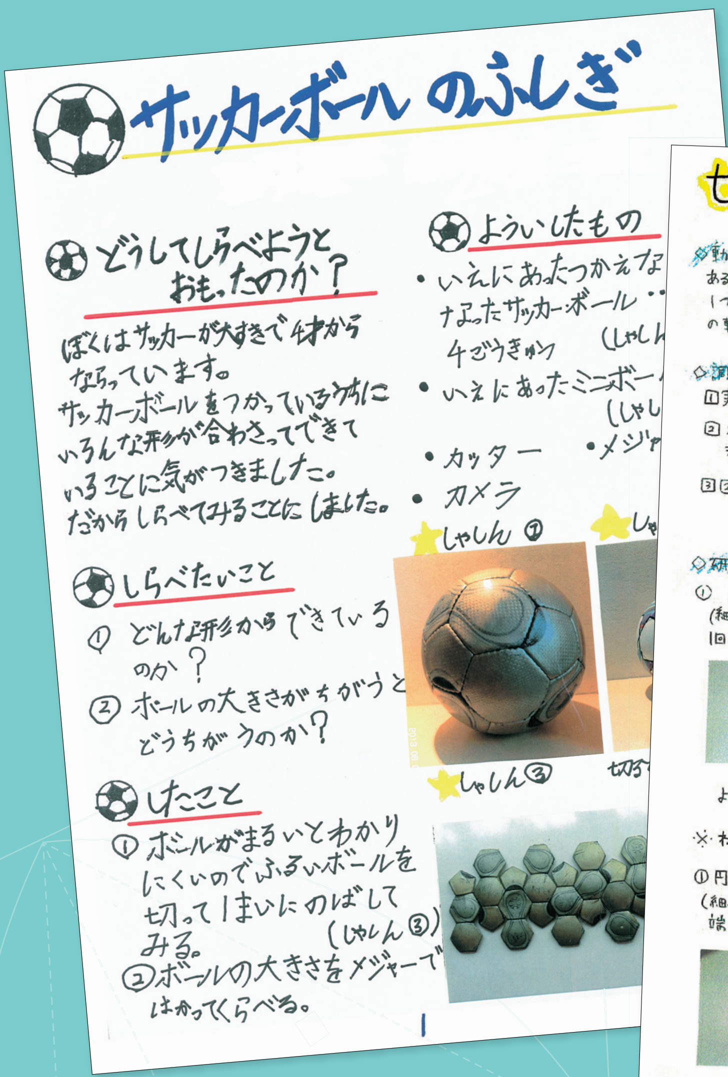
算数・数学の自由研究 事例集

MATHコン
～数理の輝き 見つけて活かす～


サッカーボールのふしぎ

どうしてしらべようとおもったのか？

ぼくはサッカーが大すきで4才からならっています。サッカーボールをつかっているうちにいろんな形が合わさってできていることに気がつきました。だからしらべてみることにしました。

しらべたいこと

① どんな形からできているのか？

② ボールの大きさがちがうとどうちがうのか？

したこと

① ボールがまるいとわかりにくいのでふるいボールを切って1まいにのばしてみる。（しゃしん③）

② ボールの大きさをメジャーではかってくらべる。

ようい したもの

・いえにあったつかえなくなったサッカーボール‥4ごうきゅう （しゃしん

・いえにあったミニボー （しゃし

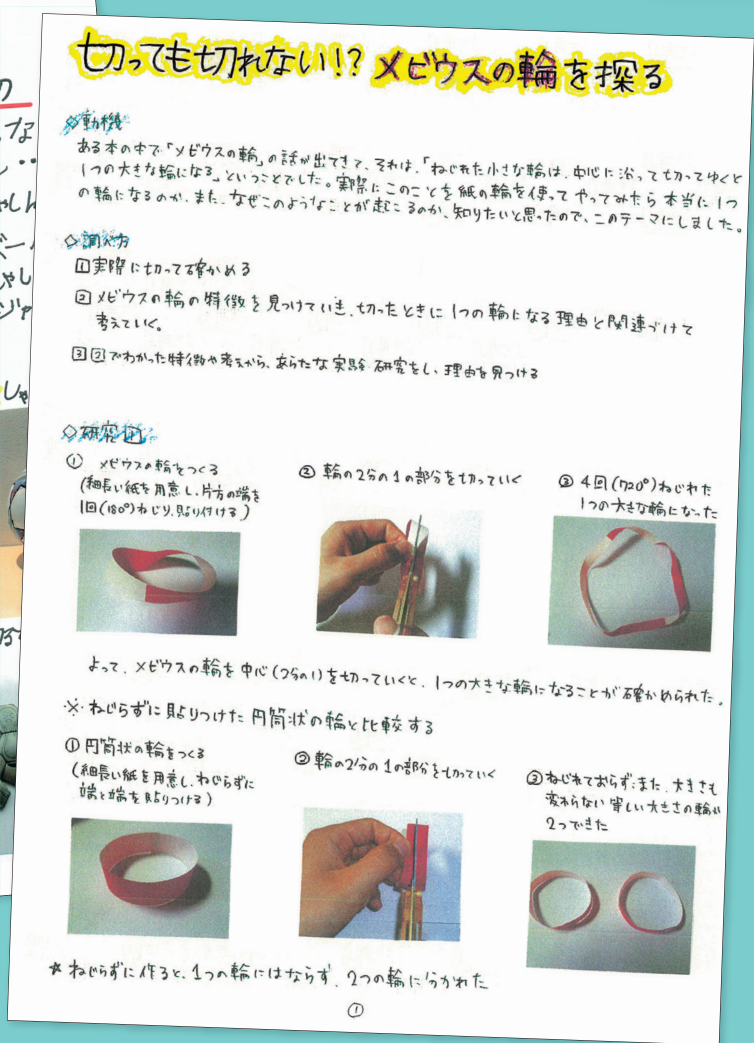
・カッター ・メジャ

・カメラ

しゃしん①

しゃしん③

1


切っても切れない!? メビウスの輪を探る

◇動機

ある本の中で「メビウスの輪」の話が出てきて、それは、「ねじれた小さな輪は、中心に沿って切ってゆくと1つの大きな輪になる」ということでした。実際にこのことを紙の輪を使ってやってみたら本当に1つの輪になるのか、また、なぜこのようなことが起こるのか、知りたいと思ったので、このテーマにしました。

◇調べ方

1 実際に切って確かめる

2 メビウスの輪の特徴を見つけていき、切ったときに1つの輪になる理由と関連づけて考えていく。

3 2でわかった特徴や考えから、あらたな実験研究をし、理由を見つける

◇研究1

① メビウスの輪をつくる（細長い紙を用意し、片方の端を1回（180°）ねじり、貼り付ける）

② 輪の2分の1の部分を切っていく

③ 4回（720°）ねじれた1つの大きな輪になった

よって、メビウスの輪を中心（2分の1）を切っていくと、1つの大きな輪になることが確かめられた。

※ねじらずに貼りつけた円筒状の輪と比較する

① 円筒状の輪をつくる（細長い紙を用意し、ねじらずに端と端を貼りつける）

② 輪の2分の1の部分を切っていく

③ ねじれておらず、また、大きさも変わらない等しい大きさの輪が2つできた

☆ねじらずに作ると、1つの輪にはならず、2つの輪に分かれた

①

Rimse

はじめに

「算数・数学の自由研究」と聞いて，あなたは何を思い浮かべますか？

昨年の第1回コンクールを行う前には，「理科や社会科ならイメージがわくけど，何を研究するの」「自由研究って，公式や定理の使い方を調べることなの」という疑問や質問の声が多く寄せられるだろうと思っていました。

ところが，夏休みを終えたあたりから，全国の小学生・中学生・高校生から応募が寄せられ，最終的に9,132もの作品が届きました。（海外からも応募がありました！）

作品を通じて思うのは，子どもたちが，毎日，いろいろなことに気がつき，たくさんの発見をしていることです。そして，その多くは算数・数学的な発見です。たとえば，授業中の先生の言葉をきっかけに，「そうだったら，こうなるのではないか」と思うこともあるでしょう。また，街中を歩いていて目にした看板の中に素敵な形や決まりが隠れていることを発見するかもしれません。

