の新しい生活様式のもと，私たちはヒトの育ちの根幹を守る生活との両立をどのように果たしていくことができるでしょうか。

コロナ禍で育つ子どもたちの脳と心の発達について懸念していることのひとつは，マスクを着用する他者との日常が脳と心の発達に与える影響です。脳が発達する過程では，環境の影響を特に受けやすい，ある特別の時期（脳発達の感受性期）があります。例えば，大脳皮質にある視覚野や聴覚野は，比較的早期に成熟する脳部位です。特に，生後数か月頃から，環境の影響を大きく受けて変化します。そして，就学を迎える頃までに成熟します。大きくなってから第二外国語を身に付けるのが難しくなるのは，聴覚野の発達の感受性期を過ぎてしまったから（環境の影響を受けにくくなるから）です。この時期までに，子どもたちは，相手の「動く」表情を豊かに目にしながら脳と心を発達させていきます。こうした経験を積み重ねることで，多様な表情を区別する能力や，その背後にある感情を理解する能力を獲得していきます。また，誰かが話している場面では，その人の目だけでなく，音声が発せられる口の動きにも注意を向けます。これらの視聴覚情報を統合し，自らの身体を使って模倣しながら言語を身に付けていくのです。マスクの着用が日常となった今，目の前の他者の表情は覆い隠され，子どもたちは表情を経験する機会を急激に減らしています。特に，脳発達の感受性期にある子どもたちの脳と心の発達に，何かしらの影響が生じるリスクを否定することはできません。マスクをしていても目でコミュニケーションはできるから大丈夫，と考えてしまうのは，まったく大人目線の解釈でしかありません。

仮想空間でのコミュニケーションが主流となっていく日常にも懸念を抱いています。仮想空間でのコミュニケーション経験は，現実空間での身体を介したやりとりとは全く異なるものだからです。現実空間では，他者との身体接触をともなうコミュニケーションによって，セロトニンやドーパミン，オキシトシンなどの神経伝達物質が脳内から放出されます。それは，身体内部に「心地よい感覚」を生じさせます。他者とのコミュニケーションに心地よさを感じる脳と心が，他者と身体接触を経験することで発達していくのです。他方，仮想空間でのやりとりは視聴覚の情報に偏っています。これらは，光や音などの強い刺激はもたらしますが，身体内部に心地よさを感じさせるものではありません。

コロナ禍が長期戦となる今，大人にとってだけではなく，「子どもたちにとって必要な」新たな生活様式とは何かを考える必要があります。そして，進化の過程で際立った前頭前野を獲得してきたヒトでは，それが可能なのです。私たちは，自分が見て感じる世界，「今・ここ」という時空間の制約を超えて想像する能力をもっています。これは，次世代の人類に思いをめぐらすことにもつながります。地球規模の問題が深刻化するなか，持続的な世界を維持・発展するためにグローバルな課題の解決が目指されています。多様な価値観，立場からひとつの解決策を見出すことは決して容易ではありません。しかし，子どもにとっての新しい生活様式を考えてみることは，多様性を尊重し，受容する心の働きでもあります。コロナ禍でのこの困難を，人類未来への好機として生かす経験とすることが必要です。❖

特集

数学と産業 II

I 位相的データ解析の現在

岡山大学 サイバーフィジカル情報応用研究コア 教授
大林 一平 / おおばやし いっぺい

京都大学理学研究科数学教室にて博士を取得後，京都大学にて研究員として力学系の応用に関する研究に従事，その後，東北大学 AIMR に異動して位相的データ解析の理論，ソフトウェア開発，材料科学への応用といった研究に従事。2018 年からは理研 AIP の研究員として引き続き位相的データ解析の研究を推進。2021 年 4 月から現職。

1 ◆ はじめに

ここで紹介するのは「位相的データ解析（Topological Data Analysis，TDA）」という数学のトポロジーを利用したデータ解析手法の総称である。ある特定の手法ではなくてさまざまな手法の総称で，パーシステントホモロジー（Persistent Homology，PH）やマッパーといった手法がその中でも特に有力な手法である。

本稿では，数学に興味があるがトポロジーにはそれほど詳しくないという人を想定して，位相的データ解析について解説する。特に筆者が強い興味を持っているパーシステントホモロジーを中心に解説する。数学的なアイデアから応用面まで解説しよう。

1.1 ◆ トポロジーのアイデア

まずはトポロジーのアイデアについて簡単に説明しよう。トポロジーの説明には色々あり「連続変形で不変な性質を調べる数学」「形のつながり具合を調べる数学」「孔，リングや空洞を数える数学」などいろいろ言える。例えば図 1 のような 4 つの図を考えよう。すると (a) と (b) の組は (c)，(d) よりも共通点があるように見える。実際 (a) と (b) は連結で孔の個数が同じである。(c) は孔の個数は同じだが 2 つに分かれている所が違い，(d) とは孔の個数が違う。これを別の視点から見ると，(a) を粘土細工のように徐々に変形すると (b) にまで変形できるが，(c) や (d) にしようとすると不連続的な変形（切断や孔を開けるなど）が必要である。こういうことを指して「形のつながり具合を調べる数学」と言っているわけである。

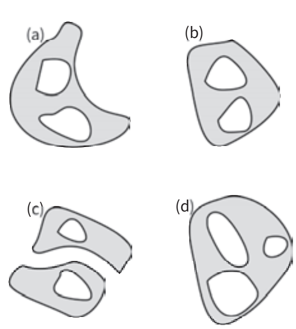


図 1　トポロジーのアイデア

1.2 ◆ ネットワーク構造

ではこのトポロジーに注目したデータというのがどういうのかというと，古典的にはネットワークやグラフと呼ばれるものがある。抽象的には図 2 のような丸（頂点と呼ぶ）を線（辺と呼ぶ）で結んだ構造である。例えばコミュニティを分析するための人間関係を表現するためにこういうデータが使われる。人間が頂点でその間のコミュニケーションが辺である。会話のデータやオンラインコミュニケーションのデータ（LINE など）があって，ある 1 ヶ月間に会話があった人同士を線で結ぶとこういうネットワークができる。この場合会話の内容などは無視してつながりだけに注目しているわけである。こうして得られたネットワークを解析する，というのはそれなりに長い歴史のある方法論である。例えばこの構造からつながりの強いグループを抽出する手法などが開発されている。

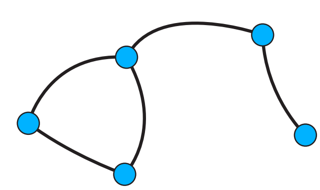


図 2　ネットワーク，グラフ

ネットワークによるデータ解析はこのように丸と線でできた「形のつながり具合」を解析するわけである。TDA はある意味でネットワーク解析の発展型で，より多様な構造を数学のトポロジー分野で培われてきたアイデアを援用して解析する方法論である。

1.3 ◆ パーシステントホモロジー(PH)

ここでは TDA のツールの中でも特に重要な PH について解説していこう。PH は 2002 年の Edelsbrunner らの論文[*1]で提案されたアイデアで，トポロジー分野の特にホモロジーという概念を利用する。Edelsbrunner らの論文の後にも数学的定式化や数学的性質，アルゴリズム，といった理論面からソフトウェアの開発，そして各種の応用までこの 20 年で急速に発展しつつある。

筆者の意見としては，トポロジーをデータ解析に使う利点として以下の 2 つが挙げられる : (1) 形の詳細の情報を捨て，つながりだけを見ることでよりデータの本質的な部分を抽出できる (2) 平行移動や回転で不変で，ノイズに強い。トポロジーは「孔や空洞を数える数学」なので，例えば触媒や消臭剤で使われる多孔質の解析などに利用できる可能性がある。

一方，トポロジーをそのままデータ解析に使うには情報量を減らし過ぎるという欠点もある。トポロジーは孔や空洞の個数は数えられるがその形や大きさの情報を捨ててしまう。それは図 1 を見てもわかるだろう。一方で多孔質の解析の例など考えても孔の大きさなどの情報は是非欲しい所である。こういった情報を捨ててしまうことはある意味トポロジーの本質的な部分なので，何らかの工夫が必要である。この問題を「フィルトレーション」という構造を用いて解決したのが PH である。

ここでは例として図 3 の (a) のような点集合データを考えよう。トポロジーを使うためにはデータの「繋(つな)がり」が必要であるが，このデータは全部ばらばらである。しかし遠目に見ると X と Y の 2 つの孔があるように見える。そこで (b) のようにこのデータを膨らませてやることでつながりを作りだす（ここでは各点を半径 r の円に置き換えている）。すると実際に孔があることがわかる。ホモロジーを使うとこの孔の情報を取り出すことができる。

ここで問題になるのが，どの程度膨らませるかである。(b)，(c)，(d)，(e) は膨らます程度（つまり半径 r）を変えた図である。r を大きくすると，孔の個数が変わってしまっているのがわかるだろう。この問題を解決するのが PH である。膨らます程度を (b), (c), (d), (e) と徐々に変えていくことによって孔が発生消滅するプロセスを見出すことができる。このプロセスを観察すると，孔 X は (b) で発生して (e) で消滅する，孔 Y は (c) で発生して (d) で消滅する，ということがわかる。それぞれの孔を発生と消滅をそのタイミングで特徴付けることが PH の理論の肝である。このタイミングにおける半径パラメータを見ることでそれぞれの孔の大きさや点の分布密度の情報がわかる。プロセスを考えることで異なるスケールのトポロジーの情報を統合的に取り扱うことが可能となるのである。

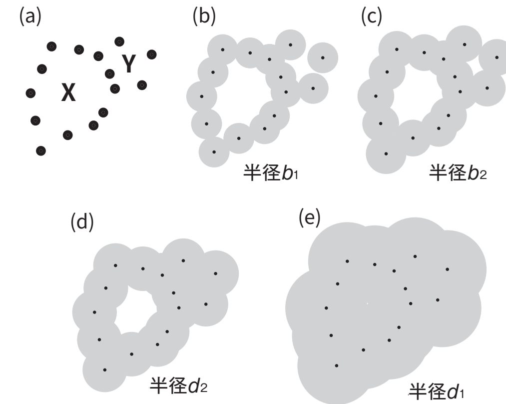


図３　半径を変えると孔の個数が変わる

実際にこのデータを可視化するときには，それぞれの孔の発生半径と消滅半径を X，Y の値とした散布図やヒストグラムで表現する。これはパーシステント図（PD）と呼ばれる（図 4）。この図はデータの形の情報をうまく縮約していると期待され，この図をさらに調べることでデータの形の特徴を調べていくこととなる。

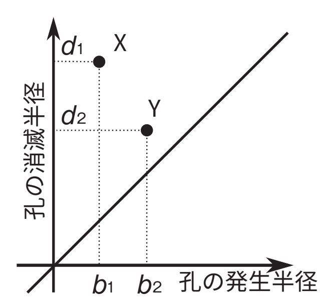


図４　パーシステント図

ここでは入力データとして点集合データを考えたが，それ以外のデータでも PH は利用可能である。画像（二値画像，グレイスケール画像）やある種のグラフ構造などに適用可能である。点集合データは空間データの解析に利用される。何らかの方法で得られた原子配置の情報を点集合とみなして解

析するというのが典型的な利用法である。画像は何次元のデータにも利用可能であるが，3 次元データ (ボクセルデータ) などはさまざまな計測（MRI や CT など）で得られ，さらにデータの大きさゆえに解析が大変なため PH による解析が有効である。グラフ構造はウイルスの遺伝的進化の解析などで利用されている。遺伝子間の類似性をグラフの辺にのせることで PH による解析を行っている。

PH の一つの利点はホモロジーという数学に基づいていることで，これによりさまざまな性質を数学的に理論保証をすることが可能となる。特に重要なのが (1) PH の基本定理，もしくは構造定理と呼ばれる定理 [*2] と (2) PH の安定性定理と呼ばれる定理 [*3] である。

一つ目の定理は原理的にはどんなデータからでも PD が計算できることと，そして同じデータからは同じ結果が得られることを数学的に保証してくれる。言いかえると，孔の発生と消滅の対応付けが一通りに決まるということである。これは当然のことのようにも思われるが，解析手法に乱数を使うような方法では保証できない性質である。例えばよく使われるデータ解析法の一つであるクラスタリングでは，同じ入力データでも出力が異なる事態がしばしば生じる。二つ目の定理は入力データに対するノイズの出力の PD への影響範囲を述べた定理で，PH 解析が得意とするノイズ，不得意とするノイズの特徴などがこの定理からわかる。このような数学的保証が可能なのは理論研究が先行してきた PH の利点であると言える。

1.4 ◆ PHの応用事例

PH は既にさまざまな分野で応用されている。生命科学分野ではウイルスの遺伝的進化の解析やタンパク質の立体構造解析，材料科学ではガラスの原子配置や粉体の空間分布解析，またセグメンテーション処理のような画像処理などへの応用も提案されている。

本稿では筆者の最新の仕事である，金属ガラスの原子配置構造の解析に関する研究成果を紹介する [*4]。この研究は PH に統計的手法を組合せ，さらに逆解析と我々が呼んでいる手法を活用することでデータの形に関する深い解析を実現している。筆者としても完成度の高いと感じる，お気に入りの結果である。

まずは研究の問題意識について解説しよう。ここで考えるのは「ガラス」や「アモルファス」と呼ばれる物質である。ガラスというと通常は窓にはめこんである透明な物質のことだが，ここでいうガラスはもっと一般的な物を考えている。アモルファスというのは実は定義が困難な物質であるのだが，結晶と対比的な構造を持つ物質というのが無難な定義だろう。結晶は明確な繰り返し構造を持つ固体のことである。化学の教科書に出てきた塩化ナトリウムの構造（正方形の頂点に塩素原子とナトリウム原子が交互に並んでいる構造）などが代表的な構造である。一方，アモルファスは周期的な構造を持たない，乱れた構造を持つ固体である。アモルファスの原子配置を見ると液体とよく似た構造をしている。実はアモルファスが固体かどうなのかも現在論争の的（あの窓ガラスも液体の仲間だ，という意見も強い）である，説明しづらい物質である。

ここで調べたい問題は金属ガラスと呼ばれるガラスの原子配置の乱雑さの具合である。液体を冷却すると通常は結晶構造になる（そのほうが安定であるため）のだが，急速な冷却速度だと液体の乱雑な構造を残したまま固体となる。この乱雑な構造がアモルファスの特徴であり，これを特徴付けたいというのがこの研究の目標である。こういった特徴付けのためには何らかの比較対象が必要であるので，ここでは冷却速度を変えたときの構造変化を捉えることを直接的な目標とする。冷却速度をゆっくりにしていくとアモルファスであってもより結晶に近付く，つまり秩序性が高まると信じられており，この秩序性の具体的な内容を知りたいというのがここでの問題である。

アモルファスのような乱雑な原子配置を計測することは現状では不可能なので，原子配置は数値計算（分子動力学シミュレーションと呼ばれる）によって構築している。数値計算内で冷却速度を変えるのはパラメータを変えるだけで容易に実行できる。その原子配置を点集合データとみなし計算した PD に統計的手法を適用することで，冷却速度と相関の大きい特徴的な形を抽出する。PD によって形の情報を定量化することで統計的な取扱いが可能となるのである。さらにこの特徴的な形を元データにマッピングする逆解析によって冷却速度と相関のある局所的な原子配置構造を抽出した（図 5，論文 [*4] より引用）。