残念ながら，子どもたちが「なぜだろう」と疑問に思ったその時に，その場に立ち止まって，考え込むことは許されないでしょう。でも，先生をはじめとする周りの大人たちが，そうした子どもたちの発見を聞く機会を作り，受け止めてあげさえすれば，子どもたちは自分の発見を確信に変えるべく，自ずと考察を始めていきます。

今回取り上げた自由研究作品の事例は，2013年に応募していただいた全国の小学生・中学生・高校生の作品から選出しました。授業で習ったことや教科書に書いてあることを自分なりに発展させてまとめた研究もあれば，身のまわりにあるものや出来事に興味を感じて調べた研究もあります。

こうした経験を経た子どもたちは「算数って自由だ」「数学は社会のいろいろなところに使われている」と感じることができるでしょう。そして，そう感じた瞬間から，“算数・数学”での学びが子どもたちの生きる力として活用されるようになります。

算数・数学の自由研究を通して，子どもたちの中に秘められた力を引き出す機会を作ってみませんか。そのような取組みに，この事例集が少しでも役に立てば幸いです。

2014年5月

算数・数学の自由研究 作品コンクール
中央審査委員長　**根上 生也**（横浜国立大学大学院 教授）

目　次

「サッカーボールのふしぎ」

サッカーボール のふしぎ

どうしてしらべようとおもったのか？

ぼくはサッカーが大すきで4才からならっています。
サッカーボールをつかっているうちにいろんな形が合わさってできていることに気がつきました。
だからしらべてみることにしました。

よういしたもの

- いえにあったつかえなくなったサッカーボール…4ごうきゅう（しゃしん①）
- いえにあったミニボール（しゃしん②）
- カッター
- メジャー
- カメラ

しらべたいこと

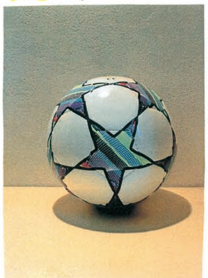
① どんな形からできているのか？
② ボールの大きさがちがうとどうちがうのか？

したこと

① ボールがまるいとわかりにくいのでふるいボールを切って1まいにのばしてみる。（しゃしん③）
② ボールの大きさをメジャーではかってくらべる。

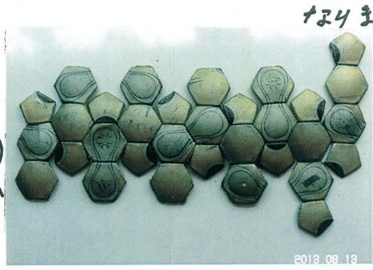
しゃしん①

しゃしん②

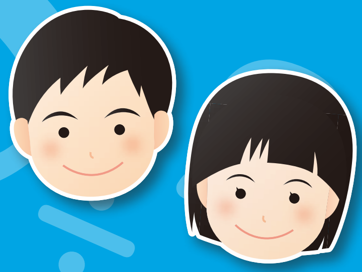


しゃしん③

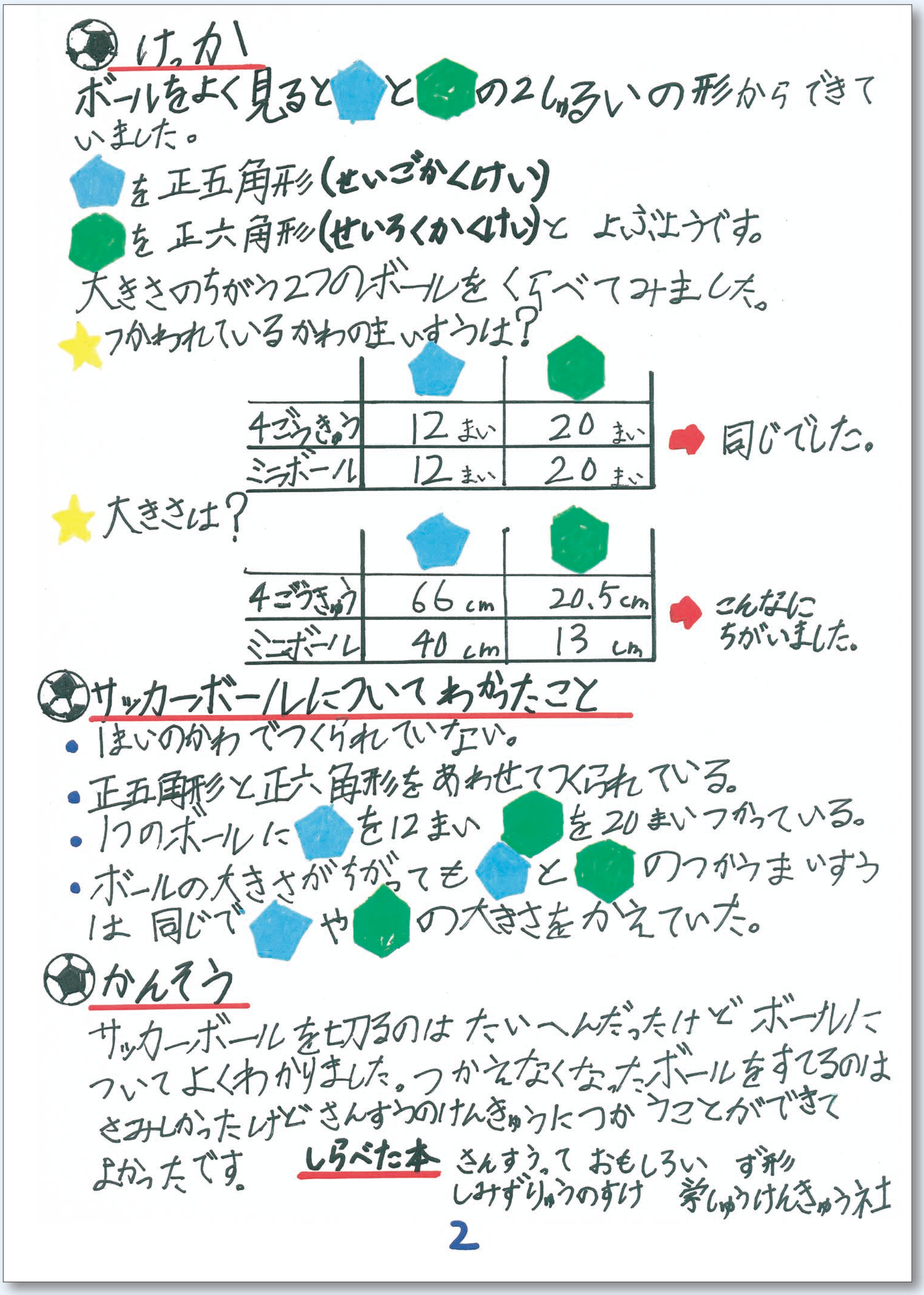
切るとこんな形になりました♪



1



小学校2年生 作品例



けっか

ボールをよく見ると⬟と⬢の2しゅるいの形からできていました。

⬟を正五角形(せいごかくけい)

⬢を正六角形(せいろくかくけい)と よぶようです。

大きさのちがう2つのボールをくらべてみました。

★つかわれているかわのまいすうは?

	⬟	⬢
4ごうきゅう	12まい	20まい
ミニボール	12まい	20まい

→ 同じでした。

★大きさは?

	⬟	⬢
4ごうきゅう	66cm	20.5cm
ミニボール	40cm	13cm

→ こんなにちがいました。

サッカーボールについてわかったこと

- 1まいのかわでつくられていない。
- 正五角形と正六角形をあわせてつくられている。
- 1つのボールに⬟を12まい⬢を20まいつかっている。
- ボールの大きさがちがっても⬟と⬢のつかうまいすうは同じで⬟や⬢の大きさをかえていた。

かんそう

サッカーボールを切るのはたいへんだったけどボールについてよくわかりました。つかえなくなったボールをすてるのはさみしかったけどさんすうのけんきゅうにつかうことができてよかったです。

しらべた本 さんすうっておもしろい ず形 しみずりゅうのすけ 学しゅうけんきゅう社

2

身のまわりの「ふしぎ」を，じょうずに見出しをつけてまとめることができましたね。とても読みやすく，わかりやすいまとめになっています。ひょうにまとめることもじょうずにつかっています。日ごろじゅぎょうで，ノートをじょうずにとっているようすが目に見えるようです。来年もこのじょうずなまとめ方で，自由研究にちょうせんしてみてください。

「ぼくが学校に通っていなかったら」

1、目的

ぼくは、1年生の時に201日、2年生の時に210日、3年生で75日(1学期)間小学校に通っています。
ぼくは今まで486日間学校に通っていますが、もしも学校に通っていなかったらどこまで移動しているか、そのキョリを調べようと思いました。

2、方法

家から学校までのおうふくのキョリを歩測とHPで調べて、学校に行った日数(486日)とかけます。

まず歩測のために、自分の歩幅を調べました。

歩幅の調べ方
はじめに10歩歩いて、その長さをメジャーではかります。
それを3回くり返し、10歩の長さの平均を出します。
最後に10でわって、自分の歩幅を決めます。

回数	1回目	2回目	3回目
10歩の長さ	544cm	547cm	538cm

544＋547＋538＝1,629
1,629÷3＝543
543÷10＝54.3

1歩の歩幅 54cm

歩測調査しているところ ▶

1

3、経路と調べ方

行き

家
(徒歩) ①歩測
A駅
(T線) ②HP1 → 13,200m
B駅
(徒歩) ③歩測
B駅バス停
(Tバス U12) ④HP2 → 3,040m
S学園下バス停
(徒歩) ⑤歩測
S学園初等学校

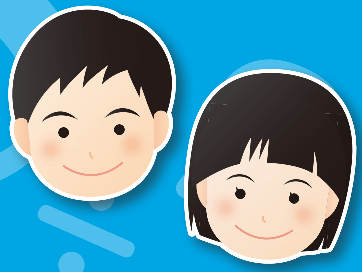
帰り

(徒歩) ⑥歩測
Cバス停
(Tバス U12) ⑦HP2 → 2,330m
Bバス停
(徒歩) ⑧歩測
B駅
(T線) ⑨HP1 → 13,200m
A駅
(徒歩) ⑩歩測
家

HP1 http://www. T電鉄HP
HP2 http://www. Tバス HP

2

小学校3年生 作品例



4、歩測調査

①、⑩　家ーA駅

回数	1回目	2回目	3回目
歩数	427歩	425歩	431歩

427+425+431=1283
1283÷3=427.6
428歩X54cm(歩はば)=23,112cm　　231m12cm

③、⑧　B駅ーB駅バス停

回数	1回目	2回目	3回目
歩数	170歩	170歩	167歩

170+170+167=507
507÷3=169
169歩X54cm=9126cm　　91m26cm

⑤　S学園下バス停ーS学園初等学校

回数	1回目	2回目	3回目
歩数	54歩	57歩	54歩

54+57+54=165
165÷3=55
55歩X54cm=2,970cm　　29m70cm

⑥　S学園初等学校ーCバス停

回数	1回目	2回目	3回目
歩数	1333歩	1429歩	1356歩

1333+1429+1356=4118
4118÷3=1372.66
1373歩X54cm=74142cm　　741m42cm

3

5、結果

① 231m12cm
② 13200m
③ 91m26cm
④ 3040m
⑤ 29m70cm
⑥ 741m42cm
⑦ 2330m
⑧ 91m26cm
⑨ 13200m
⑩ 231m12cm　　合計33185m88cm

家から学校までのおうふくのキョリは33185m88cmでした。
それに学校に行った日数、486日をかけます。

33185m88cmX486日=16128337m68cm
16128Km337m68cm

ぼくが今まで学校に通ったキョリは16128Km337m68cmでした。
それは、家からブラジルまでいっていた事がわかりました。

6、感想

ぼくが一番たいへんだったことは、学校からC駅のバス停まであつい中、3回もくり返し歩いたことです。
そしてびっくりしたことは、自分の家からブラジルまでいっていたことです。
ちなみにぼくは、せめてロシアぐらいだと思ってました。

4

学校での「長さ」の学習をいかして，実さいに歩測で調べたところがとてもすばらしいですね。そして，一歩の歩はばを計算し，それぞれの場所までの道のりを計算で細かく出して，きれいにまとめていますね。一つ一つの計算をていねいに，わかりやすく書けています。そして，結果と感想で，自分が歩いた長さが「ブラジル」までと同じだったというびっくりした気持ちがよく伝わってきます。テーマ・タイトルを決めるところも，全体を作ってからふさわしいものを考えたのではないかと思います。これもすばらしいです。この自由研究では，歩測した結果をそのまま使っていますが，さらにくふうして，これから何年か歩いたらどのくらい遠くまでいけるのかなど，「予測」することもできそうです。さらにこの学習をふかめていって下さい。

「地球と宇宙の遠近関係」

なぜ調べようと思ったのか

★ 宇宙には、地球から遠い星、近い星があります。その星まで地球から何キロかと考えるとあまりにも大きな数で分かりにくかったので、私達の身近にある乗り物などで何年、何日又は何時間かかるのかを調べようと思いました。

計算方法

$\boxed{\text{星までのきょり}} \div \boxed{\text{時速・秒速}} = \boxed{\text{かかる時間}}$

かかる時間 ÷ 24 = 日数
日数 ÷ 365 = 年数

時速・秒速

(私が実際にはかりました。) 徒歩 時速 5km
(私が実際にはかりました。) 自転車 時速 16km
新幹線 時速 300km
ジェット機 時速 1000km
スペースシャトル 時速 28000km
光 秒速 30万km