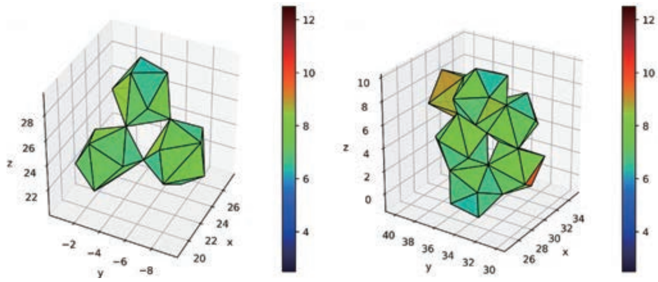


図５　冷却速度と相関のある局所的な原子配列構造

左のほうが冷却速度が遅い場合により典型的に見られる構造で，右のほうが冷却速度が速い場合により典型的に見られる構造である。両方とも 20 面体的な構造がいくつか連なった構造をしているが，右のほうが 20 面体的構造の個数が大きい。この傾向は統計的にも確かめられた。

この結果と「乱雑さ」の関係を直感的にしよう。左のように 20 面体的構造が 3 個くっついた構造と右のように 6，7 個くっついた構造を考えると，その構造の多様性には大きな差がある。この多様性の差が「乱雑さ」の大小と関係があると示唆される。冷却速度が遅いほうが乱雑さが小さいという仮説にも整合している。実はこの局所的構造はよく知られた実験結果（ガラスの回折実験）とも整合性がある。この実験はガラスの中間的秩序構造と関連があると考えられており，そういう意味でもこの PH による解析結果はガラスの原子レベルの構造の謎に迫る結果と言えるだろう。

1.5 ◆ ソフトウェア

ここで筆者が中心になって開発している PH によるデータ解析ソフトウェア HomCloud（URL: https://homcloud.dev/）について紹介 (宣伝) させてもらおう。PH によるデータ解析ソフトウェアは世界中で開発され，10 以上ある。それぞれ得意分野があるが，HomCloud は材料科学を中心とした応用にフォーカスして開発が進められている。HomCloud の機能の中でも逆解析（PD の点に対応する構造を元データにマッピングする機能）は特に他のソフトウェアにない特徴的な機能である。現在誰でも自由にダウンロードして利用可能である。日本語の解説が多いのも利点と言える。

1.6 ◆ マッパー

これまで PH について紹介してきたが，TDA の他の代表的手法であるマッパーについても簡単に紹介したい。

マッパー [*5] はデータからグラフを構築するための手法である。背景にある数学的理論はリーブグラフという図形のトポロジカルな情報を縮約したグラフである。リーブグラフをデータ解析に輸入するための課題は PH で述べた課題と似ていて，「離散的な点の集まりからつながりの情報を取り出すにはどうすればよいか」というものである。マッパーのアイデアはフィルター関数と呼ばれる関数を経由し，クラスタリングアルゴリズムを利用することでこの問題を解決する。

マッパーは主に探索的データ解析に用いられている。探索的というのはデータの特徴が不明のときにさまざまな可視化などを行ってデータの特徴に関する仮説を探すものである。適用例としては乳癌に関する遺伝情報の特徴付け [*6] やサイバー攻撃のログ解析 [*7] などがある。図 6 は乳癌の論文 [*6] から引用した図表で，細胞の遺伝子発現データからいくつかのグループを抽出し，その間の類縁関係を取り出したものである。この種のデータ解析でよく使われるクラスター分析法では発見の難しいグループを見いだすことに成功している。

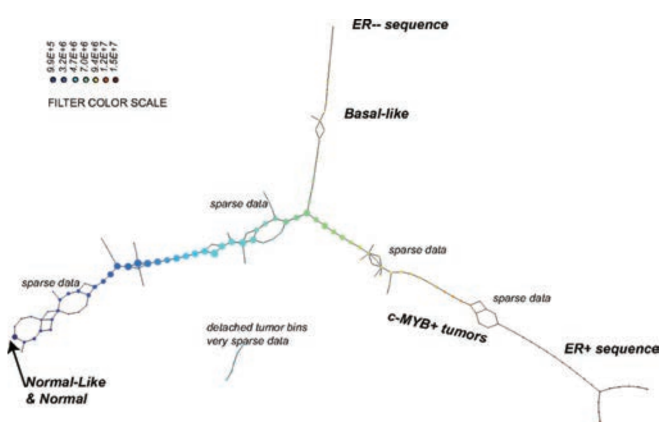


図６　リーブグラフ

2 ◆ TDAの産業界への広がり

ここまで解説したように，TDA は学術研究においては実際的なデータ解析にも活躍している。一方産業分野への適用については学術分野ほどは進んでいない。しかし産業方面へも TDA は進出しつつある。ここではいくつかの動向について紹介したい。

まずは Ayasdi [*8] という企業について紹介する。Ayasdi は企業向けの AI プラットフォーム，AI ソリューションを提供

する企業で，標準的なAI技術に加えてTDAに注力している。Ayasdiは元々アメリカのスタンフォード大学の数学者たちによって設立された企業で，現在は企業向けAI技術に関する企業グループSymphonyAIグループの一員である。Ayasdiの技術は金融データやヘルスケアのデータの解析に使われており，こういった方面にTDAの手法が活用されている。企業向けにチューニングされたTDAのプラットフォームが彼らの事業の強みとなっている。

日本においては，TDAは特に材料科学方面で注目を集めており，研究成果も増えつつある。この組み合わせに関する企業からの関心が高まりつつある。最近このTDAによる材料科学研究開発のためのコミュニティを筆者，赤木，平岡の3人を中心に設立した[*9]。このコミュニティは企業にも広く参加を呼びかけ，マテリアルTDAの発展と活用のための学びの場，相互の情報共有の場とすることを企図している。まだスタートしたばかりのコミュニティであるが，既に企業や大学から数十の会員が集まっている。このコミュニティはマテリアルTDAの普及の一つの拠点になると期待している。

3 ◆ おわりに

本稿で紹介したとおり，TDAは既に数理的な理論の段階から学術的な応用へと進んでおり，産業分野へも広がり始めている。読者の皆さんもこういった応用数学の新しい動向に興味を持ってくださると幸いである。

文献ガイド

ここではTDAをより詳しく知りたい方のための文献紹介をする。

まずは日本語の文献について紹介する。PHについては平岡氏の教科書[*10]がある。この教科書は主に数学理論の部分を丁寧に解説している。PHのソフトウェアに関しては筆者の書いた原稿[*11]がある。HomCloudの宣伝が主な内容だが，他のソフトウェアの紹介も載せてある。マッパーに関してはTDA workshopのウェブサイト[*12]からリンクされているE. G. Emerson氏による解説スライドが参考になる。

英語の文献は近年かなりの数が書かれている。N. Otterらによるサーベイ論文[*13]は理論の基礎部分，応用，ソフトウェアと幅広い内容が紹介されており，この論文を起点に調べていくとよい。

謝辞

事例で紹介した金属ガラスの研究の素晴しい結果については3名の共著者のおかげである。またこの研究事例やHomCloudの開発については以下の研究助成を受けている：
JSPS科研費 19H00834，20H05884，
JSTさきがけJPMJPR1923，JST CREST JPMJCR15D3.

参考，引用文献

*1 Edelsbrunner, H., Letscher, D., Zomorodian, A.: Topological persistence and simplification. Discrete Comput Geom 28:511-533 (2002).
*2 Zomorodian, A., Carlsson, G.: Computing persistent homology. Discrete Comput Geom 33:249-274 (2005).
*3 Cohen-Steiner, D., Edelsbrunner, H., Harer, J.: Stability of persistence diagrams. Discrete Comput Geom 37:103-120 (2007).
*4 Hirata, A., Wada, T., Obayashi, I. et al.: Structural changes during glass formation extracted by computational homology with machine learning. Commun Mater 1, 98 (2020).
*5 Singh, G., Mémoli, F., & Carlsson, G. E.: Topological methods for the analysis of high dimensional data sets and 3d object recognition. In Proceedigns of the Symposium on Point Based Graphics 07 (2007).
*6 Nicolau, M., Levine, A. J., Carlsson, G.: Topology based data analysis identifies a subgroup of breast cancers with a unique mutational profile and excellent survival. PNAS 108 (17) 7265-7270 (2011).
*7 Bihl, T. J., et. al.: Topological Data Analysis for EnhancingEmbedded Analyticsfor Enterprise Cyber Log Analysisand Forensics. In Proceedings of the 53rd Hawaii International Conference on System Sciences 2020 (2020).
*8 https://www.ayasdi.com/
*9 https://www.wpi-aimr.tohoku.ac.jp/TDA/
*10 平岡裕章 . タンパク質構造とトポロジー ―パーシステントホモロジー群入門―. (シリーズ・現象を解明する数学) 共立出版 (2013)
*11 http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~kyodo/kokyuroku/contents/pdf/2166-23.pdf
*12 https://sites.google.com/view/tda-tutorial/
*13 Otter, N., Porter, M.A., Tillmann, U. et al.: A roadmap for the computation of persistent homology. EPJ Data Sci. 6, 17 (2017).

＜訂正のお知らせ＞
前号（No.30）の特集p.2左段12行目の
「分離性の統計力学における～」は
「磁性の統計力学における～」の
誤りでした。お詫びして訂正いたします。

Ⅱ 可視化やコンピュータグラフィックスに現れる数学

九州大学　マス・フォア・インダストリ研究所 教授

落合 啓之 ／ おちあい ひろゆき

埼玉県川越市生まれ，東京大学理学部数学科卒業，同大学院理学系研究科修士課程修了。博士（数理科学）。立教大学，東京工業大学，名古屋大学を経て，2009 年 11 月より，九州大学マス・フォア・インダストリ研究所 教授。2014 年度 科学技術分野の文部科学大臣表彰科学技術賞（研究部門）を受賞。数学，特に，代数解析学，表現論，特殊関数論を研究している。それと合わせて，CG，アクチュアリ，量子情報などの隣接分野でも活動している。

1 ◆ 百聞不如一見

百聞は一見に如かず。この古代中国のことわざが端的に表しているように，言葉を尽くして説明するよりも一つの絵を見せることで伝わる情報がある。**可視化**とは，そういった特性に着目し生かし切ること，つまり，平たく言えば絵で表すことである。絵で表したい情報は，そもそも写真や絵であることもあれば，もっと抽象的な，データ・概念・関係性のようなものであることもあり，多岐にわたる。したがって，可視化の方法も目的や対象に応じてさまざまであり，そのそれぞれに，蓄積されたノウハウと深い技術が隠れている。この文章では，その中でも CG と数学を中心に関連事項を述べる。

1.1 ◆ CG

CG（コンピュータグラフィックス）で作られた画像または映像を見たことのない人はいないであろう。入道雲の絵とか，猫の歩く様子とか。では，CG の定義とは何だろうか？　CG とはデジタルの画像や動画の形式で情報を伝達する手段である。大胆に言えば，情報（つまり意味や意図）を入力とし，画像や動画を出力とするような写像が CG である。

これと似て非なるものが画像認識（CV, コンピュータビジョン）である。本誌 30 号の河原氏の記事の 1 節に登場した例で言えば，画像を見てそこに映っているのは猫だ，とか，書かれている数字が 4 だ，とか。つまり，画像を入力とし，情報（意味）を出力とするものが CV である。この立場で見ると，CG と CV はちょうど逆向きの写像の役割を果たしていることがわかる（図 1）。

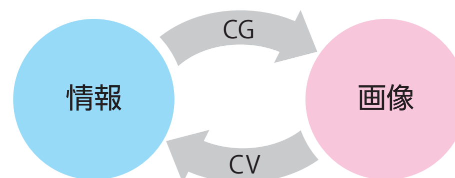


図 1　CG と CV

なお，ここでは CG と CV を相対する形で説明したが，「ポケモン GO」のように日常生活に CG が入り込んで来る場合には，CV で把握した環境に CG で作ったキャラクターを違和感なく貼り付ける（統合する）というコラボレーションが必要となる。これが AR（拡張現実）である。VR（仮想現実）は全部が CG で，MR（複合現実）は VR と AR を混ぜて，というように，混ぜ具合もさまざまな可能性があるので，これら全部を合わせて XR という名称も使われ始めている。

1.2 ◆ 順問題と逆問題

CG と CV は対象は似ているものの，方向性が異なり，問題意識にも差がある。CG は順問題，CV は逆問題といえよう。たいてい逆問題は難しい（本号の山本氏の記事参照）。したがって，CV では大量のデータを活用した統計的手法が主流である。一方，CG では，人が手作業でしてきた単純作業を機械に置き換えていく時代から，少ないデータや乏しいリソースや厳しい時間的制約の中で多彩な手段が用いられている。現在でも，建物(剛体）や雲（流体）や人や動物（生物）が一つの絵の中に入っていて，それらが異なった詳細度（LOD, level of detail）で作られているという状況はしばしばある。例えば，目の動きや顔の表情は難しく，細心に作り込んでも実写と CG の区別がついてしま

うことがある。ちなみに CG への最高の褒め言葉は「綺麗で感動する CG でしたね」ではなく,「え？　どこに CG を使っていたの?」である。建物や家具や食器は実物と CG を見分けることは難しいほどの出来栄えだが, 煙や爆発のシーン, 動物の毛や髪の毛, 瞳, 動くカーテンやスカート, 湿った雪, 蜂蜜など, 現在でも研究されている素材もまだまだ多い。これらの研究に離散微分幾何学, アフィン変換, 結合代数, ポテンシャル論, 再生核など数学を使ったアプローチも活発である。

2 ◆ 動画

2.1 ◆ 時間の離散化

ビデオカメラで撮影したものでも CG で作ったものでも, 動画にはフレームレート（fps）という数値があり, それは 24 や 30, 大きくても 120 である。例えば, 映画でよく使われる 24fps は 1 秒の動画が 24 枚の画像で構成されていることを意味する。つまり, ボールが連続的に飛んで行ったり, 水が連続的に流れたりしても, データとしては 1/24 秒おきの静止画があり, これをパラパラ漫画のように見せているのが動画である。発明以来 100 年以上変わらない形式である。人間の目にはこの程度でも動いているように見えるのである。

枚数がそう多くはないとはいえ, 1 枚 1 枚を独立に作っていくのは大変なので, コンピュータを使って作業を効率化しよう。では CG はコンピュータが自動で作ってくれるのだろうか？　残念ながら現実はそのイメージとは程遠い。アニメ, 映画やコンピュータゲームの制作会社では, たくさんのエンジニアやアーティストがディスプレイに向かって映像制作の作業をしている。映像制作には時間も人手もたくさんかかる。近年はアジア各国に進出し制作を行っている企業も増えてきていることが, テレビアニメや映画のクレジットから見てとれる。

2.2 ◆ 中割り（キーフレーム法）

漫画のような時間間隔の開いた絵の途中の絵を補ってアニメーションにする作業を中割りという。図 2 のように, 時刻 $s=0$ では a, 時刻 $s=1$ では b というデータが与えられているとしよう。これをキーフレームという。このとき, 途中の時刻 s におけるデータを作るには, 内分点の公式

$$\vec{p}=(1-s)\,\vec{a}+s\,\vec{b}$$

を思い出せばよい。この方法では, 等間隔にブレンドしたものが得られる。これを線形補間という。

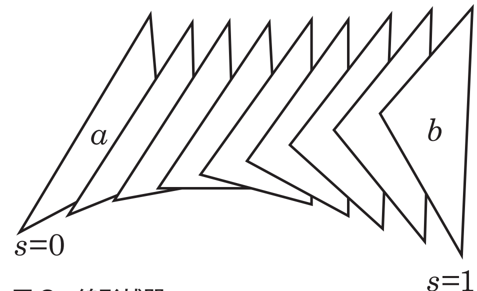


図 2　線形補間

三角形の頂点は一直線上に等間隔に並んでいる。中程の三角形はやや小さくなっている。

たいていは線形補間で事足りるのであり, それが計算機を使って実装されていることで映像制作のアーティストの単純作業が大きく減った。もちろん, 線形補間では済まない箇所や状況があり, そこをどう作るのかがアーティストやエンジニアの腕の見せ所である。例えば, 投手が投球するシーンで腕を線形補間したら, 途中で腕が短くなってしまい, 不自然である。こういった運動の補間をサポートする数学も開発利用されており, 一例を挙げれば, 四元数に対する球面線形補間がある：

$$\mathrm{slerp}(t;\vec{p},\vec{q})=\frac{\sin(1-t)\theta}{\sin\theta}\,\vec{p}+\frac{\sin t\theta}{\sin\theta}\,\vec{q},$$
$$\vec{p}\cdot\vec{q}=\cos\theta.$$