調べる星

月 水星 金星 火星 木星
土星 天王星 海王星

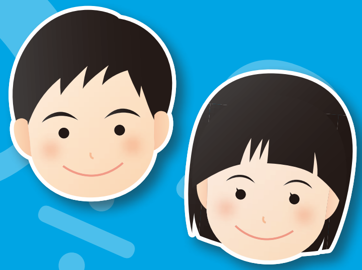
1

結果

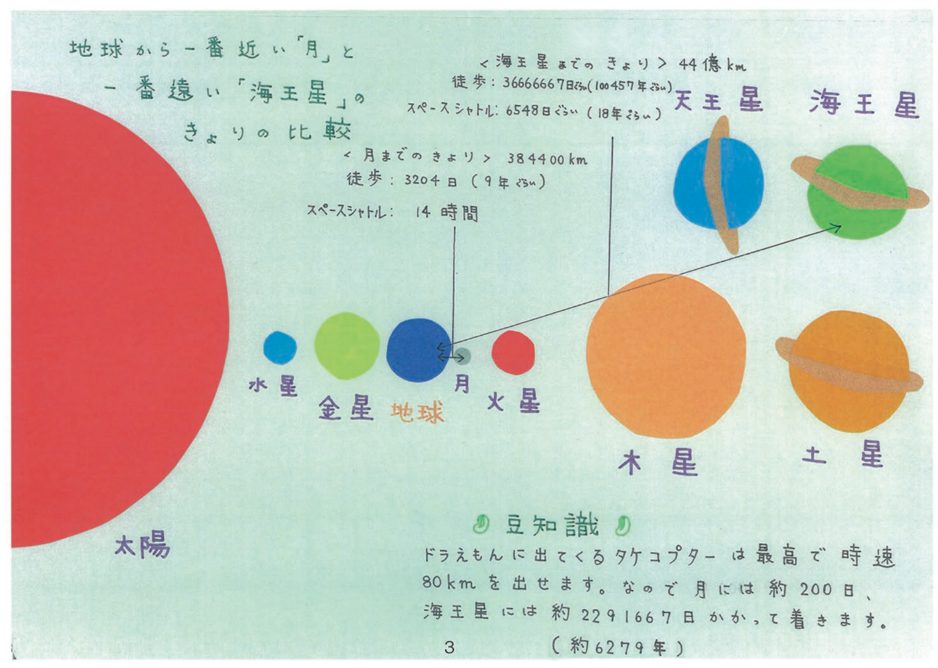
乗り物 / 星	徒歩 時速5km	自転車 時速16km	新幹線 時速300km	ジェット機 時速1000km	スペースシャトル 時速28000km	光 秒速30万km
月 距離 384400km	3204日 ≒9年	1001日 ≒2年9か月	53日	16日	14時間	1秒少し
水星 最短の距離 91500000km	762500日 ≒2089年	約238281日 ≒652年	約12708年 ≒35年	約3813日 ≒10年	約136日	305秒 ≒5分
金星 最短の距離 42000000km	350000日 ≒958年	109375日 ≒299年	約5833年 ≒16年	1750日 ≒5年	約63日	140秒 ≒2分
火星 最短の距離 78338770km	約652806日 ≒1813年	約204007日 ≒559年	約10880日 ≒30年	約3264日 ≒9年	約117日	約263秒 ≒4分
木星 最短の距離 630000000km	5250000日 ≒14384年	約1640621日 ≒4495年	87500日 ≒240年	約26250日 ≒72年	約938日 ≒3年	2100秒 35分
土星 最短の距離 12億8000万km	約10666667日 ≒29224年	約3333333日 ≒9132年	約177778日 ≒487年	約53333日 ≒146年	約1905日 ≒5年	約4267秒 ≒71分
天王星 最短の距離 27億km	22500000日 ≒61644年	7031250日 ≒19236年	375000日 ≒1027年	112500日 ≒308年	約4018日 ≒11年	9000秒 ≒150分 ≒2.5時間
海王星 最短の距離 44億km	約36666667日 ≒100457年	約11458335日 ≒31392年	約611111日 ≒1674年	約183333日 ≒502年	約6548日 ≒18年	約14667秒 ≒244分 4時間

徒歩の約3倍の時速が自転車の時速
自転車の約19倍の時速が新幹線の時速
新幹線の約3倍の時速がジェット機の時速
ジェット機の約28倍の時速がスペースシャトルの時速

2



小学校５年生 作品例



まとめ

☆ 計算してみると、乗り物によっては、生きている間に行けないような星もあり、おどろきました。また、今まで計算したことのない大きな数の計算を自分で計算したからこそ、よりよく分かりました。

☆ 大きな数を見ただけできょりを想像するよりも自分で計算して日数や年数にして考えると分かりやすかったです。また、色々な乗り物の時速も知れて良かったです。

☆ しょう来は、もっと早く星に着けるようになっていて、だれでも宇宙に行けるようになっているのかな、と思いました。

参考文けん

インターネット　「ちえぶくろ」

本　「うちゅうのえほん」

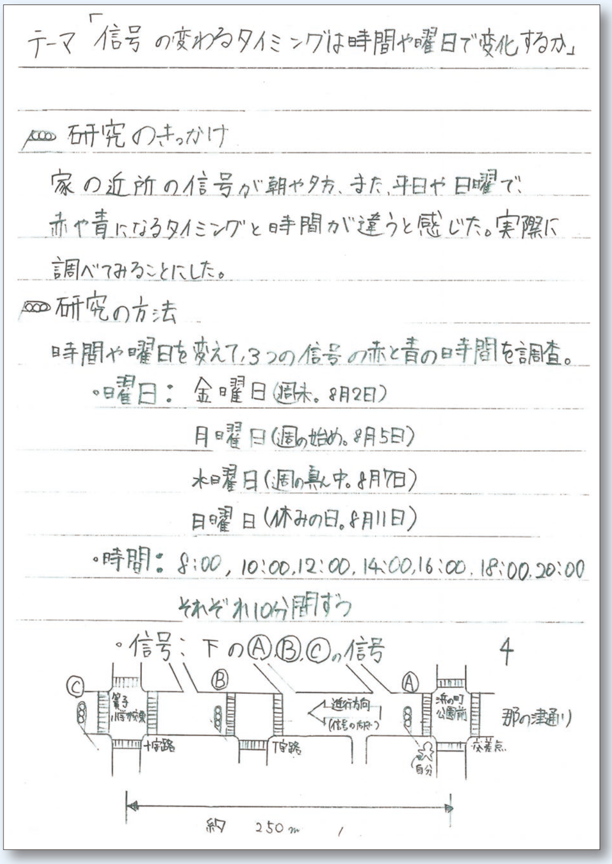
図かん　「星・星座」

4

想像しづらい宇宙までの距離を徒歩や自転車，新幹線など，身近なイメージできるもので比較ができています。結果を表にして見やすく整理できていますし，位置関係を図示していて，読む人に伝わりやすいまとめができています。

算数・数学の自由研究 事例集

「信号の変わるタイミングは時間や曜日で変化するか」



テーマ「信号の変わるタイミングは時間や曜日で変化するか」

研究のきっかけ

家の近所の信号が朝や夕方、また、平日や日曜で、赤や青になるタイミングと時間が違うと感じた。実際に調べてみることにした。

研究の方法

時間や曜日を変えて、3つの信号の赤と青の時間を調査。

・曜日：金曜日（週末。8月2日）
月曜日（週の始め。8月5日）
水曜日（週の真ん中。8月7日）
日曜日（休みの日。8月11日）

・時間：8:00，10:00，12:00，14:00，16:00，18:00，20:00
それぞれ10分間ずつ

・信号：下のⒶⒷⒸの信号

4

Ⓒ
Ⓑ
Ⓐ
賀子小学校東
十字路
T字路
進行方向（信号の向き）
浜の町公園前
交差点
自分
那の津通り）
約 250m

調査結果

時間と曜日ごとに、「赤と青の長さ」をまとめた。黄は青に含む。
それぞれ10分間の中で、同じ赤でも時間が異なる時があった。
調査の時の誤差もあるため、平均（小数点以下は四捨五入）の時間にし

金曜日 8月2日	Ⓐ 赤	Ⓐ 青	Ⓑ 赤	Ⓑ 青	Ⓒ 赤	Ⓒ 青
8:00	41	99	41	99	ー	ー
10:00	39	101	35	106	ー	ー
12:00	40	101	33	108	ー	ー
14:00	41	99	36	104	ー	ー
16:00	40	100	39	101	ー	ー
18:00	40	100	40	100	ー	ー
20:00	40	99	32	106	ー	ー

※最初は信号2つでスタート。（秒）

月曜日 8月5日	Ⓐ 赤	Ⓐ 青	Ⓑ 赤	Ⓑ 青	Ⓒ 赤	Ⓒ 青
8:00	43	93	43	94	ー	ー
10:00	42	99	36	104	ー	ー
12:00	41	100	35	105	ー	ー
14:00	41	100	36	105	32	108
16:00	40	100	40	100	32	109
18:00	39	101	39	101	32	108
20:00	40	100	31	109	32	107

※14:00から信号3つへ変更。（秒）

水曜日 8月7日	Ⓐ 赤	Ⓐ 青	Ⓑ 赤	Ⓑ 青	Ⓒ 赤	Ⓒ 青
8:00	44	113	42	117	37	120
10:00	41	101	35	107	35	107
12:00	40	100	35	106	30	110
14:00	39	102	34	107	33	108
16:00	39	96	40	95	31	103
18:00	38	99	30	95	31	103
20:00	37	102	29	110	33	106

（秒）

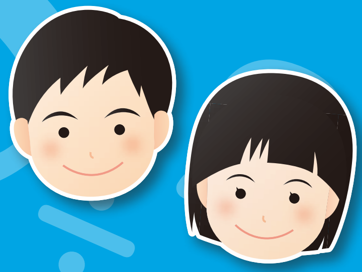
日曜日 8月11日	Ⓐ 赤	Ⓐ 青	Ⓑ 赤	Ⓑ 青	Ⓒ 赤	Ⓒ 青
※8:00	42	108	40	109	34	116
10:00	40	100	36	101	32	107
12:00	43	100	39	103	35	106
14:00	38	102	33	107	33	107
16:00	36	103	38	98	34	104
※18:00	39	99	40	98	31	107
※20:00	36	91	32	95	32	91

※8:00は8/4，18:00と20:00は8/12
盆休みを休日として代用

2

連続している３つの信号の変わり方と通過のしやすさに着目したおもしろい研究です。曜日と時間が違うデータを実測して収集し，青と赤の長さの差や割合を表にして考察しやすくする工夫もできています。また，A，B，Cの信号の青赤のタイミングのズレを図にしたり，３つの信号を止まらず通過する時間差をグラフ化したりしたことも，データをわかりやすく伝えることに役立っています。「安全と利便性」の面に焦点を当ててこのデータの背景を考察すると，新しい発見があるかもしれません。

小学校６年生 作品例



各信号の赤と青の平均時間を足したものを「1サイクル」とする。

1サイクルの中の青時間の割合を計算した。

金曜日	1サイクル(秒) Ⓐ	Ⓑ	Ⓒ	青の割合(%) Ⓐ	Ⓑ	Ⓒ
8:00	140	140	−	71	71	−
10:00	140	141	−	72	75	−
12:00	141	141	−	72	77	−
14:00	140	140	−	71	74	−
16:00	140	140	−	71	72	−
18:00	140	140	−	71	71	−
20:00	139	138	−	71	77	−
平均	140	140	−	71	74	−

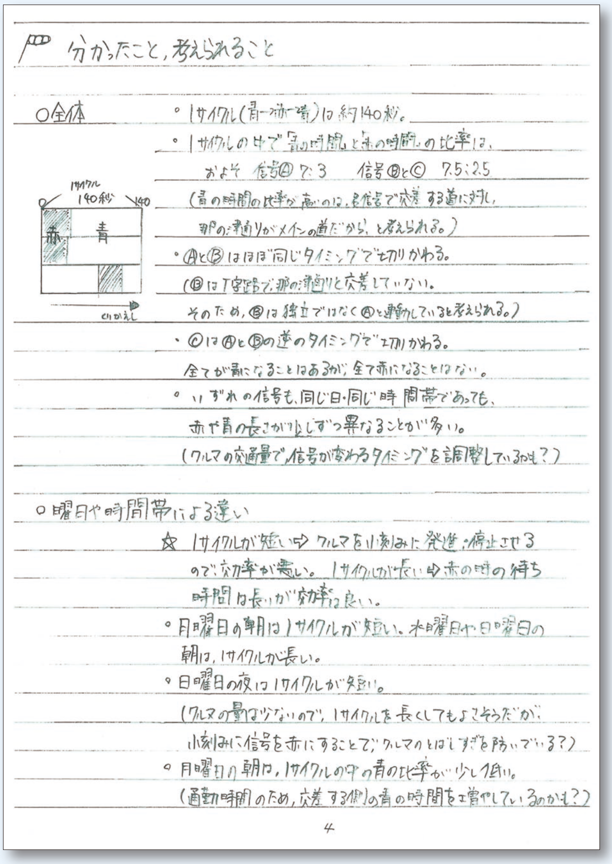
月曜日	1サイクル(秒) Ⓐ	Ⓑ	Ⓒ	青の割合(%) Ⓐ	Ⓑ	Ⓒ
8:00	136	137	−	68	68	−
10:00	141	140	−	70	74	−
12:00	141	140	−	71	75	−
14:00	141	141	140	71	74	77
16:00	140	140	141	71	71	77
18:00	140	140	140	72	72	77
20:00	140	140	139	72	78	77
平均	140	140	140	71	73	77

水曜日	1サイクル(秒) Ⓐ	Ⓑ	Ⓒ	青の割合(%) Ⓐ	Ⓑ	Ⓒ
8:00	157	159	157	72	74	76
10:00	142	142	142	71	75	75
12:00	140	141	140	71	75	79
14:00	141	141	141	72	76	77
16:00	135	135	134	71	70	77
18:00	137	125	134	72	76	77
20:00	139	139	139	73	79	76
平均	142	140	141	72	75	77

日曜日	1サイクル(秒) Ⓐ	Ⓑ	Ⓒ	青の割合(%) Ⓐ	Ⓑ	Ⓒ
※ 8:00	150	149	150	72	73	77
10:00	140	140	139	71	74	77
12:00	143	142	141	70	73	75
14:00	140	140	140	73	76	76
16:00	139	136	138	74	72	75
※ 18:00	138	138	138	72	71	78
※ 20:00	127	127	123	72	76	74
平均	140	139	138	72	73	76

	Ⓐ	Ⓑ	Ⓒ	Ⓐ	Ⓑ	Ⓒ
全体平均	140.3	139.7	139.7	71.4	73.9	76.5
		(秒)				(%)

3



分かったこと，考えられること

○全体

- 1サイクル(青→赤→青)は約140秒。
- 1サイクルの中で「青の時間」と「赤の時間」の比率は，
  およそ 信号Ⓐ 7:3　信号ⒷとⒸ 7.5:2.5
  (青の時間の比率が高いのは，各信号で交差する道に対し，那の津通りがメインの道だから，と考えられる。)
- ⒶとⒷはほぼ同じタイミングで切りかわる。
  (Ⓑは丁字路で那の津通りと交差していない。
  そのため，Ⓑは独立ではなくⒶと連動していると考えられる。)
- ⒸはⒶとⒷの逆のタイミングで切りかわる。
  全てが青になることはあるが，全て赤になることはない。
- いずれの信号も，同じ日・同じ時間帯であっても，
  赤や青の長さが少しずつ異なることが多い。
  (クルマの交通量で，信号が変わるタイミングを調整しているかも？)

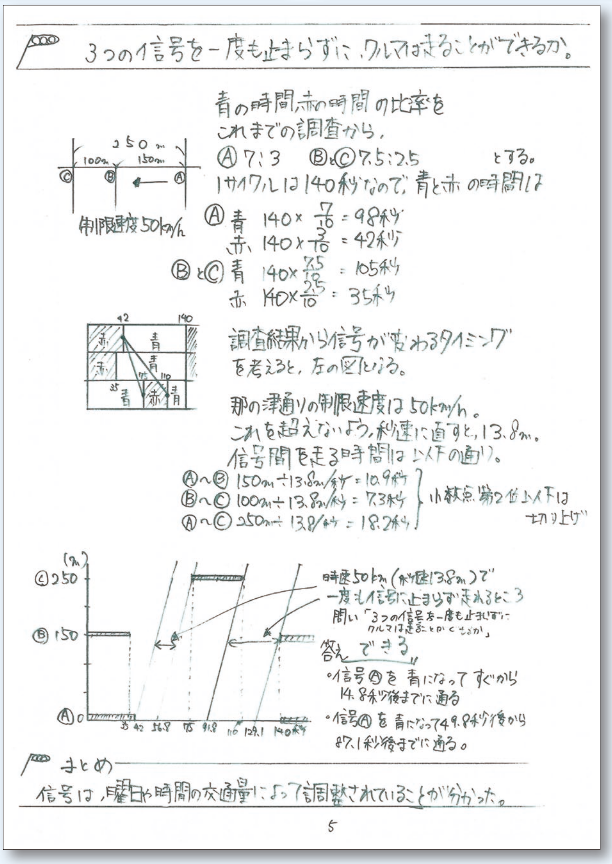
1サイクル　140秒　0　140　赤　青　くりかえし

○曜日や時間帯による違い

☆ 1サイクルが短い ⇨ クルマを小刻みに発進・停止させるので，効率が悪い。1サイクルが長い ⇨ 赤の時の待ち時間は長いが効率は良い。

- 月曜日の朝は1サイクルが短い。水曜日や日曜日の朝は，1サイクルが長い。
- 日曜日の夜は1サイクルが短い。
  (クルマの量は少ないので，1サイクルを長くしてもよさそうだが，小刻みに信号を赤にすることで，クルマのとばしすぎを防いでいる？)
- 月曜日の朝は，1サイクルの中の青の比率が少し低い。
  (通勤時間のため，交差する側の青の時間を増やしているのかも？)