腕や脚の関節などの動きのみならず, 回転などの運動はロボット工学とも共通の数学である。複素数平面では絶対値が 1 の複素数が回転を表している。3 次元でも同じ考えを拡張し, 四元数を用いて回転を表すことができる。また一般の次元では行列が使われる。ルービックキューブで実感するように 3 次元の回転は非可換, すなわち, 操作の順序によって結果が異なる。このような複雑さを持った対象を記述するために, リー群の理論が登場する。群はガロアが方程式の根の入れ替えを表すときに発見した概念であるが, 今や幾何や解析のみならず, 理学・工学のあらゆるところに登場している。

また, 関節の位置を決めて投げる動作のポーズができたとき, それに肉をつける技法を CG ではスキニングという。解剖学を使えばこの問題がすべて解決するかというとそうなっていないところが CG の面白いところで, 運動を記述する骨（リグ）が解剖学と一致しているとは限らない, 実際の動きよりも誇張した

表現が好まれる（例えば，運動選手や戦闘シーンでの筋肉の動き），ピカチュウなどのように骨があるのかないのかわからない生物（?）も動かしたい，などの要請が制作現場から来るのである。スキニングの不具合の調整には，双対四元数や幾何代数など，より高度な数学が登場している。

2.3 ◆ 撮影

以上のようにモデリングとアニメーションが済んで，計算機の中に設定した仮想的な 3 次元空間に多種多様な物体の位置や材質などの情報が指定され，また，光源（の位置や種類）やカメラ（の視点，視線，画角）の情報も与えられたとしよう。この仮想物体を計算機内で撮影し，2 次元のデジタル画像を得るプロセスをレンダリングという（図 3）。

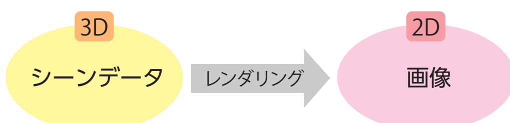


図３ レンダリング

1 枚の画像は，縦 1080，横 1920 の配列の各成分に RGB（赤緑青）の 3 色の情報をそれぞれ 256 階調で表す数値情報で与えられる。光源から出た光が，物体に衝突して反射・屈折を繰り返してカメラまで到着したものすべてを足し上げたものが画像となる。高精度の画像をなるべく短い時間で得るために，物体や光源の特性に合わせたさまざまな手法（いくつか名前だけを挙げると，レイトレーシング，ラジオシティ，フォトンマップ）が提案され使われている。この足し上げを式で表したものがレンダリング方程式である。

$$L(\vec{x},\vec{\omega}) = L_e(\vec{x},\vec{\omega}) + \int_{S^2} f(\vec{x},\vec{\omega}',\vec{\omega})L(\vec{x},\vec{\omega})\,\vec{\omega}'\cdot\vec{n}\,d\vec{\omega}'$$

この式の右辺に出てくる積分をいかに効率的に計算するかが一つのポイントとなる。考え方を 2 つだけ述べる。一つ目は区分求積法のように積分を和で近似して足し上げる方法である。足し算の計算は容易ではあるが，項の数が多ければ計算コストが上がる。一方で，ある程度たくさんの項を足し上げないともとの連続の積分との近似がよくならない。このジレンマを解決するためにモンテカルロ法を始めとする数値積分のさまざまな技法を活用し発展させて使っている。二つ目は，球面調和関数や球面ガウス関数といった特殊関数を用いる方法である。これは大雑把に言えば三角関数を発展させたものと言えるだろう。三角関数は積分に関する直交性

$$m \neq n \text{ のとき} \qquad \int_0^{2\pi} \sin m\theta \, \sin n\theta \, d\theta = 0$$

を持つ。このように物体の特性に合わせた特別によい関数たちを使うことで，多くの積分値が0 になり，積分の計算を回避することが可能である。これはフーリエ変換の理論，より一般には調和解析の成果を活用することができる。

一般には積分の厳密な計算は困難であるが，対称性がある場合には和よりも積分のほうが簡単になることもある。例えば，

$$\frac{1}{n^6}\sum_{k=1}^{n} k^5 = \frac{1}{6}\left(1+\frac{1}{n}\right)^2\left(1+\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}\right)$$

$$\int_0^a x^5\,dx = \frac{1}{6}a^6$$

を鑑賞してみよう。

2.4 ◆ 技術が社会を変える

技術は，人間の行動様式を変え，社会を変えてしまう力を秘めている。例えば，スマートフォン。今まで日常的には手紙を書いたり作文したりをしてこなかった人たちが，短いメッセージを 1 日に何通も作成し，文字でコミュニケーションを取るようになった。キーボードを覚えずとも，使いやすい UI（ユーザーインターフェース，入力支援）によって，正確に書くのが難しい漢字，例えば「推薦」といった漢字も普通に使えるようになった。

CG による映像制作でも同じことが言える。補間にしても“速い安いうまい”ツールがあればあるほど作業が捗る。そしてそれは時間の短縮やコスト削減だけでなく，質の向上に直結する。映画監督が，「カット！　主人公を追いかける煙をもっと多くして！」という指示を出したとしよう。煙のシーンは，Navier-Stokes 方程式（本誌 30 号の水藤氏の記事参照）という非線形の偏微分方程式を解くことで作られる。スタート時点での初期値を与えて煙の時間変化を追跡することは物理シミュレーションで得られる。ところが，3 秒後，5 秒後の絵コンテ通りの煙を得るのは逆問題であり，初期値を微妙に調整することで事後を合わせようとすると，NS 方程式が非線形であることも起因して数学的にも実用上もそれぞれ難しい。ここで補間のアイディアをうまく使うことで，NS 方程式の厳密解ではないものの，与えられた制約条件を満たす煙を制作する手順が開発されている[*1]。「では監督，3 日後に仕上げます」では，どちらか

の映像を選ぶことしかできないが,「15 分で作り直します」ならば,その映像を見てさらに注文をつけることができる。「数秒でできる」のであれば,映像を見ながら,「ここ,もうちょっと荒々しく」のような対話的な(interactive)微修正さえ可能である。この例でわかるように,CG の制作では,指示を出す人と作業する人が違うということがしばしば起こる。また,指示が脳内の漠然としたイメージにとどまっていて,うまく定量化・言語化されておらず,他人に伝達したりそのまま計算機に入力することが難しかったりするものへの対応も可能になる。このように,ツールの開発が制作の形態や最終製品の品質にまで影響を与えるのである。

2.5 ◆ 作業工程の管理

今までモデリング・アニメーション・レンダリングの説明をしてきたが,それ以外にも実に多様なプロセスを分担することで CG は作られる。したがって,映画の制作などでは,作業工程スケジュール,データの共有,あるいは,修正やフィードバックなどを統合的に立案管理することも必要となる。これは,パイプラインと呼ばれ,実際に,プロダクションと合同での CG の研究会で,パイプラインに関する研究発表もある。CG の要素技術から見ると一つ上の階層に属する研究であり,圏論や数理論理学・プログラミング論などに通じる高度な数学が背後に控えている。

3 ◆ 可視化の諸相

3.1 ◆ 断捨離

情報処理とは捨てる技術である。例えば,偏差値は,

$$偏差値 = 50 + 10 \times \frac{得点 - 平均値}{標準偏差}$$

という式で与えられる。試験も多様だし,答案もたくさんあるのに,それらをたった2つの数値「平均と標準偏差」で表すという大胆さがそこにある。上手に捨てるということは,本当に要るものだけを残すということを意味する。捨てると言えば,大学3年生で学習する位相幾何学の基本概念として**ホモロジー群**というものがある。閉じた鎖と呼ばれるたくさんの幾何学的な組み合わせのうち,完全な鎖と呼ばれるたくさんの組み合わせを捨て去った残りがホモロジー群である。例えると,レアメタルを含有する鉱石を,砕いて薬液をかけ,温度や圧力を変えて,体積としてはずっと多い石や不純物を取り除くことで,目的とするネオジウムを取り出すような工程である。もとの鉱石の塊を見ただけでは想像もつかないようなものを取り出せるのである。ホモロジー群の階数はベッチ数と呼ばれ,図形を表す基本的な量として重要である。そんな大切な量なので,現実のデータの解析に応用したいというニーズは高かったのだが,ホモロジー群はデータ過敏であり,ノイズに弱く適用が難しかった。この問題点を解決したのがパーシステントホモロジーである。例えば,ガラスの原子の配置から,パーシステント図(あるいはバーコード)と呼ばれる図を得ることができる。今まではデータを読み取るプロの職人技が必要であったものが,パーシステント図を見れば,誰にでもガラスとそれ以外を区別できるようになった。これを位相的データ解析(本号の大林氏の記事参照)という。議論の途中に非可換多元環の加群の直既約分解という代数学が控えている。温度を変化させることでガラスがどう変わるかを記述するには,用いている代数学の最新の定理を拡張発展させる必要があることがわかっていて,多方面から研究されている。

3.2 ◆ 科学的可視化と演出

科学的可視化(scientific visualization)とは,科学的なデータを視覚的に記述することである。例えば,NASA が“撮影”したブラックホールの写真[*2]は観測で得られたデータを元に作られた映像である。科学的という形容詞が付いているので,現象をありのままに再現しているだけと考えがちであるがそうではない。ブラックホールの例を続ければ,データのスペクトルが可視光の範囲にないので,そのままでは本来は見えない。得られた数値を何らかの合理的な変換で見える色に変えているのである。そこには任意性あるいは恣意性がある。色使いを変更すれば見たときの印象は大きく変わり,伝わるメッセージも大きく変わる。また,土星のような形状であることを表すときに,輪の影が本体にできると立体感がありリアリティが増すが,太陽のように外から照らす光がなければ本来は影ができることはない。しかし,影をつけることで読み取れる情報を増やしている。立体感といえば,どちらから見た映像を作るかという視線方向の選択も重要である。例えば,立方体を図示するとき,真横から見ると単なる正方形になり立体感に乏しい映像になる。普通は斜め方向から見た絵を描くことで人間には立体的に見える。これらの特徴抽出にはモース理論や実特異点論

が深く関わっている。最近では，我々の住む 3 次元よりも次元の高いデータを可視化するニーズも高く，高次元の特異点分類も可視化に寄与している。

3.3 ◆ デザインとSTEAM教育

2015 年，当時 MIT メディアラボの伊藤穰一は，Art, Design, Science, Technology（芸術，デザイン，科学，技術）の頭文字 A，D，S，T を東南西北に置き，「隣は近い，向かいは遠い。でも，これからは，4 つの分野を結びつけることが必要である。そのために科学とデザインを結びつけていく」と述べた [*3]。この括りでは数学は科学に属するとみなすと，芸術に近く，デザインから遠いという感覚は納得のいくものである。数学はあまりにも美しく，デザイン性や機能性の優先順位は高いとは言えなかった。3.2 に述べた演出も，数学からは審美性に基づく芸術的直観的なものと考えがちであるが，デザインや設計に基づく論理的な面が大きい。一方，テクノロジーはデザインに近い。CG はこの ADST の 4 者のいずれにも深く関与している。

本誌の読者はこれらの頭文字から STEAM 教育 [*4] がピンときたのではないだろうか。STA の 3 つが上と共通であり，それに Engineering, Mathematics（工学と数学）が加わっている。音楽と数学の関係は中島さち子氏，あるいは本誌 30 号の有賀氏の記事でも触れられているように歴史的にも深く，これは A と M の関係の一つと考えられる。設計やデザイン的な部分は E に相当すると考えられる。ただし，エンジニアリングとデザインという二つの語感を対比すると，指し示す範囲も方向性も異なる印象である。

教育の話に戻ろう。CG に限らないが，数学を専門としないけれど数学を必要とする分野で必要な資質は，微分積分学や線形代数のようなレガシーな学問を，現実のさまざまな問題に対して実践的に対応していく能力である。例えて言えば，電気自動車のような高級な機械を扱うとしても，ラジオや自転車を分解して組み立てられるような力があるかどうかが，結局は生きる。微分やベクトルは無双であり，それらで理解し説明できることはどこまでも限りがない。

3.4 ◆ 我々が人間であることに根ざした学問

水が摂氏 100 度で沸騰するとか鉄が磁石にくっつくとか 57 が素数ではないという事実は，人類がこの世の中に存在するかしないかとは無関係に成立する自然現象である。一方で，自動車のデザイン，例えば，座席やハンドルの大きさ，運転可能な速度などは我々が人間であることに大きく依存している。これは，どちらが良い悪いという優劣ではなく，特性である。

CG も我々人間がどのように認識し，理解し，感動するか，ということに強く依存している。これはつまり，人間とは何なのかを理解することに直結している。避けられない。冒頭に書いたことの繰り返しになるが，CG は目的ではなく，手段である。作った絵を人間が見て意味を理解するプロセスまでが目的なのである（図 4）。

図４ 絵を人間が見て意味を理解するプロセス

振り返ってみると，リーマンがリーマン面上の調和関数の存在問題を提起し，それがディリクレ境界値問題に昇華した。この問題は，関数のなす無限次元の空間に内積と長さを入れたヒルベルト空間という概念を構想し，直交射影（正射影）を無限次元空間に拡張することで解決された。微分方程式の解という関数を見つけるために，関数を要素とする空間を用意し，そこに内積を導入して角度の概念を拡張することで，幾何的な直観を使うことが可能になり，問題を見通しよく言い換えることができたのである。このように，可視化は人間の理解を高め深めることを助けることができる。

この文章に興味を持っていただけたら，日本数学会の市民講演会での講演のビデオ [*5] やスライド [*6] も参考になる。 専門的な内容に興味があるときは，[*1] が日本語での本格的な解説である。 ❖

参考・引用文献

*1 安生健一, 落合啓之「コンピュータグラフィックスの数学」雑誌『数学』2021 年 7 月号掲載予定。

*2 https://www.nasa.gov/feature/goddard/2019/nasa-visualization-shows-a-black-hole-s-warped-world

*3 https://wired.jp/2016/03/28/mit-media-labs-journal-design-science-radical-new-kind-publication/

*4 本誌 26 号，27 号の特集

*5 日本数学会市民講演会ビデオアーカイブ
https://mathsoc.jp/videos/2018autumn/0923ochiai.html

*6 数学通信 23 巻 4 号
http://mathsoc.jp/publication/tushin/index23-4.html

Ⅲ 社会連携における逆問題の数学

東京大学大学院数理科学研究科 教授
山本 昌宏 / やまもと まさひろ

1983年東京大学大学院理学系研究科数学専攻修士課程修了，理学博士（東京大学）。同大学院数理科学研究科教授，1992-1993年ミュンヘン工科大学フンボルト・フェロー，メッス大学，エクス・マルセイユ大学，ストラスブール大学，ミラノ大学，パルマ大学，ローマ大学，ローマ大学Ⅱ客員教授，ロシア諸民族友好大学上級研究員，東南大学，東華理工大学名誉教授。ルーマニア科学者アカデミー名誉会員。メッシーナ学士院（イタリア）外国人会員。