4



3つの信号を一度も止まらずに，クルマは走ることができるか。

250m　100m　150m　Ⓒ　Ⓑ　Ⓐ

制限速度50km/h

青の時間，赤の時間の比率を
これまでの調査から，
Ⓐ 7:3　ⒷとⒸ 7.5:2.5　とする。
1サイクルは140秒なので，青と赤の時間は

Ⓐ 青 $140 \times \frac{7}{10} = 98$秒
　赤 $140 \times \frac{3}{10} = 42$秒

ⒷとⒸ 青 $140 \times \frac{7.5}{10} = 105$秒
　赤 $140 \times \frac{2.5}{10} = 35$秒

42　140　赤　青　赤　青　35　青　75　赤　110　青

調査結果から信号が変わるタイミングを考えると，左の図となる。

那の津通りの制限速度は50km/h。
これを超えないよう，秒速に直すと，13.8m。
信号間を走る時間は以下の通り。

Ⓐ〜Ⓑ $150m \div 13.8m/秒 = 10.9$秒
Ⓑ〜Ⓒ $100m \div 13.8m/秒 = 7.3$秒
Ⓐ〜Ⓒ $250m \div 13.8/秒 = 18.2$秒
小数点第2位以下は切り上げ

(m)　Ⓒ250　Ⓑ150　Ⓐ0　35　42　56.8　75　91.8　110　129.1　140秒

時速50km(秒速13.8m)で一度も信号に止まらず走れるところ

問い「3つの信号を一度も止まらずにクルマは走ることができるか」

答え　できる

- 信号Ⓐを青になってすぐから14.8秒後までに通る
- 信号Ⓐを青になって49.8秒後から87.1秒後までに通る。

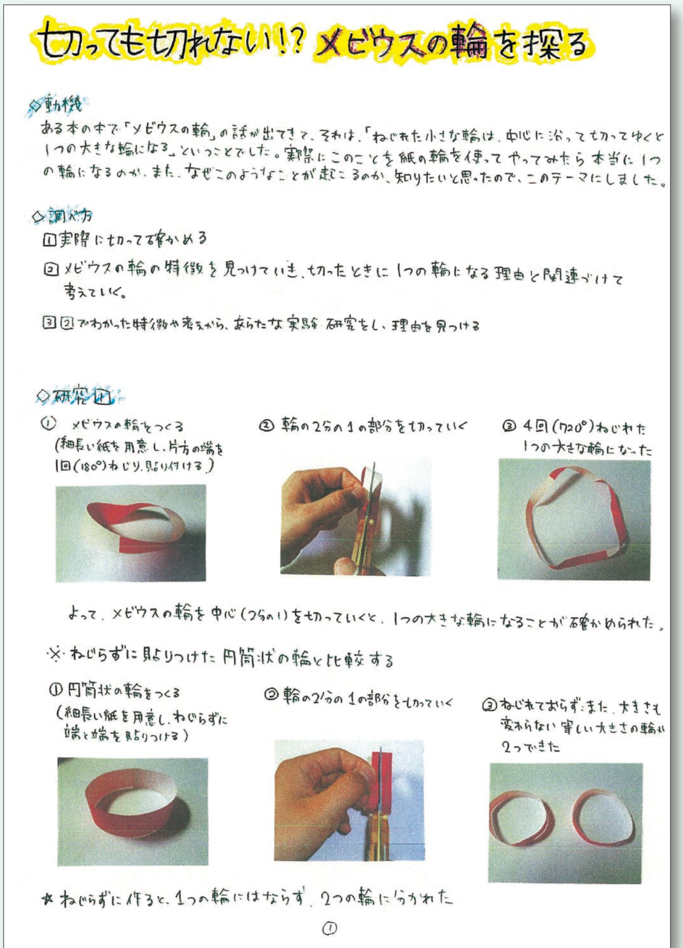
まとめ

信号は，曜日や時間の交通量によって調整されていることが分かった。

5

算数・数学の自由研究 事例集

「切っても切れない!? メビウスの輪を探る」



切っても切れない!? メビウスの輪を探る

◇動機

ある本の中で「メビウスの輪」の話が出てきて、それは、「ねじれた小さな輪は、中心に沿って切ってゆくと1つの大きな輪になる」ということでした。実際にこのことを紙の輪を使ってやってみたら本当に1つの輪になるのか、また、なぜこのようなことが起こるのか、知りたいと思ったので、このテーマにしました。

◇調べ方

1 実際に切って確かめる

2 メビウスの輪の特徴を見つけていき、切ったときに1つの輪になる理由と関連づけて考えていく。

3 2でわかった特徴や考えから、あらたな実験 研究をし、理由を見つける

◇研究1

① メビウスの輪をつくる (細長い紙を用意し、片方の端を1回(180°)ねじり、貼り付ける)

② 輪の2分の1の部分を切っていく

③ 4回(720°)ねじれた1つの大きな輪になった

よって、メビウスの輪を中心(2分の1)を切っていくと、1つの大きな輪になることが確かめられた。

※ねじらずに貼りつけた円筒状の輪と比較する

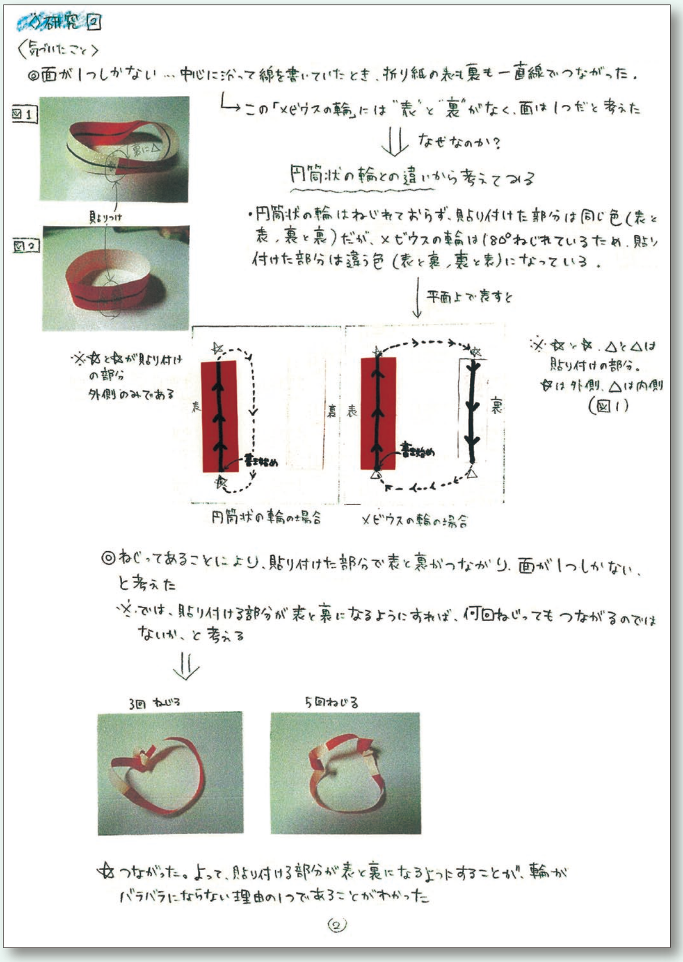
① 円筒状の輪をつくる (細長い紙を用意し、ねじらずに端と端を貼りつける)

② 輪の2分の1の部分を切っていく

③ ねじれておらず、また、大きさも変わらない等しい大きさの輪が2つできた

★ねじらずに作ると、1つの輪にはならず、2つの輪に分かれた

①



◇研究2

〈気づいたこと〉

◎面が1つしかない … 中心に沿って線を書いていたとき、折り紙の表も裏も一直線でつながった。

→この「メビウスの輪」には"表"と"裏"がなく、面は1つだと考えた

⇓ なぜなのか?

円筒状の輪との違いから考えてみる

・円筒状の輪はねじれておらず、貼り付けた部分は同じ色(表と表、裏と裏)だが、メビウスの輪は180°ねじれているため、貼り付けた部分は違う色(表と裏、裏と表)になっている。

↓ 平面上で表すと

◎ねじってあることにより、貼り付けた部分で表と裏がつながり、面が1つしかない、と考えた

※では、貼り付ける部分が表と裏になるようにすれば、何回ねじってもつながるのではないか、と考える

⇓

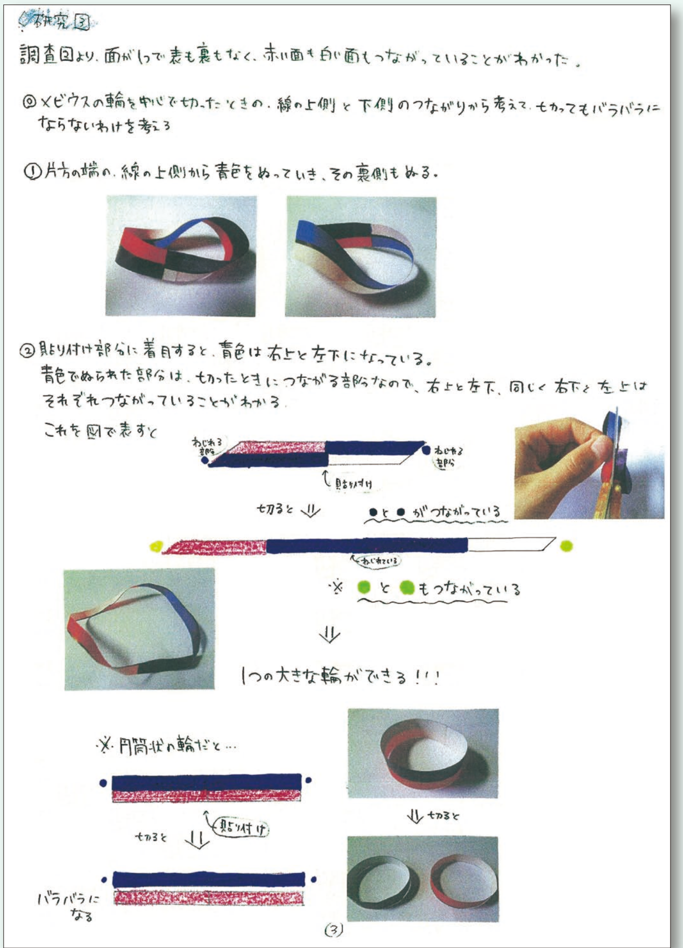
3回 ねじる

5回ねじる

☆つながった。よって、貼り付ける部分が表と裏になるようにすることが、輪がバラバラにならない理由の1つであることがわかった

②

中学校２年生 作品例



◇研究③

調査②より、面が1つで表も裏もなく、赤い面も白い面もつながっていることがわかった。

◎メビウスの輪を中心で切ったときの、線の上側と下側のつながりから考えて、切ってもバラバラにならないわけを考える

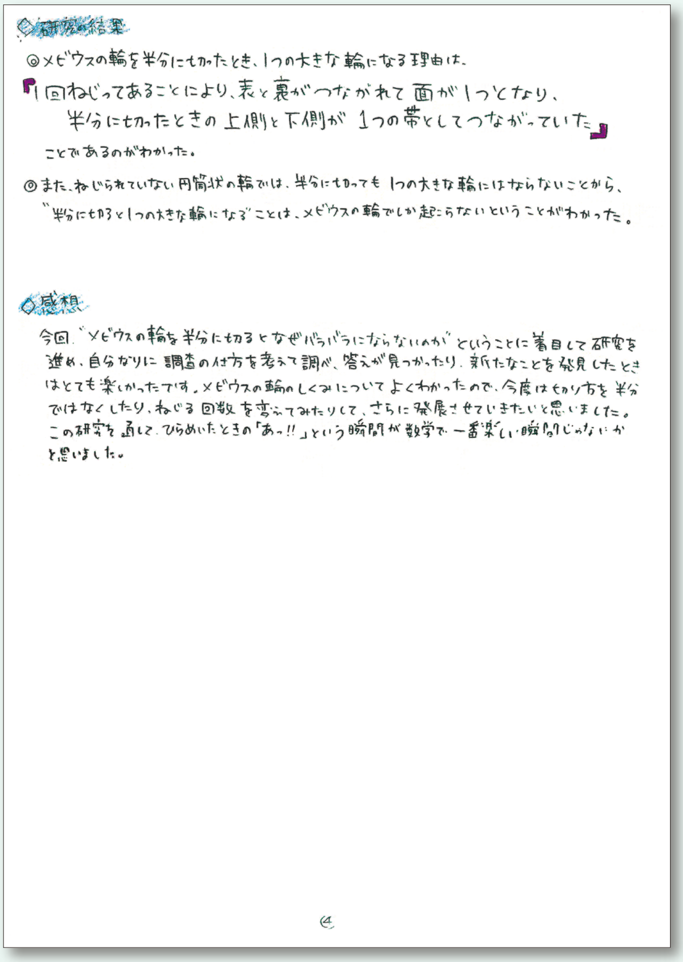
①片方の端の、線の上側から青色をぬっていき、その裏側もぬる。

②貼り付け部分に着目すると、青色は右上と左下になっている。
青色でぬられた部分は、切ったときにつながる部分なので、右上と左下、同じく右下と左上はそれぞれつながっていることがわかる。

これを図で表すと

1つの大きな輪ができる!!!

(3)



◇研究の結果

◎メビウスの輪を半分に切ったとき、1つの大きな輪になる理由は、
『1回ねじってあることにより、表と裏がつながれて面が1つとなり、
半分に切ったときの上側と下側が1つの帯としてつながっていた』
ことであるのがわかった。

◎また、ねじられていない円筒状の輪では、半分に切っても1つの大きな輪にはならないことから、"半分に切ると1つの大きな輪になる"ことは、メビウスの輪でしか起こらないということがわかった。

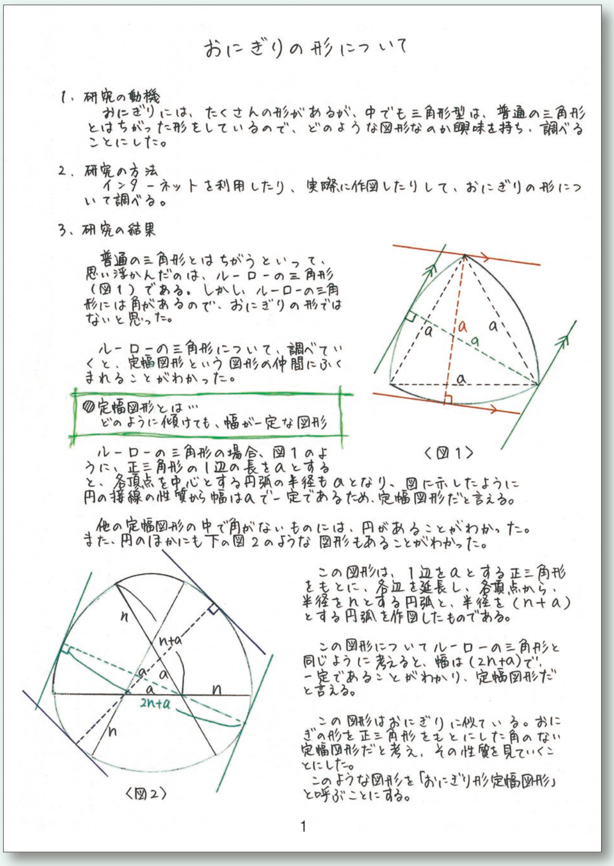
◇感想

今回、"メビウスの輪を半分に切るとなぜバラバラにならないのか"ということに着目して研究を進め、自分なりに調査の仕方を考えて調べ、答えが見つかったり、新たなことを発見したときはとても楽しかったです。メビウスの輪のしくみについてよくわかったので、今度は切り方を半分ではなくしたり、ねじる回数を変えてみたりして、さらに発展させていきたいと思いました。この研究を通して、ひらめいたときの「あっ!!」という瞬間が数学で一番楽しい瞬間じゃないかと思いました。