1 ◆ 逆問題の根本発想

単純な2つの問いから始めよう。次の？を求めよ。

$$90 \times 2 = ? \qquad (1)$$

$$200 \times ? = 1{,}000 \qquad (2)$$

現実と関係づけて解釈すると，最初の問いは，1個90円の玉ねぎを2つ買ったらいくら支払わなくてはならないか？2番目の問題では，手持ちが1,000円であり，1パック200円の鳥肉パックをできるだけ多く買いたいがいくつ買えるか？　という状況と関連づけられる。最初の問題は，今の状況（単価，いくつ買うか）がわかっていて結果（レジでの計算結果）を求める問題であり，二番目の問題は，結果または目的が規定されていて，そうなるためにはどうすればよいかを決める問題である。

これらは，取るに足らない単純な問題であるが，逆問題とそれと対比される順問題の発想を代表している。順問題は，「どうなるか？」（いくら支払いをしなくてはならないか）を問う問題である。一方，逆問題は，望ましい結果が規定されている場合に「どうすればよいか」に関わる問題といえる。数学的にはかけ算とその逆の作用であるわり算で解決できる。

さて，万有引力の法則を考えてみよう。M，m を r だけ離れた2つの質点の質量とし，F を2つの質点の間に働く万有引力の大きさ，万有引力定数と呼ばれる比例定数を G とすると

$$F = \frac{GMm}{r^2} \qquad (3)$$

である。この法則は，質点に関する条件がわかっているとして，その結果として生じる力を表しているもので，問題 (1) に近い。次に (3) を違う視点から眺めると逆問題がただちに現れる。

● 質量 M を求める＝「地球の重さを測る！」

$$M = \frac{Fr^2}{Gm} \qquad (4)$$

● 万有引力定数 G を求める＝「物理定数を決定する」

$$G = \frac{Fr^2}{Mm} \qquad (5)$$

問題 (4) は，重力計の逆問題といわれるもので現在でも地質探査の重要な技術の基礎である。この考え方は，既にニュートンが主著『プリンキピア』で示唆したものであるが，平均値からかけ離れた密度をもつ質量が分布している場合に，それが引力に及ぼす影響を正確に計測して，その平均値からのずれを求めるというというものである。山頂では引力すなわち重力は，高い山の分だけ我々の足の下の質量 M が大きいので，平地に比べて重力 F がわずかに大きいであろう。そのような重力のずれは山の上で静止している振り子に影響を与え，ふつうなら地球の中心に向かって真っすぐに（鉛直方向という）垂れるはずの振り子が鉛直方向からわずかにずれるので，そのずれから山の質量を求めることができるのではないか，という考えである。この考えに基づきピエール・ブーゲーによる1738年のペルーのアンデス山脈での実測などの試みがなされた。そのながれで，1774年にネヴィル・マスケリン（Maskelyne）らはスコットランドにあるシェハリオ

ン山（Mt. Schiehallion）で振り子のずれを計測し山の質量，すなわち密度を計算した[*1]。現在では，正確に測定するためには，振り子のずれではなく，重力計を飛行機に積んで重力の平均値からのずれを上空から高精度で観測して，地下の資源探査などに利用されている。

問題 (5) はイギリスの物理学者であるキャヴェンディッシュが取り組んだ問題である。

また，質点の自由落下で，時間が t だけ経過したときに落下した距離 h は $h=\dfrac{1}{2}gt^2$であることを高校などで習うが，これは時間 t と重力加速度 g がわかったときに h を求める順問題と考えることができる。それでは，g をそもそもどうやって決めたのか，ということであるが，実験から決めようとすれば，これもやはり，これまでの発想と同じく，$g=\dfrac{2h}{t^2}$ と変形して，時間 t だけ経過したときの落下距離 h から求めるということになる。

順問題では，原因がわかっているとして結果がどうなるかに主な関心がある。逆問題においては，結果がわかっているとしてそのための条件や原因を求める，という方向性がある：

順問題＝どうなるか？ の予測

逆問題＝なぜか？ という原因を知る，または，望ましい状態になるように（制御）量やプロセスを決める

万有引力の法則に関連した逆問題 (4)，(5) を思い出してもわかるように，逆問題を考えるためには，順問題を正しく考察しなくてはならず，逆も真である。さらに，早いうちから小中高生も，順問題的な発想だけではなく逆問題的に物事をとらえる習慣をつけ，慣れておくと，多様なものの見方を身につけられると思う。高校のカリキュラムで理解できる逆問題の例は参考文献 [*1] でも紹介されている。

数学の研究でも，「逆に考える」ことは大いに役に立つ。一例であるが，19 世紀における数学の重要な課題であった楕円積分の研究において，有名なフランスの数学者のルジャンドルが長年にわたり苦闘していたが，ノルウェーの偉大な数学者であるアーベルが逆関数の観点から考えて鮮やかに解決に導いた例もある。これは，「ルジャンドルは，前進したかったのであるが，馬車の前に馬ではなく，馬の前に馬車をおいて前進しようとして失敗した」ともいわれる。しかも，(4) や (5) からわかるように，1 つの順問題に対応する逆問題は 1 つとは限らず，たくさん出てくるという多様性もある。

2 ◆ 逆問題の微分方程式による定式化

第 1 節では，法則などが (3) のように 1 つの式で記述される場合に対して逆問題を考えてみた。しかしながら，多くの現象は，(3) のように条件となる量を代入すれば求めたいものが計算できるような，完結した方程式で表されないことがふつうである。

さまざまな現象を支配する法則は，通常は微分方程式と呼ばれるもので記述される。微分方程式の単純な例としてはマルサスの人口モデルがある：

$$u'(t) = au(t) \quad t > 0 \qquad (6)$$

ここで，$u'(t)$ は t に関する u の導関数である。

さて $u(t)$ は時刻 t における人口で，定数 a は人口の増加率である。(6) は人口増加の割合が人口に比例するという前提で立てられた 1 つのモデルである。

これは求めたい関数 $u(t)$ が満たすべき方程式で微分方程式と呼ばれる。順問題は，最初の人口 $u(0)$ と増加率 a がわかっているとして，$u(t)$ を求めるものである。逆問題は人口のデータ，例えば現在の人口から，直接知ることができない増加率や最初の人口を求めるものである。人口の正確な予測にもそのような逆問題は重要である。第 1 節と異なり $u(t)$ は直接求まっていないが，指数関数を使って書き表すことができるので，考えを進めやすい。

以上の考え方は，現象を解析する際に，モデル方程式に基づく通常の考え方である。次に，社会連携に現れる逆問題の例を説明しよう。それらは，微分方程式でモデル化されるが，便利な解の表示式を求めにくいものである。

3 ◆ 製鋼工程における取鍋の熱画像による欠陥検出

製鉄プロセスはいくつかの過程から成り立っている。高炉（溶鉱炉）で得られたもろい鉄（銑鉄と呼ばれる）から炭素を除去し鍛えて強くした「鋼（はがね）」とし，それを特定の大きさに固める（連続鋳造）までの製鋼工程を考える。そこでは，高圧の酸素を吹き込むことによって銑鉄から炭素を除去する転炉といわれる装置から，高温の溶けた鋼を取り出して，次の連続鋳造のプロセスへ運搬することが必要となる。その入れ

物は「溶鋼鍋」または「取鍋（とりべ）」と呼ばれる。

転炉から連続鋳造機までは溶けた鋼で満たされ，帰りは空の状態となり，このような往復を繰り返す。したがって，比較的短い時間間隔で溶けた鋼で満たされた状態と空の状態を繰り返すことになり，内壁への熱的なダメージが大きいと想定される。取鍋は，外側が鉄，そのすぐ内側が耐火煉瓦と呼ばれる特殊な煉瓦で保護されている。

運搬そのものは工場の建屋の中に限定されるものの，取鍋の上側面にあるフックで建屋の天井に吊して移動させるので，空の状態と溶けた鋼で満杯の状態の繰り返しによって熱的なダメージにさらされた鍋が，万が一にでも破損すると高温の内容物が降り注ぎ，たいへん危険である。

そこで，常時，取鍋の内壁の状態を確認する必要がある。上記のような操業過程からそのようなモニタリングを直接できるのは，取鍋が転炉に空の状態で戻るときである。溶けた鋼を連続鋳造機に入れた後なので空の状態であるとはいえ，内壁は依然として高温であり白熱しており，人間の眼で内壁の状態の確認をすることは強い輻射熱などの影響もあって困難かつ安全でない。

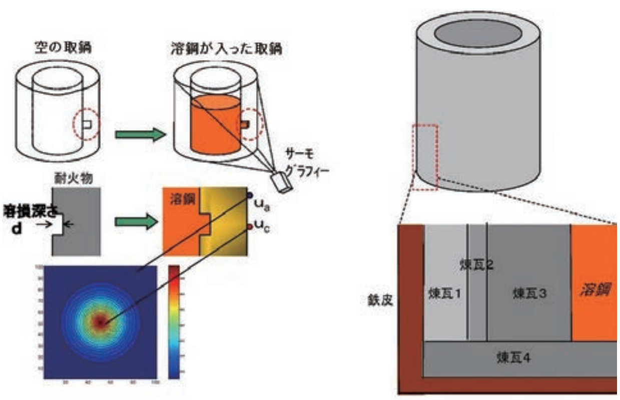


図 1　サーモグラフィーによる取鍋のモニタリング

人間の眼のかわりに，サーモグラフィーを使って鍋の側面の温度を測る。これは熱画像ともいわれ，空港の検疫などでも，通過する乗客の体温測定に使われている。例えば，図 1 の左上にあるように，内壁に欠損（赤い点線で囲まれた部分）があるとすると，そこは，煉瓦の厚さが薄くなっているので，そこに対応する取鍋表面の温度は回りと比べて高くなっているなど，異なる振る舞いをしていると想定できる。また，表面の温度も溶損の深さ d などによって変わると予測できる。図 1 の左下はサーモグラフィーによる取鍋側面の表面の温度分布を示しており，内壁の溶損部の真横の点 u_c における温度は溶損がない部位に対応する u_a より温度が高くなっている。

第 1 節の説明と対応させると，耐火煉瓦の厚みがわかっているとして表面の温度を求めるのが順問題であり，我々の課題は，その逆問題ということになる。煉瓦の中の熱の流れは詳しくは述べないが，熱伝導方程式と呼ばれる微分方程式によってモデル化できる。それは，温度が時間と場所の座標に依存する関数であって，その関数が満たすべき微分方程式である。図 1 の左側の中程の図で言うと溶損部から真横（深さ方向）だけに熱が伝わって場所 u_c や u_a に到達するのではなく，縦方向なども含めて 3 次元的に拡がるので，d などの溶損部のサイズで，場所によって異なる表面温度を簡単に求める式はなく，数学解析の取り扱いが一層必要になる。

さらに問題となるのは，熱伝導現象には強い平滑化の作用があるということである。微分方程式の理論で厳密に証明されている性質であるが，直観的には次のように理解できる：鉄板焼きのプレートを我々が囲んで焼肉を楽しんでいるとしよう。鉄板のどこかに熱源があり，鉄板全体に均等に熱を加えているわけではないが，鉄板は均等に熱せられ，肉は平等にうまく焼けている。さて，溶損部には溶けた鋼が入りこんでいるので，余分な熱源と考えることができ，特定の場所に限定されている。そのような熱源の影響は少し離れた場所では，鉄板焼きのプレートのように，平均化されて検知されてしまう。これが熱伝導方程式の平滑化の作用である。

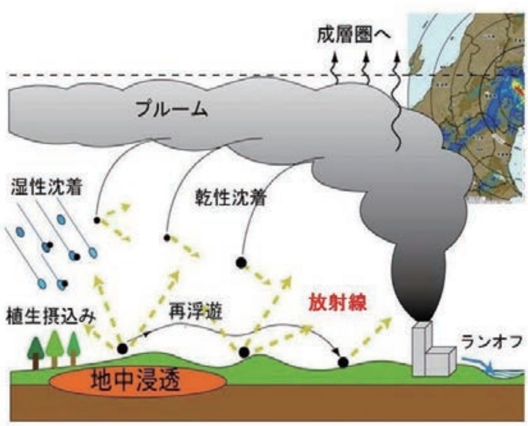
平滑化はフィルタリングともいえるが，我々の逆問題では，そのようにフィルターがかかって，ぼやけたデータから，もとの対象の特徴，例えば，溶損部（＝熱源）の形状や場所，特に角のようなエッジを抽出しなくてはいけない。溶損深さ d がちょっと違ったくらいでは，表面の温度に大した影響を与えそうもないことが想像できる。これが逆問題を解く際の「不安定性」と言われるもので，信頼性のある逆問題の解を得るために克服しなくてはいけない難関であり，数学上の課題であるとともに研究の醍醐味ともいえる。

そのような特質を解析し，困難に対処する方法論は逆問題の数学理論として蓄積されているので，それを適材適所に活用して，取鍋溶損の推定手法を確立し，操業の安全と効率化につなげることができたのである。

実は，不安定性とは別に，結果（表面温度分布の異常）から原因（溶損部の状況）が一通りに決まるとは限らない難しさもある。これは逆問題の「非一意性」と呼ばれる。例えば，深さが d の溶損が 1 つの場合と，やや浅い溶損が複数個ある場合でも表面温度が区別できないほどの違いしかなくなる可能性はある。異なる原因でも同じ結果をもたらすことはよくあり，大雑把な例えであるが，体温だけで病気の診断ができないことと似ている。

4 ◆ セシウムによる土壌汚染

2011 年の福島原発の事故でセシウム 137（放射性同位元素）などが大気中に放出された。



原子力規制委員会放射線モニタリング情報ホームページを一部改変

図２　環境中への汚染物質の拡散

図 2 のように，放出されたセシウム 137 の一部は地表面や地中の浅い場所に沈着し，空間の放射線量に大きな影響を与え続けていると想定される。空間の線量は健康に大きな影響を与える。土地の除染のためにも深さ 20 cm 程度までの地中の浅い場所に沈着したセシウム濃度が深さ方向にどのように分布しているかを推定することが重要である。浅い場所とはいえ，実際の観測は，少しずつ掘ってサンプル用の土壌のセシウム濃度を深さごとに計測するのでたいへんな手間がかかるし，広い範囲で濃度推定が必要なので実地の計測だけに頼るわけにはいかない。

そこで，セシウムの地中への浸透のモデルを立てて考えることが 1 つの手となる。ある粒子（ここではセシウム）が媒質（ここでは土壌）に拡がっていく現象は，第 3 節で述べた熱伝導方程式と同類の方程式で記述される。現象面からは移流拡散方程式と呼ばれるが，数学上は同一である。地表面でセシウムが流入するのか流出するのかなどといったいわゆる境界条件をどのようにモデル化するのかも重要である。さらに移流拡散方程式には，拡散の度合いを表す係数や雨水が地中に浸透することによって起こる地中の流れなどの物理的に重要な係数が含まれている。

これらの係数，境界条件，さらに初めはどういうセシウムの分布であったかという初期条件などが決まれば，移流拡散方程式を解いて，与えられた時間と深さでのセシウム濃度を計算できる。これは，原因や係数が規定されたとして，解を時間の経過とともに求めるという順問題である。

しかし，実際は，方程式の係数などはよくわからない。地面の状態を記述する境界条件も，畑，牧草地，森林などの状況で大きく異なり，予め規定することは困難である。順問題をよりよく解くためにも，観測データから境界条件などを決めるという逆問題のプロセスが必要になる。実際には観測データを使って係数や境界条件を決める逆問題を解くことと並行して順問題も解いていくプロセスとなる。

細部を省略するかわりに，羽田野祐子・筑波大学教授との共同研究における逆問題による濃度予測値と実測値の比較を 1 つ紹介する。羽田野氏は，地表面からのセシウムの流入・流出を仮定していない境界条件であった従来型の地中拡散モデル方程式を改良し，境界条件を一般化した。

逆問題としては，境界条件も観測データから適切に決定する必要が新たに生じた。従来型のモデル，羽田野モデルによる数値結果と実測値の比較のために図 3 をあげる。これは，

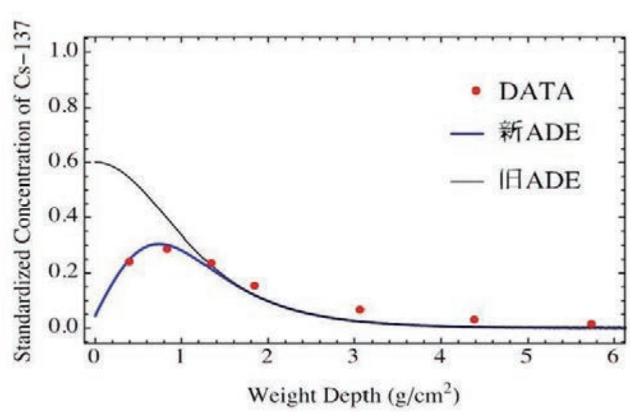


図３　事故から約 530 日後におけるセシウム 137 の土中濃度（縦軸）と深さ（横軸）の関係（斎藤公明（JAEA）ら，筑波大学・羽田野研究室・岡宏樹の協力による）

福島県西白河郡西郷村のある水田の一地点における深さとセシウム 137 の濃度のグラフであり，福島原発事故後，約 530 日後の観測値と予測値である。横軸は重量深度（単位は g/cm^2）であるが，大雑把に地表面からの深さと考えてよい。縦軸はセシウム 137 の適切に規格化された濃度を表している。DATA と表示された点は深さを決めて地面を掘ってその都度，計測した濃度の実測値であり，新 ADE とある太い曲線は羽田野モデル，旧 ADE とある細い曲線は従来型のモデル式による計算結果である。以下のことがわかる：この場所では，地表面からの流出がかなりあったようである。地表面での流出を無視した旧来モデルでは計算結果が点で示されている実測値を地面の浅い場所で大きく上回っているが，我々のモデルでは，実際には流出分だけ低くなったセシウム濃度をよく反映している。

5 ◆ 異分野連携のコアとしての数学－数学研究の現場から

「宇宙は数学という言語で書かれている」というガリレオ・ガリレイの言葉がある。さまざまな現象を解明し，対策を秩序立って考え，考察していくための必須言語は数学であるということである。さまざまな現象からの課題の解決としては，前の節で説明した製鋼工程の安全性・効率性を目指すことや，原発事故後のセシウム 137 による汚染の予測や例えば感染症の拡大のより正確な予測とそれに基づいた有効な対策の創出が含まれる。第 4 節のセシウムによる環境汚染の長期予測の問題は日々の健康や，人々のふるさとがいつ安全になるのかなどに直結した課題である。このように，課題によっては，多くの人々の強い願いと結びつき，当事者にとって身を切るような切実なものがある。

一方で，我々は数学研究者であり，数学を使って社会のいろいろな課題の解決に寄与することが期待されている。そこで，日常のちょっとした便利さを目指すような課題から悲惨な状況の打開につながるような課題まで，客観的に定量的に，できるだけ厳密に立ち向かうことが責務となる。

「真実と公正さに関わることであれば，大きな問題であろうと小さな問題であろうと，違いはない」というアインシュタインの言葉があるが，そのよりどころの 1 つが数学である。

最後に，数学は，ともすれば無味乾燥とかとっつきにくいなどと敬遠されることがあるが，社会連携などに力を発揮する数学の特質に触れて記事を閉じたいと思う。数学における真理は定理という形で表現されるが，これは万国共通で，ひとたび証明されれば，時代が変っても変更されることはない。後付けの規則もなく，仮定さえ満たされれば，常に結論が成り立つ。「正しく」考える能力があれば，経験の多寡に左右される部分が少ない。したがって，数学は例えば権威のようなものと無縁であり，実はたいへん自由な学問である。また，数学的手法には一般性があり，数学モデルは全く異なる現象でも同一であることがしばしばある。このことは第 3，4 節で見たように，見かけ上別種の現象でも数学モデル式は同一であることが多く，数学で一気にまとめて解決できる。

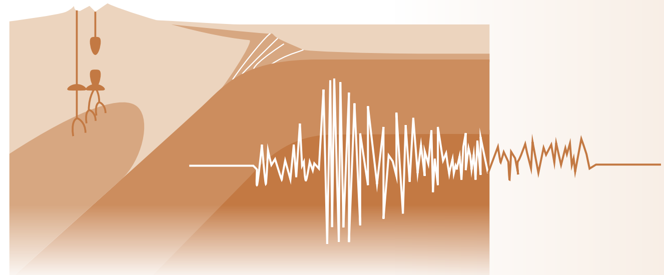
数学の真理は基本的には永遠不変のものであるので，人類の知的活動の結果として蓄積され続ける。例えば三平方の定理は古代ギリシャ時代から常に正しかったしこれからもそうである。現代に生きる我々は，過去の成果を最新の研究にも使える。自分が何らかの定理を初めて証明した場合，ごくささやかな成果かもしれないが，それは永遠の真理を増やしたことになるので，正しいかどうかについての責任は重大である。しかも，その上に次の成果が積み重なっていくので，なおさらである。数学の真理やその有効性は，時の流れや大多数の意見や論争などによることなく，基本的には自分の頭で考えて自分の責任で創造して立証していくものである。

社会連携でも威力を発揮し，しかも自由で世界のどこでも通用する国際的な研究も許容する数学には一定の思考様式と言語があるので，その習熟のためには，小学校以来，訓練が必要である。そのためのカリキュラムを構築することは，言うまでもなくたいへん難しい。しかしながら，そのような数学の修行の先に何があり得るのか，について 1 つのありようを生徒の方々に示すことは，現役の数学研究者の重要な責務であると信じている。ささやかなこの記事によって，数学が一見数学と関係なさそうな課題解決にも威力を発揮するだけでなく，数学自身も異分野の課題解決や社会連携を通じて一層発展していくことを少しでも感じ取っていただければ幸いである。 ❖

参考文献

*1 C.W. グロエッチュ，『はじめての逆問題　具体例で学ぶ逆からの思考法』，サイエンス社，2002 年（大西和榮，田沼一実，山本昌宏訳）

第5回　火山分布図から見えること



開成中学校・高等学校　教諭
有山 智雄 ／ ありやま ともお

1960年生まれ。開成高等学校時代に地学の授業でプレートテクトニクスや地震予知に興味を持つ。東京大学理学部地質学科卒業，同修士課程修了。修士での研究テーマは活断層の活動性の評価。1985年より東京学芸大学附属高等学校で，1989年より開成中学校・高等学校で地学を教える。高校地学の教科書の執筆にも携わる。趣味はトレッキングとロードバイク。常々伝えたいと思っていることは「地球に住むなら地球のことを知っていたほうがいい」

火山大国日本

連載の第1回が「地震大国日本」という書き出しで始まり，第４回まで地震の話が続きました。今回は，日本は地震大国であるだけでなく，火山大国だという話です。

図1は日本の火山分布図です。非常に多くの火山があることがわかります。富士山や箱根山，阿蘇山など日本の有名な山の多くは火山であり，日本には 111 の活火山があります。

ちなみに活火山とは現在活動中，あるいは今後も活動する可能性のある火山のことで，火山噴火予知連絡会によると「概ね過去１万年以内に噴火した火山及び現在活発な噴気活動のある火山」と定義されています。

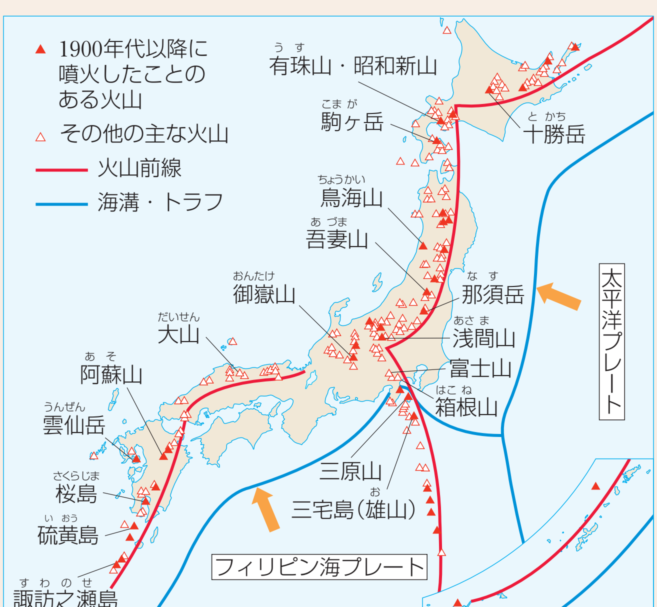


図１　日本の火山分布　『地学基礎　改訂版』（啓林館）より引用

Q　地球全体ではおよそいくつの活火山があるでしょうか？

① 1,500　② 5,000　③ 12,000　④　25,000

日本の面積が 38 万 km^2，地球全体の面積が 5.1 億 km^2 ですから，面積に比例すると考えれば約 200 万個の火山がある計算になりますが，実際には約 1,500 個しかありません。図2は世界の火山の分布です。地球上で火山がある場所は本当に限られており，日本はいかに多くの火山が集中しているかがわかると思います。

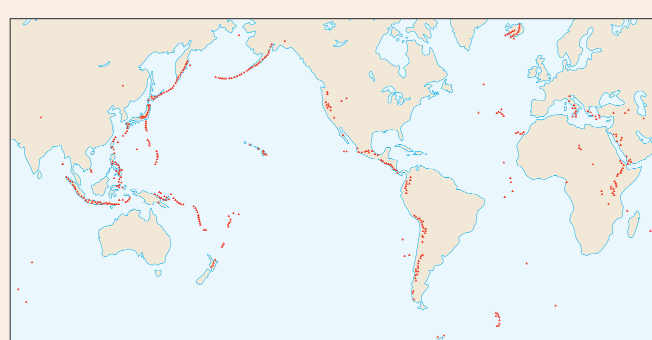


図２　世界の火山分布　『地学基礎　改訂版』（啓林館）より引用。なお，海嶺での火山活動は火山として記入していない。

日本に火山が多い理由

図2を見ると火山は環太平洋地域に多くあり，これは地震の分布と似ています。連載第１回で地震がプレート境界で発生しているという話をしましたが，火山の分布もプレートと関連させて説明することができるかもしれません。図2の火山の分布と図3のプレートの分布図を比べてみましょう。

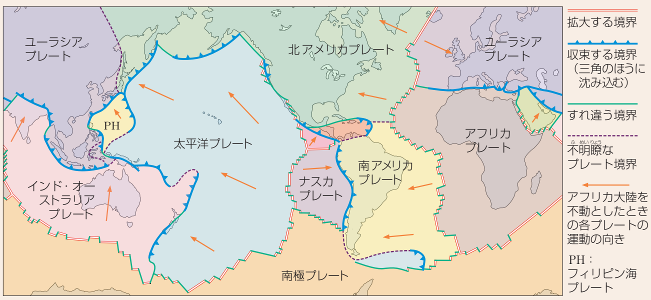


図３　プレートの分布　『地学基礎　改訂版』（啓林館）より引用

Q　火山の分布はどの種類のプレート境界の分布に最も一致しているか？

火山の分布は，図3の収束する境界（青い線）とほぼ一致しています。よく見ると完全には一致していませんが，収束する境界（沈み込み境界）には必ず火山があるということは言えそうです。日本はプレートの沈み込み境界に位置しているため，火山が多いと言えそうです。

島弧でのマグマの発生

それでは，日本の火山の分布をもう少し詳しく見てみましょう。図1を見ると日本の火山は決して一様に分布しているわけではありません。火山は帯状に海溝とほぼ平行に分布しています。ここで注目すべきことは四国や紀伊半島，三陸など，海溝に比較的近い所には火山がないということです。海溝に最も近い火山を結んだ線を火山前線といいますが，火山前線は海溝とほぼ平行で，およそ 100km ～ 300km ほど海溝から離れています。なぜこのような火山の分布になるのでしょうか。ここで一つ確認しておきたいのは，「マグマが発生した場所に火山ができている」ということです。「地下深くにはどこにでもマグマがあるわけではない」のです。

それでは日本のようなプレートの沈み込み境界，つまり島弧ではどのようにしてマグマが発生しているのでしょうか。この発生の仕組みを考えるうえで火山前線の存在が大きなヒントになります。沈み込んだプレートのようすは深発地震面から推定できることは連載の第４回でも触れました。火山前線と海溝の距離は 100km ～ 300km と場所によって違いがありますが，世界各地の火山前線の多くは，深発地震面の深さ 100km の等深線とほぼ一致しているのです。この事実は，海溝から沈み込んだ海のプレートが深さ 100km くらいまで沈み込んだ所で，岩石が融け，マグマが発生していると考えればうまく説明できそうです。図4は，プレートの沈み込みに伴うマグマの発生のようすを示したもので，海溝から陸側へ明らかに離れた図4（a）付近で岩石が融けてマグマが発生しています。

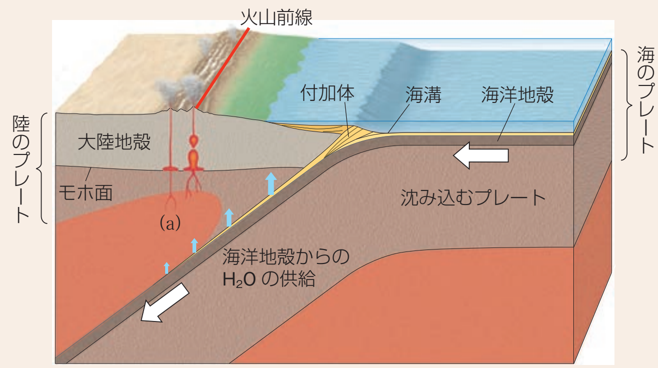


図４　島弧でのマグマの発生　『地学基礎　改訂版』（啓林館）より引用（一部改変）

Q　そこで岩石が融け始めるのは温度が高くなるからか？

温度が高くなれば岩石が融けるのは間違いありません。そして地下深くなるほど温度は高くなっているので，「温度が高くなったから融け始めた」と説明するのは悪くないようにも思えます。しかし（a）と同じ深さの両側（陸側と海側）では岩石が融けていないので，温度だけでは説明できません。

地表より高温の地下で岩石が融け始める温度は，図5の青線Aのように，深くなるほど高くなっていくことがわかっています。これは圧力が高くなると物質の融点も高くなり，融けにくくなるからです。また，地下の温度は図5の赤線のようにやはり深い所のほうが高くなっています。ここで注目すべきは，どの深さにおいても地下温度は岩石が融け始める温度より低いということです。このことは，地下での普通の状態ではマグマは発生しないということを意味しています。それでは，どういうときにマグマは発生するのか，図5で考えてみましょう。

わかりやすいのは②の矢印に示されるような温度の上昇です。もう一つは①の矢印に示されるような圧力の低下です。

圧力が低い所では融点が下がるので，岩石が融け始めマグマが発生するわけです。それではプレートの沈み込みに伴うマグマの発生は①，②のどちらかで説明できるでしょうか。プレートは沈み込みで深い所に入っていき温度が上昇しますが，その変化は赤線に沿ったものとなり，通常②のような変化にはなりません。過去には摩擦による発熱を検討した研究者もいましたが，プレートの移動速度が数 cm ／年と非常に遅いため，岩石を融かすほどの温度上昇は起こらないことが示されたようです。また，沈み込みでは圧力が高い所に入っていくので，①のように圧力が低下するということも考えられません。

図５には青い破線Bが書かれています。これは岩石がわずかでも水と共存する場合の岩石が融け始める温度です。水がない場合（青い実線A）に比べると低くなっています。そして深さ100km 付近より深い所では地下温度（赤い実線）のほうが高くなっており，岩石が融け始めることがわかります。海洋地殻が沈み込み，深さ 100km ほどに達すると，圧力が高いために角閃石などの鉱物の結晶に（水酸基 OH の形で）取り込まれていた水が分離されて放出されます。図４の水色の矢印が水の放出を示しています。この水により沈み込むプレートのすぐ上の部分の岩石の融点が下がり溶融が始まり，マグマが発生するのです。地下 100km に存在する岩石はかんらん岩ですが，発生するマグマは玄武岩質です。これは部分溶融といって，岩石全体ではなく，融点の低い鉱物から順に溶融し始めるからです。

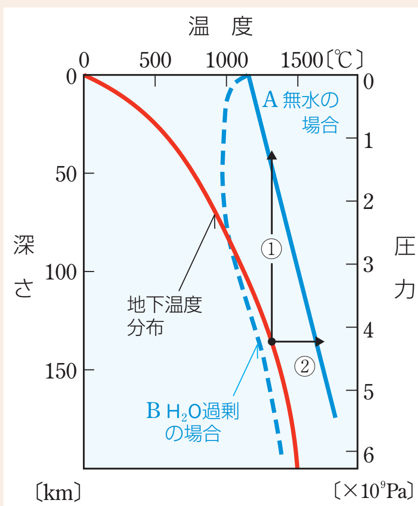


図５ 島孤でのマグマの発生 『地学基礎 改訂版』（啓林館）より引用（一部改変）

このようにして日本のようなプレートの沈み込み境界の地下ではマグマが発生し，多数の火山ができているわけです。

海嶺でのマグマの発生

図２を見ると，大西洋北部のアイスランドには多数の火山が存在しています。図３と比較すると海嶺の位置にあることがわかります。また海嶺では新しいプレートが生産されますが，プレートは玄武岩や斑れい岩などの火成岩でできており，そこでは多量のマグマが発生しています。このマグマはどのようにして発生しているのでしょうか。海嶺付近では，高温のマントル物質が圧力の低い浅い部分に上昇してきています。ここでは，図５の①の矢印が示すような圧力の低下によりマグマが発生しているわけです。

ホットスポット

図２を見るとハワイに火山があります。図３を見ると，ハワイは太平洋プレートのほぼ中央に位置しており，マグマの発生をプレート境界との関連で説明することはできそうにありません。ここでは移動していくプレートより深い部分に，マントルに固定されたマグマの供給源があり，火山が形成されていると考えられています。このような場所はホットスポットと呼ばれています。ハワイだけでなく，北米のイエローストーン国立公園周辺など，ホットスポットは 20 ～ 40 ほどあります。ホットスポットでのマグマの発生はプルームと呼ばれるマントル対流の上昇部と関連づけて説明できると考えられています。

日本にいると火山はごく当たり前の存在ですが，地球全体を見ると，火山のある場所，つまりマグマが発生する場所は非常に限定されていることがわかります。火山の分布図を見ることでプレート境界やマントル対流のようすまで伺い知ることができるわけです。

噴火が災害に結びつくケースも多く，火山は困った存在とも言えますが，温泉があったり，富士山のような対称性の高い美しい山が見られるなど，火山の存在にはプラスの面もあります。日本は地球上の火山の１割近くが存在するまさに火山大国です。火山災害のリスクを十分に理解したうえで，火山と共存していくことが大切なのではないでしょうか。

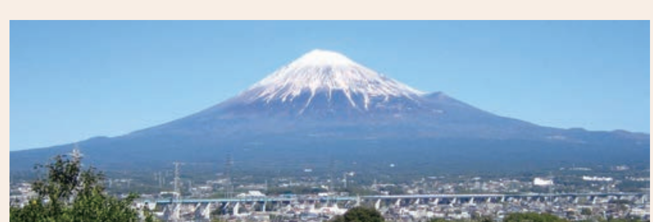
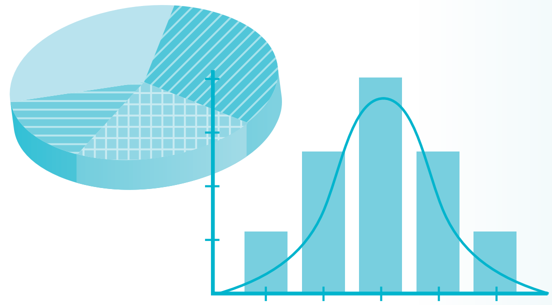


図６ 富士山 火山だからこその対称性

第8回 未来の可能性を測る確率とオッズ



立正大学データサイエンス学部 教授
渡辺 美智子 / わたなべ みちこ

九州大学大学院総合理工学研究科修士課程修了。理学博士。九州大学理学部附属基礎情報学研究施設文部教官助手，関西大学経済学部専任講師，助教授，東洋大学経済学部教授，慶應義塾大学大学院教授を経て，2021年より現職。専門は統計学，特に多変量解析（潜在構造分析法）と統計教育。日本学術会議連携会員，2012年度日本統計学会賞受賞，2017年度科学技術分野の文部科学大臣表彰「科学技術賞（理解増進部門）」受賞。おもな著書として，『21世紀の統計科学Ⅲ 数理・計算の統計科学』（東大出版会 分担執筆），『身近な統計（改訂新版）』（放送大学教育振興会　共著）など。放送大学「身近な統計」主任講師，統計グラフ全国コンクール審査委員長，「算数・数学の自由研究」作品コンクールの中央審査委員を務める。

未来の可能性を測る指標

新型コロナウイルスの脅威は依然続いており，まだ先が見えているとはいえません。一方で，収集されたこれまでのデータから，男性，高齢者，糖尿病，脂質異常症，高尿酸血症などが重症化に至るリスク因子であることがわかり，対策に活かされ始めています。コロナ感染に限らず，脳卒中のリスク因子が肥満やストレスであることや，肺がんのリスク因子が喫煙習慣であるなど，医療・公衆衛生の領域では，将来の疾患発生の危険性を高める要素をリスク因子として見いだす研究が盛んに行われています。このような未来の可能性を測り，将来の不確実性をリスクとして評価する文脈では，重症化率や疾患の罹患率のような確率的な指標と併せて，オッズと呼ばれる確率と同様に可能性の程度を測る指標が多く使われています。

医師は，患者がある疾患に罹っている可能性を「検査前オッズは1だったけれど，検査後オッズは8になった」というような会話で，リスクの大きさを表現します。0から1の間しか取らない確率と異なり，1を超える値をとるオッズは，なかなか意味をとらえることが難しい専門的な指標に思えるかもしれませんが，海外の数学教育では，オッズは確率と一緒に，遅くとも中学校で学習する内容のようです。毎朝の天気予報で，日常的に降水確率が出てくるように，欧米では新聞やテレビなどのメディアで，プロスポーツチームが次の試合に勝つオッズは，というように，オッズは身近な指標になっています。

今回は，この確率とオッズについて，学習してみましょう。

確率とオッズ

「雨が降る」か「降らない」か，外出前によくその可能性を評価します。「雨が降る」というような**事象Aの生起確率**は，事象Aが起きる場合の数と事象Aも含めてそれ以外のすべての事象が起きる場合の数の比率として，すべての事象が同様に確からしく起こる場合に，次のような分数で定義します。

$$P(A)=\frac{\text{事象}A\text{が起きる場合の数}}{\text{すべての事象が起きる場合の数}}$$

この定義から，$P(A)$ は，0から1の間の数になることがわかります。一方，**事象 A が生じるオッズ**は，事象 A が起きる場合の数と事象 A 以外の事象が起きる場合の数の比または比率として定義されます。比率の場合は，

$$\text{事象}A\text{のオッズ}=\frac{\text{事象}A\text{が起きる場合の数}}{\text{事象}A\text{以外の事象が起きる場合の数}}$$

となります。また，このとき，オッズと確率の関係は，

$$\text{オッズ}=\frac{P(A)}{1-P(A)}\text{，なぜなら，}$$

$$= \frac{\text{事象}A\text{が起きる場合の数／すべての場合の数}}{\text{事象}A\text{以外の事象が起きる場合の数／すべての場合の数}}$$

確率とオッズの計算をいろいろな事例で見てみましょう。

計算例1　サイコロを振って，1か2の目が出たら「勝ち」，それ以外の目が出たら「負け」とします。このとき，

勝つ確率は，$\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$（約0．33）

勝つオッズは，$\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$（1：2，または0．5）

計算例2　袋の中に，赤の球が3個，青の球が2個，黄色の球が1個入っていて，袋の中から無作為に1個の球を抜き取るとき，

赤い球である確率 ＝ $\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$（0．5）

赤い球であるオッズ＝ $\frac{3}{3}$ ＝ 1（1：1，または，1．0）

オッズは，このような1：1（one to one），つまり1のときを**イーブン（公平）**と言っています。

計算例3　雨が降る確率が40％のとき，雨が降らない確率は60％なので，

雨が降るオッズ＝ $\frac{40}{60}=\frac{2}{3}$（2：3，約 0.67）

確率は0以上1以下の数ですが，オッズは，0以上，無限大の値をとります（図 1）。

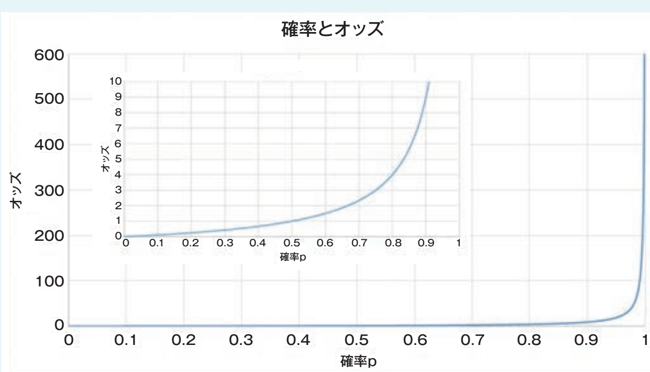


図1　確率とオッズの関係　中の図は，オッズの小さい部分を拡大したグラフ

確率は0以外で，常にオッズよりも小さな値をとります。確率が小さいほど，確率とオッズはほぼ同じ値となります。例えば，宝くじに当選する確率が1千万分の1，つまり，0.0000001では，オッズもほぼ 0.0000001 です。逆に，確率が大きいほど，確率とオッズとの差が大きくなり，確率が1に近くなるほど急激にオッズの値が大きくなります。確率 0.9 ではオッズは 9 ですが，0.99 では 99，0.99999 では 99,999 です。

オッズの場合，1がイーブン，基準であることはお話ししましたが，対数変換したオッズ（**対数オッズ**）は，オッズが1のとき0，そしてオッズが 0 に近づくほど負の大きな値となる指標です。つまり，対数オッズは，0を基準にマイナス無限大からプラス無限大までの値をとる指標となります。

私たちが日常で感覚的に，確率 0.99 と 0.999 や 0.01 と 0.001 の可能性を区別することは難しいのですが，AI の世界でリスクの予測にオッズや対数オッズが使用されるのは，可能性を表す数量として，確率のように 0 から 1 の間であるという制約を付けずにモデル化が可能だからです。

2×2のクロス集計表とリスク比，オッズ比

冒頭で述べたとおり，医療や公衆衛生の領域では，将来の疾患発生の危険性を高めるリスク因子を特定することは重要な課題です。では，糖尿病の既往歴が新型コロナ感染後の重症化のリスク因子であることやよく知られた喫煙と肺がんとの関連，コーヒーの飲酒習慣とがんの発症率との関連などをどのようにデータで検証したらいいのでしょうか？ 何かの有無と何かの有無に関連があるのかどうかをデータで検証する際に，よく使用される表が，**2×2のクロス集計表**です（表1）。

表1　喫煙習慣と疾病発生（肺がん）の関連（クロス集計表）

		疾病の発生（肺がん）		
		あり	なし	計
喫煙習慣	あり	a	b	$a+b$
	なし	c	d	$c+d$
	計	$a+c$	$b+d$	$a+b+c+d$

※セル内は人数（度数）

表から，「喫煙習慣」がリスク因子として想定されている場合，肺がんの発生リスク（発生率）は，下の比率で評価されます。

・喫煙習慣ありのグループの発生率　$\frac{a}{(a+b)}$

・喫煙習慣なしのグループの発生率　$\frac{c}{(c+d)}$

さらに，喫煙習慣がある場合は喫煙習慣がない場合に比べて，疾病（肺がん）発生率がどの程度大きくなるのかは，上記の発生率の比をとって**リスク比（相対危険度）**として評価します。

$$\text{リスク比} = \frac{\frac{a}{(a+b)}}{\frac{c}{(c+d)}} \quad \cdots\cdots ①$$

リスク比は1のとき，肺がんの発生リスクは喫煙習慣の有無とは無関係であることになり，例えば，リスク比が２であれば，発生率が２倍，すなわち，喫煙習慣があれば，ない場合に比べて，肺がんになるリスクが２倍になることを意味します。

同様に，オッズの立場で，これを見てみましょう。

・喫煙習慣ありのグループが肺がんになるオッズ　$\dfrac{a}{b}$

・喫煙習慣なしのグループが肺がんになるオッズ　$\dfrac{c}{d}$

となることから，喫煙習慣があることで喫煙習慣がない場合に比べて，肺がんになるオッズがどの程度，大きくなるのかは，次の**オッズ比**によって測ることになります。

$$\text{オッズ比} = \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a \times d}{b \times c} \quad \cdots\cdots ②$$

オッズ比は，２×２のクロス集計表の4つのセルの度数をいわゆる，**たすき掛け**をすることで簡単に求めることができる指標です。リスク比同様，オッズ比も1のとき，肺がんの発生リスクは喫煙習慣の有無とは無関係であることになり，オッズ比が２であれば，喫煙習慣があればない場合に比べて，肺がんになるオッズが２倍になることを意味します。

前向き研究と後ろ向き研究

リスク比とオッズ比，定義が違うだけでどちらも同じような指標に見えますが，実はこのような疫学研究では，同じクロス集計表に見えても，研究データがどう取られたのかの違いによって，オッズ比は求めることができても，リスク比は意味をなさない指標になることがあります。

その研究デザインの違いが，**前向き研究（コホート研究）**か**後ろ向き研究（ケースコントロール研究，症例対照研究）**かです。前向き研究では，肺がんに罹患していない集団の中から，喫煙習慣のあるグループを例えば 1,000 人，喫煙習慣のないグループを例えば 2,000 人などを集めて研究対象集団とし，10 年後などの将来に向かって肺がんを発症するかどうかを追跡調査していく方法で，データを収集していきます。時間の進行方向に沿って調査を進めることから，前向き研究と言っています。

前向き研究で取られたデータを表１のようにまとめれば，発生率およびリスク比を求めることで，喫煙習慣などの想定したリスク因子と肺がんなどの疾病発生との関連を示すことができます。しかし，前向き研究は将来どうなるかを調べるため，調査が長期に渡ることで，研究費用（コスト）が大きくなる，脱落する症例が出る，難病などの発生率が小さい疾病はデータを多く集めることができないなどの難点があります。

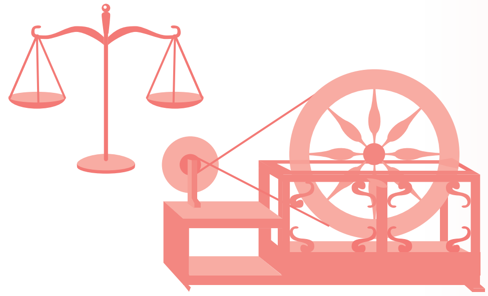
一方，後ろ向き研究では，既に肺がんを発症した患者のグループを**症例（ケース）グループ**として例えば 100 人，同時に，肺がんに罹っていない健常者のグループを**比較対照（コントロール）グループ**として例えば 200 人集め，両方のグループの過去の喫煙習慣を調べることで，データが収集できます。前向き研究ほど時間やコストもかからず，発生率が低い患者のデータも多く集めやすいというメリットがあります。ただし，後ろ向き研究では，病気に罹っている人を何人とるのか，罹っていない人を何人とるのかは，研究者が自由に設定できる数なので，発生率やリスク比は意味をなしません。つまり，後ろ向き研究でまとめられた表では，行（横）方向の比率は意味をなさず，列（縦）方向の比率のみ意味があります。つまり，肺がんの患者グループ，肺がんではないグループそれぞれで，喫煙習慣を有しているかどうかのオッズを求め比較することは，次のオッズ比

$$\text{オッズ比} = \frac{\frac{a}{c}}{\frac{b}{d}} = \frac{a \times d}{b \times c} \quad \cdots\cdots ③$$

で可能となります。②と③は，オッズ比として，最初の意味付けは違っても，どちらも同じ値になります。この性質から，リスク比とは異なり，オッズ比は，どちらの研究デザインで取られたデータであっても，想定されるリスク因子と疾病発症との関連を調べるための指標として活用できるということで，医療現場では欠かせない指標となっています。

今回は，確率とオッズ，リスク比とオッズ比のことを紹介しました。未来の予測に力を発揮する AI の世界では，医療・公衆衛生の分野に限らず多くの領域で，予測ルールの検証にオッズの概念を利用した数理モデルが使われています。ぜひ，オッズでも未来を測ってみてください。

第8回 エネルギー保存の法則（前編）



一橋大学大学院言語社会研究科
准教授

有賀 暢迪 / ありが のぶみち

1982年生まれ。京都大学総合人間学部卒業（2005年），京都大学大学院文学研究科博士後期課程研究指導認定退学（2010年）。国立科学博物館勤務を経て，2021年より現職。高校では「理系」を選択し，大学では物理学を主専攻としていたが，大学院から「文系」に転じて科学史を修めた。現在は，物理学・数理科学の歴史と，近現代日本の科学技術史という二つの領域で，幅広い研究・教育・実践を行っている。著書に，『力学の誕生』（単著，名古屋大学出版会），『20世紀物理学史』（共訳，名古屋大学出版会），『サイエンス5000年史』（監訳，ニュートンプレス）などがある。京都大学博士（文学）。

教科書に登場する物理法則の原典を訪ねる連載です。今回と次回は，エネルギーについての基本法則を取り上げます。

エネルギー保存の法則

物理にはさまざまな法則がありますが，とりわけ重要なのがエネルギー保存の法則です。この法則を学習する中学校３年の理科教科書には，次のように書かれています。

> ◉ 中学校理科
>
> **エネルギーが移り変わっても，エネルギーの総量は変化せず，つねに一定に保たれる。これをエネルギー保存の法則といい，自然界のもっとも基本となる法則の1つである。**

この法則が登場する中学校理科の教科書では，その説明が２段階で行われています。最初に「力学的エネルギー保存の法則」があり，その後で，さらに一般的な法則として「エネルギー保存の法則」が登場するのです。

そこで，今回はまず「力学的エネルギー保存の法則」を取り上げて，教科書に書かれている説明と，その原典を見ていきます。一般的な「エネルギー保存の法則」については次回説明することにします。

力学的エネルギー

そもそも「エネルギー」とは何でしょうか。私たちはこの言葉を日常的に，何となく使っていて，どういう意味かと改めて聞かれても答えにくいところがあります。これに対して物理の世界では，「エネルギー」とは「仕事をする能力」であるという明確な定義があります。ここでの「仕事」は，日常的な意味ではなくて，物体に力を加えてその向きに動かすという特定の操作を指します。

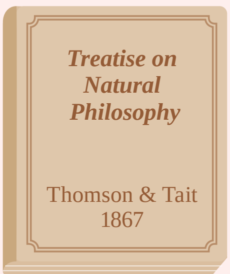
教科書に出ている具体的な例で説明しましょう。例えばハンマーを振り下ろしてくいを打つと，くいが地面に食いこみます。このとき，ハンマーはくいに力を加えて動かしているので「仕事」をしたと言えます。そうすると，振り上げたハンマーは仕事をする能力を持っていることになりますから，エネルギーを持っているというわけです。このように，高い所にある物体が持つエネルギーを，中学校理科では**位置エネルギー**と呼んでいます。

別の例として，ボウリングを考えてみます。投げたボールがピンに当たってピンが倒れるとき，ボールはピンに力を加えて動かしているので「仕事」をしたと言えます。したがって先ほどと同様に，動いているボールはエネルギーを持っていることになります。このような，運動している物体が持つエネルギーが**運動エネルギー**です。

力学的エネルギーとは，いま説明した２種類のエネルギー，「位置エネルギー」と「運動エネルギー」の和をいいます。そして，ある条件の下ではこれがつねに一定に保たれるというのが**力学的エネルギー保存の法則**です。

「力の保存の原理」

それでは，力学的エネルギー保存の法則はいつ，誰が最初に述べたのでしょうか。意外に思われるかもしれませんが，実はあまりはっきりしません。



「位置エネルギー」，「運動エネルギー」という言葉自体は，19 世紀の後半にイギリスの物理学者たちが広めたものです（英語では「ポテンシャル・エナジー」，「キネティック・エナジー」といいます）。例えば，この時代の有名な教科書であるＷ・トムソン（1824-1907）とＰ・Ｇ・テイト（1831-1901）の『自然哲学論』（1867 年）には，力学的エネルギー保存の法則にあたる内容が次のように書かれています（§278）。

> **したがって，もし物質宇宙のどこか一部分を完璧に隔離することができ，その外側にある物質にエネルギーを与えたり，エネルギーを受け取ったりしないようにできたとしたなら，その一部分の位置エネルギーと運動エネルギーの和はつねに同じだったであろう，と結論される。**

ですが，このことは，それ以前から知られていました。特に有名なのは，ドイツの物理学者・生理学者ヘルムホルツ（1821-1894）が 1847 年に発表した『力の保存について』です。

この論考は，一般的なエネルギー保存の法則を最初に述べたものとされていて，詳しい内容は次回紹介します。ここでは，その一部として，力学的エネルギー保存の法則にあたる部分だけを見ておきましょう。ヘルムホルツは次のように言っています（強調は原文のものです）。

> **距離にのみ依存する強さをもつ相互の引力および斥力の影響のもとにある自由な質点系の運動のすべての場合について，張力の量における消失はつねに活力における取得に等しく，前者の取得は後者の消失に等しい。すなわち存在する活力と張力の和はつねに一定である。**

ここに出てきた「張力」，「活力」とは，位置エネルギーと運動エネルギーのことだと思って差し支えありません。実際に，ヘルムホルツはこれらを数式で書いているのですが，これは今日でもそのまま通じます（高校レベル以上の物理学を知っている読者のために，現代的な記号を使って書くと $\int F\cdot dr$ と $\frac{1}{2}mv^2$ になります）。

したがって，「活力と張力の和がつねに一定」というのは「運動エネルギーと位置エネルギーの和がつねに一定」という意味なのですが，ヘルムホルツは「エネルギー」でなく「力」という表現を使っていました。そのため，この法則のことを**「力の保存の原理」**と呼んでいます。

このように「エネルギー」のことを「力」と言っていたのは，ヘルムホルツだけではありませんでした。実のところ，「活力」という考え方は，ヘルムホルツに先立つこと 150 年近くも前からあったのです。

「活力」の生みの親は，ニュートン（1643-1727）のライバルとしても知られる哲学者・数学者ライプニッツ（1646-1716）です。ライプニッツは，17 世紀の終わり頃に，運動している物体には「活力」が備わっていると考え，その「力」の大きさは質量（m）と速度の２乗（v^2）に比例するという説を唱えました。これが運動エネルギー概念の出発点です。ただ，ライプニッツには，「活力」（運動エネルギー）と対になる「張力」（位置エネルギー）という発想はなかったようです。

「張力」という用語は，ヘルムホルツが独自に導入したと思われます。この意味で，「活力と張力の和はつねに一定」と述べたのはヘルムホルツが最初です。ですが，ヘルムホルツよりも前に，誰かが別の言葉で力学的エネルギー保存の法則を述べていた可能性も否定はできないように思います。それというのも，次のような例があるからです。

ガリレオと力学的エネルギー保存の法則

再び，中学校理科の教科書に戻ります。この連載で参照して

いる啓林館の教科書では，力学的エネルギー保存の法則の説明で，振り子の運動を取り上げていました（図 1）。振り子が往復運動するとき，おもりの位置が低くなると速さは大きくなり，位置が高くなると遅くなります。とりわけ，図 1 の点 A と点 C の高さが同じであることから，おもりが行ったり来たりする間，力学的エネルギーは一定に保たれていることがわかります。

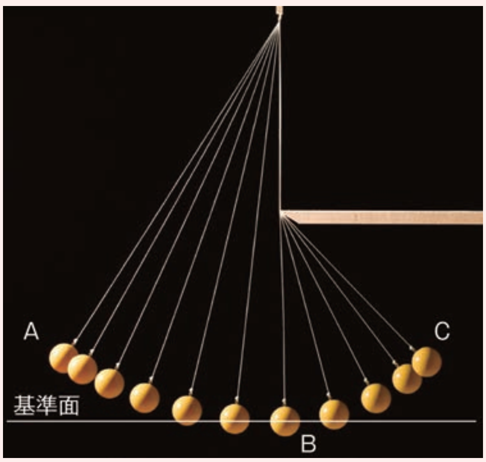


図 1　振子の運動　発光間隔 0.025 秒。『未来へひろがるサイエンス 3』（啓林館）より引用

科学史の観点から面白いのは，振り子を使ったこの説明が，ガリレオ（1564-1642）の主著の一つである通称『新科学論議』（日本では『新科学対話』とも呼ばれる）に登場することです。この本の出版は 1638 年で，ヘルムホルツが「力の保存の原理」を発表するよりも 200 年以上前に当たります。

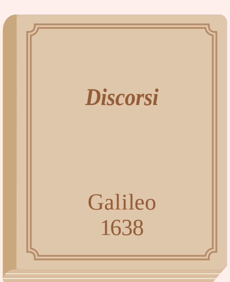


図 2 は，ガリレオの本に出てくる図を描き直したものです。糸 AC の先に鉛球 C がついており，A は釘で固定されています。鉛球を放すと，球は弧 CBD に沿って進み，ほぼ水平線 CD の高さまで到達します（「ほぼ」というのは，空気の抵抗や摩擦があるためです）。

次に，E や F に釘を打って，同様の実験をします。すると，球は C から下降して B に来た後，G や I まで上昇します。つまり，同じく水平線 CD の高さまで上がるわけです。このガリレオの実験（図 2）と，教科書の実験（図 1）が，まったく同じものであるのは明らかです。

では，ガリレオはこの実験から何がわかると言っているのでしょうか。関係する 2 箇所を抜き出してみましょう。

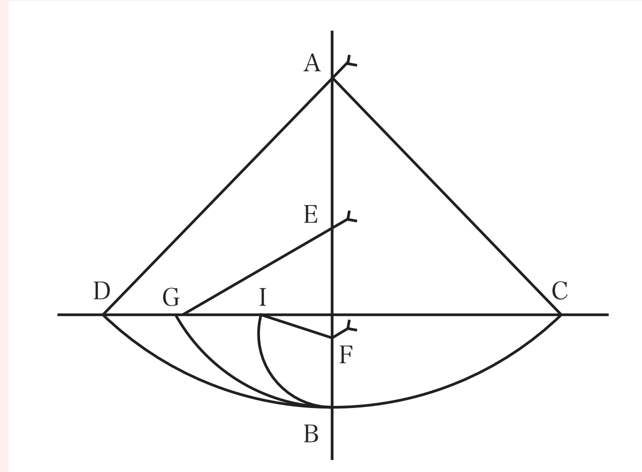


図 2　ガリレオ『新科学論議』の振り子の運動の図

……このことから，弧CBに沿って下降したときに鉛球が点Bで得たインペトゥスは，同様の弧BDに沿ってこの球が再び同じ高さまで上昇するのに足るものだったという結論が実際に導けます。

……こうして一般に，ある弧に沿った下降によって得られたモメントゥムは，どれも同一の可動体を同じ弧に沿って再び上昇させることができるものに等しいのです。

今度は「エネルギー」でも「力」でもなく，「インペトゥス」，「モメントゥム」という聞きなれない言葉が出てきました。この 2 つは，ここではほぼ同じ意味で使われていて，近い日本語を探すなら「勢い」くらいかと思います。

ガリレオが言っているのは，下降して得られた「勢い」によって物体は最初と同じ高さまで持ち上がる，ということです。ここには，「一定である」，「保存される」といった発想がありません。しかしそれにもかかわらず，ガリレオは，力学的エネルギーが保存される状況を正しく認識していたのです。

どうやら，力学的エネルギー保存の法則は，誰かが特定の時期に発見したものではないようです。長い時間をかけて，少しずつ，形作られてきたと言うべきなのでしょう。

原典についての参考情報

○ Hermann von Helmholtz, *Über die Erhaltung der Kraft*, 1847. / 【日本語訳】高林武彦訳「力の保存についての物理学的論述」，『世界の名著 現代の科学 1』（中央公論社，1973 年）所収.

○ Galileo Galilei, *Discorsi e dimostrazioni matematiche*, 1638. / 【日本語訳】伊藤和行・斎藤憲訳「新科学論議［抄］」，伊東俊太郎『ガリレオ』（講談社，1985 年）所収.

来るべき十八歳成年時代に向けて

武庫川女子大学教授・教学局次長
橋本 光能 ／ はしもと みつよし

改正公職選挙法の成立

2015年6月に改正公職選挙法が成立したことは記憶に新しいでしょう。その1年後の施行により選挙権年齢が20歳以上から18歳以上に引き下げられ，高校生（高等部生も含む。以下同）の一部も選挙権を有することとなりました。実に70年振りの改正であったことから，社会の大きな関心を集めました。

改正法が成立した同年の大阪府議会9月定例会では，選挙権年齢の引き下げに関して各会派から多くの質問が出され，熱い議論が交わされました。当時，私は大阪府教育委員会で高等学校課長の職にあったので，教育常任委員会で答弁する機会が多くありました。議論の主な論点は「政治的教養を育む教育」そのものの重要性はもちろんのこと，「高校生の政治活動」や「教職員の政治的中立性の確保」への懸念，「外国籍の生徒に対する配慮」などでした。とりわけ「高校生の政治活動」については，高校生が学校外で政治活動に参加する場合，参加届を学校に提出させるか否かについて全国的な議論を呼んでいたこともあり（国の通知は，届出制の採否は都道府県の判断に委ねるというものでした），府として判断を迫られることになりました。届出制を採るという選択をした県もありましたが，大阪府は採らないとの方針をいち早く決定し，他府県に先んじて打ち出すこととなったのです。

大阪府が届出を不要としたのは，「放課後や休日等に学校外で行われる選挙運動や政治活動は，家庭の理解の下に生徒が判断し行うもの」との考えに立ったからですが，選挙権年齢だけでなく成年年齢引き下げに関する議論があることを踏まえ，生徒の主体性を重視したという面が大きかったと思います。

改正民法の成立

その後，選挙権年齢に引き続いて成年年齢も引き下げられることが決まりました。2018年に改正民法が成立し，2022年4月から施行されることになっています。1876年の太政官布告にて20歳と決められた成年の定義が，146年の時を経て抜本的に変わります。

これにより，高校3年生は，選挙権の有無のみならず，成年者と未成年者とが混在する状況が生じることとなります。

民法等の法律により，成年になったらできることが種々規定されていますので，高校３年生で今までできなかったのに新たにできるようになる事柄が増えるということになります（例えば，親の同意がなくても契約ができる等）。そして，そのことに伴い，保護者や学校現場からは不安の声が聞かれます。

その典型的なものとして，保護者の不安には「子どもが，親の知らないところで勝手に契約をしないか不安でたまらない」「親権が及ばなくなったら，子どもと意見が対立した際にどのように対応すればいいのか」といったものが挙げられます。一方，学校現場には「親権に服さない 18 歳（高校３年生の一部）に対する進路面談はどうなるのか」といった懸念があると聞きます。つまり，「従来は三者面談で本人・保護者・学校それぞれが合意をして進路を決定していたのに，親権に服さないことを根拠に生徒が保護者の面談への同席を拒否し，自らの意思のみをもって進路決定をしたいと申し出た場合に学校はどう対応するのか」という懸念です。

生徒としっかり向き合うこと

18 歳成年時代を目前にして，保護者や学校現場が不安に思う気持ちはよく理解できます。きっと，この問いに対する正解はないのでしょう。ただ，正解はないとしても，保護者や教員が「正面から生徒と向き合う」「生徒の悩みや思いをしっかりと受け止める」ということが，ひとつの納得解となり得るのではないでしょうか。

ここで一旦，選挙権年齢の引き下げに話を戻します。前述したように，改正公職選挙法が成立した直後は，さまざまな心配や懸念の声がありました。しかし，私としては，選挙権年齢が 18 歳以上に引き下げられたことは，政治が若者の方を向いた絶好のチャンスと捉えていました。だからこそ，学校外での政治活動への参加について，許可制にも繋がりかねない届出制は採らないという方針を立てたのです。

ただし，そのためには高校生に「政治的教養を育む教育」をしっかりと行っていく必要があります。そうでないと，折角やってきた絶好のチャンスを生かすことができませんから。

文部科学省が 2020 年３月に公表した「主権者教育（政治的教養の教育）実施状況調査」という調査があります。これによると，2019 年度に高校第３学年に在籍した生徒への主権者教育実施率は 95.6％と高いものの，内容を見ると８割以上が「知識・技能」面での指導の域を出ていないのです。これでは「政治的教養を育む教育」の取り組みが不十分と言わざるを得ません。勿論，国からの通知にあるように「特定の見方や考え方の偏った取り扱いとならないこと」に十分留意することは大変重要ですが，そのことに十分留意した上で，国論を二分するような政治的事象を題材として取り上げ，生徒に考えさせたり議論させたりすることが必要なのではないでしょうか。そのように「生徒としっかり向き合うこと」が，政治的教養を育んでいくことに繋がっていくのだと思うのです。

来るべき 18 歳成年時代に向けて

新しい学習指導要領は 2020 年度から小学校で，2021 年度から中学校で実施されており，2022 年度からは高校で実施されます（高校は年次進行）。この新要領では「主体的・対話的で深い学び」の重要性が謳われています。この「主体的・対話的で深い学び」は，社会を生き抜く力を育むためのものであるのは勿論のこと，18 歳成年を育成していく上においても大きなキーワードであると考えています。

あと１年後には 18 歳成年時代がやってきます。18 歳の誕生日を迎えた日から高校生は成年になるのです。親権に服さなくなり，自身で契約行為ができるようになるのです。そのためには，「知識・技能」にとどまらず，「思考力・判断力・表現力」「学びに向かう力」を生徒に確実に身に付けさせ，権利を行使するとともに義務を遂行する成年に育てていくことが求められます。

具体的な方策として，ひとつは，高校の新学習指導要領で新設された必履修科目「公共」を有効活用することです。まさに「自立した主体としてよりよい社会の形成に参画する」「持続可能な社会づくりの主体となる」ことをめざす科目だからです。公民科の先生方の力量が問われることになりますが，是非とも頑張っていただきたいと切に願っています。そしてもうひとつは，教員も保護者も，生徒としっかり向き合うことです。政治的事象について議論するのに臆することはありません。政治の話も，社会の話も，そして生き方や人生そのものについて，生徒と膝を交えて議論しようではありませんか。それが 18 歳成年時代を迎える今，最も必要なことに思えてなりません。 ❖

子どもたちに科学する よろこびとたのしさを
～金沢子ども科学財団の活動紹介～

公益財団法人 金沢子ども科学財団
理事長
山崎 光悦 ／ やまざき こうえつ

はじめに

私たちのまち金沢は，アドレナリンを発見した高峰譲吉博士や天文学者の木村栄博士など，世界に通じる偉大な科学者を多数生み出しています。しかし，近年，子どもたちが直接自然にふれたり，実験を楽しんだりする機会が少なくなってきていると言われています。このままでは，これまで培われてきた金沢の科学に触れ親しむ土壌が失われてしまうのではないかと心配されていました。

そこで，子どもたちの科学に対する知的好奇心や，独創的で柔軟な発想を育むための環境を提供することを目的に平成12年に「金沢子ども科学財団」は誕生しました。平成23年度には公益財団法人に認定され，地域の教育機関を始め幅広い方々のご協力のもと，今では児童生徒の課外における科学的な活動を支援し発展させるさまざまな事業を展開しています。

主な事業

事 業 名	対 象	年間開催回数
子ども科学スタジオ	年長児～小学2年と保護者	45
出前科学スクール	保育園～小中学校	50
児童生徒科学研究作品展，表彰式	小学1年～中学3年	1
おもしろ実験・観察教室	小学3年～中学3年	各12
ジュニア科学者養成講座	小学3年～中学3年	14
児童科学教室	小学5・6年	各18
算数・数学チャレンジクラブ	小学5年～中学3年	各12
算数・数学オリンピック支援講座	小学5年～中学3年	各11
交流事業	小学5年～中学3年	4
中学校サイエンスクラブ	中学1年～3年	10

①児童科学教室

児童科学教室の様子

昭和40年から金沢市教育委員会が主体となり行ってきた事業を継承したもので，金沢市内の小学５年生の中から理科に興味を持つ児童を集め，２年間のカリキュラムを通じて科学的な態度・能力の向上を図ることを目的としています。現在は泉，中央，明成の３小学校で活動を展開しており，令和２年度の55期生までに6,015名の修了生を送り出しています。金沢市近郊の小学校に勤務する理科に堪能な教員や，大学生・大学院生のボランティアが指導にあたり，５年生は基礎的な技能を習得するための基礎実験に，６年生は数人のグループで年間を通して自由研究に取り組みます。

②中学校サイエンスクラブ

糸魚川ー静岡構造線の露頭を見学

科学に興味や関心を持つ金沢市内の中学生に対して，「観察・実験，探究活動などの体験的学習を通して，科学的なものの見方・考え方などの豊かな科学的素養を育成すること」を目的として平成12年に開設しました。金沢市立小将町中学校を拠点に，中学校の先生だけでなく，高校や大学の先生も講師として招き，日頃学校で学ぶ内容をより発展させた実験・観察や自由研究，野外での自然環境調査などの探究活動を行っています。

③おもしろ実験・観察教室

毎回，一般公募した小学３年生から中学３年生までの子どもたちを対象に，大学教授，大学生，小・中・高等学校の教員などが講師となり，物理・化学・生物・地学などの専門性の高い科学実験・観察の楽しさやおどろき，よろこびを体験する場を提供しています。

液体窒素を用いた科学実験

講座の例

・金沢大学角間の里山自然探検（小学３年生～中学生）

・手取川周辺の地層を掘り，化石を発掘
（小学４年生～中学生）

・テルミット反応などによる鉄のうつりかわり
（小学５年生～中学生）

④算数・数学チャレンジクラブ

将来の科学・技術を担う人材の育成をめざし，算数・数学に興味や関心を持つ小学５年生から中学３年生までを対象に，学校の授業では味わえないユニークな学習を通して，算数･数学の知識や技能に加え，「考える力」や「創造力」，「独創性」の基礎を培います。さらに，より発展的で高度な算数オリンピックに向けた支援講座も開講しています。

歩いた軌跡をグラフに変換

講座の例

・４色問題に挑戦（小学５年生）

・ポリドロン（小学６年生）

・循環小数からのプレゼント（中学１年生）

・一刀切り（中学２年生）

・音楽と数学（中学３年生）

⑤子ども科学スタジオ

未就学の年長児及び小学１・２年生の児童とその保護者を対象に，毎週異なる内容で科学実験や自然観察を行う教室を開催しています。平成 19 年から開始し，令和元年には参加者累計が５万人に到達しました。音・光・空気・水・力・電気・化学変化などによる身の回りで生じる現象や，動植物・化石・宇宙などをテーマに，身近にある物を使ったものづくりや科学遊び，科学的な内容に関する実験のほか，野外での自然観察会も行っています。

人工イクラづくり

講座の例

・お菓子の箱を用いたバズーカ砲づくり

・冬の渡り鳥などの野鳥観察

・人工イクラづくり

おわりに

金沢子ども科学財団は令和２年度に 20 周年を迎えました。

小・中・高等学校や高等専門学校・大学の諸先生方，大学生・大学院生，さらに民間のボランティアなどの幅広い方々に講師をお引き受けいただき，事業の内容を充実・発展させることができたお蔭もあって，毎年 8,000 名を超える子どもたちがさまざまな科学活動を楽しめるようになりました。今後も子どもたちの科学する心を育み，創意と工夫によって科学の進展に貢献する“科学好きな子どもたち”を一人でも増やしていけるよう，独創性ある事業活動に努めてまいります。

金沢子ども科学財団 HP
https://kodomokagaku.or.jp/

編集後記

コロナ禍の中，1 人 1 台のタブレットやオンライン授業など学校にも新たな様式が導入されました。
私たちは，今まさに時代の変わり目にいるのだと，前向きに捉えましょう。
今年も「算数・数学の自由研究」作品コンクールを開催いたします。多数のご応募をお待ちしております。
次号では「令和の日本型学校教育」について特集します。

(財)理数教育研究所 事務局

知られざる女性数学者の素顔 第11回

ヒュパティア
～歴史に残る最古の女性数学者～

サイエンスナビゲーター®　桜井 進／さくらい すすむ

2009 年に公開されたスペイン映画「アレクサンドリア」の主人公が女性数学者ヒュパティア。映画の中では彼女は天文学者として描かれている。1 世紀の天文学者プトレマイオスの『アルマゲスト』で展開された天体の運行理論が天動説。『宇宙体系』とも呼ばれるこの本は，プトレマイオス自身による天体観測データおよび天体の位置計算に必要とされる球面三角法，幾何学，宇宙論を広く網羅した 13 巻からなる大著で，ヒュパティアはその注釈書を著している。アストロラーベ（天体観測機器・アナログ計算機）およびプラネティカ（惑星儀）がヒュパティアの発明だとする説もあるほどヒュパティアは天文学者として活躍した。天文学者ヒュパティアの偉大なる天分を支えたのが自身の数学であった。

ヒュパティアは紀元 370 年頃にエジプトで生まれた。当時，世界で最も学問の栄えていた国際都市がアレクサンドリアであった。アレクサンドリア大学の数学教授であった父テオンは娘に数学をはじめ十分なまでの教育――美術，文学，科学，哲学――を与え，演説法（雄弁術）を習得させ，さらには水泳，乗馬，登山を習わせた。果たして，ヒュパティアは健全な身体と驚異的な精神を持つ人間へと成長する。

ヒュパティアは長い（10 年ほどと言われている）旅行の後（30 歳頃），アレクサンドリアに帰ると大学で数学と哲学を教え始めた。その講義にはヨーロッパ，アジア，アフリカから熱心な青年らが聴きに集まった。それほどに彼女の講義は魅力あるものだった。

ヒュパティアが大学で教えたのが『算術（アリスメティカ）』である。3 世紀にディオファントスによって書かれた古代ギリシャの数学書は『原論』と並ぶ数学の古典。そのラテン語版を読みながら整数論の考察を深めていったのが 17 世紀のフェルマーであった。有名なフェルマーの最終予想はこの本の余白にフェルマーがメモ書きしたものである。

ヒュパティアの数学上の業績については，冒頭で述べたアルマゲストについての注釈書以外に論文を著したようだが現存するものはほとんどない。多くはアレクサンドリアのプトレマイオス図書館とともになくなってしまった。ただ，論文『ディオファントスの天文学の法則』についての原文の一部が，15 世紀に，ヴァチカン図書館で発見された。

『アポロニウスの円錐曲線について』はヒュパティアが一般向けに著したものである。ユークリッドについての論文は父との共著であった。これらの著書の多くは，自分の学生のための教科書として書いたものである。

ヒュパティアのもっとも優れた弟子の 1 人がキレネのシュネシウスである。彼の手紙の中に師ヒュパティアについての記述を見つけることができる。冒頭に述べたアストロラーベおよびプラネティカがヒュパティアによる発明であるという記述がその 1 つである。手紙には，水蒸留装置，水位測定装置，液体の比重計もヒュパティアによる発明であることが書かれてある。

数学者ヒュパティアのもう一つの顔が哲学者である。彼女は，新プラトン主義と呼ばれるギリシャ思想の一派に属していた。学術的・科学的で神秘主義を廃した科学的理性主義を第一に掲げたものだった。それゆえにこの派は，当時支配的だったキリスト教の教条的信仰に真っ向から逆らうもので，キリスト教指導者をひどく脅かした。彼らをはじめ教徒は哲学者ヒュパティアを異端と考えた。多くの数学者，哲学者らが描かれたラファエルの名画「アテネの学園」にヒュパティアが入っていないのはヒュパティアが教会と仲が悪かったからかもしれない。

当時，ローマ帝国皇帝テオドシウス 1 世はキリスト教徒として，異教と異端派に対してローマ帝国全域で迫害の方針を定めた。アレクサンドリアでもユダヤ人の違法で強制的な追放運動が巻き起こっていた。果たして，神を冒涜する異端派ヒュパティアにも魔の手が襲ってきた。415 年，狂信者の暴徒によってヒュパティアは殺害され非業の死を遂げた。享年 45 歳（ないし 65 歳）。

ヒュパティアの人生は，その見事なキャリアと劇的な最期により，後世に多数の作家による文学作品として語り継がれる伝説となった。モザンは 1913 年の本の中でヒュパティアを次のように讃えた。

彼女は古代女性の中で，詩におけるサッフォー，哲学と雄弁術におけるアスパシアにも比すべき者で，女性の中の最高の栄光である。学識の深さ，才能の多面性において，彼女に並ぶ者は，同時代にはほとんどなく，プトレマイオス，ユークリッド，アポロニウス，ディオファントス，ヒッパルコスなどの輝かしい科学者の間でも，特に異彩を放つ地位を占める資格がある。

Rimse（リムス） No.31

編集･発行　（財）理数教育研究所

大阪オフィス
〒543-0052　大阪市天王寺区大道4丁目3番23号
TEL.06-6775-6538　/　FAX.06-6775-6515

東京オフィス
〒113-0023　東京都文京区向丘2丁目3番10号
TEL.03-3814-5204　/　FAX.03-3814-2156

E-mail : info@rimse.or.jp
https : //www.rimse.or.jp
※本冊子は，上記ホームページでもご覧いただけます。
印刷所：岩岡印刷株式会社
デザイン：株式会社 アートグローブ
本文イラスト：株式会社 アートグローブ
表紙写真 : ⓒ Roy Scott/Ikon Images /amanaimages

2021年6月20日発行