(4)

メビウスの輪について，実際の実験を通じながら疑問を検証し，さらに次の疑問につなげていく過程が研究として非常に興味深かったです。今回はメビウスの輪を半分に切るとなぜ2つの輪に分割されないのかという視点での考察でしたが，ひねる回数を変えたり，切る線の位置を変えたりするとさらに変化に富んだ結果が出ますので，さらに発展をさせてみてください。数学に向けた強い関心を感じました。

「 おにぎりの形について 」



おにぎりの形について

1、研究の動機
　おにぎりには、たくさんの形があるが、中でも三角形型は、普通の三角形とはちがった形をしているので、どのような図形なのか興味を持ち、調べることにした。

2、研究の方法
　インターネットを利用したり、実際に作図したりして、おにぎりの形について調べる。

3、研究の結果

　普通の三角形とはちがうといって、思い浮かんだのは、ルーローの三角形（図１）である。しかしルーローの三角形には角があるので、おにぎりの形ではないと思った。

　ルーローの三角形について、調べていくと、定幅図形という図形の仲間にふくまれることがわかった。

◎定幅図形とは…
　どのように傾けても、幅が一定な図形

〈図１〉

　ルーローの三角形の場合、図１のように、正三角形の１辺の長さをaとすると、各頂点を中心とする円弧の半径もaとなり、図に示したように円の接線の性質から幅はaで一定であるため、定幅図形だと言える。

　他の定幅図形の中で角がないものには、円があることがわかった。また、円のほかにも下の図２のような図形もあることがわかった。

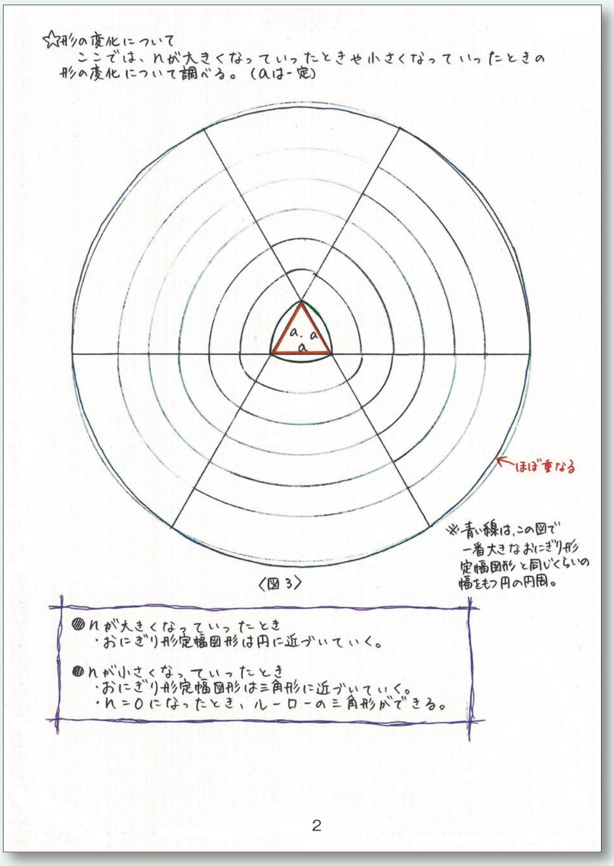
〈図２〉

　この図形は、１辺をaとする正三角形をもとに、各辺を延長し、各頂点から、半径をnとする円弧と、半径を（n+a）とする円弧を作図したものである。

　この図形についてルーローの三角形と同じように考えると、幅は（2n+a）で一定であることがわかり、定幅図形だと言える。

　この図形はおにぎりに似ている。おにぎの形を正三角形をもとにした角のない定幅図形だと考え、その性質を見ていくことにした。
　このような図形を「おにぎり形定幅図形」と呼ぶことにする。

1



☆形の変化について
　ここでは、nが大きくなっていったときや小さくなっていったときの形の変化について調べる。（aは一定）

〈図３〉

※青い線は、この図で一番大きなおにぎり形定幅図形と同じくらいの幅をもつ円の円周。

◎nが大きくなっていったとき
　・おにぎり形定幅図形は円に近づいていく。

◎nが小さくなっていったとき
　・おにぎり形定幅図形は三角形に近づいていく。
　・n＝0になったとき、ルーローの三角形ができる。

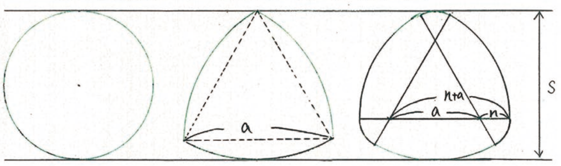
2

身近なおにぎりの形を研究したことは，とても面白いと思います。授業で扱った円や三角形を発展させて，ルーローの三角形という定幅図形について調べたことは，発展性がありとても素晴らしいと思います。説明に用いられている図も丁寧に作図されており，わかりやすかったです。私たちの身のまわりにある定幅図形についてさらに広く調べてみると何か発見があるかもしれません。これからも興味がわいたことを数学を活用して，もっと調べてみましょう。

中学校３年生 作品例

☆面積について

ここでは、同じ幅を持つおにぎり形定幅図形について、nを変化させたときの、面積の変化について調べる。($S=2n+a$で一定)



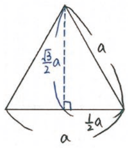
〈図4〉

※幅をS、正三角形の1辺の長さをa、おにぎり形定幅図形の小さなおうぎ形の半径をnとする。(図4)

※正三角形の面積は、三平方の定理を使って

高さ　$\frac{\sqrt{3}}{2}a$

面積　$\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$　を使う。(図5)



〈図5〉

◍円の面積

幅Sは直径→半径は$\frac{1}{2}S$

$$\pi\left(\frac{1}{2}S\right)^2=\frac{1}{4}\pi S^2$$

◍ルーローの三角形の面積

(半径aで中心角60°のおうぎ形)×3－(辺がaの正三角形)×2

aは幅と等しいので、$a=S$

よって　$\pi S^2\times\frac{60}{360}\times3-\frac{\sqrt{3}}{4}S^2\times2$

$=\frac{1}{2}S^2(\pi-\sqrt{3})$

⇩

$\pi=3.14$，$\sqrt{3}=1.73$とすると、

〈円〉約$0.785S^2$　〈ルーローの三角形〉約$0.705S^2$　となり、円の方が面積が大きい。

⇩

図3の読み取りと合わせると、

nが大きくなり、円に近づいていくと、面積が大きくなり、

nが小さくなり、ルーローの三角形に近づくと面積が小さくなる。

⇩

nが最も小さいとき、つまり$n=0$のときにルーローの三角形になる

↳ルーローの三角形が最も面積が小さい。

3

また、nが大きくなっていくとき、幅Sの中のaの割合が小さくなっていく。

つまり、面積が最も大きいときは、aが最も小さい$a=0$のときである。

◍おにぎり形定幅図形の面積

(半径nで中心角60°のおうぎ形)×3＋(半径$n+a$で中心角60°のおうぎ形)×3

－(1辺aの正三角形)×2

$$\pi n^2\times\frac{60}{360}\times3+\pi(n+a)^2\times\frac{60}{360}\times3-\frac{\sqrt{3}}{4}a^2\times2$$

これにn，aを代入すれば、面積を求めることができる。

ここで、面積が最も大きいときを考える。

上の式に$a=0$を代入すると、

$\pi n^2\times\frac{60}{360}\times3+\pi(n+0)^2\times\frac{60}{360}\times3-\frac{\sqrt{3}}{4}\times0\times2$

$=\pi n^2$

$S=2n+a$で、$a=0$より、$\therefore S=2n \Rightarrow n=\frac{1}{2}S$

よって、

$\pi n^2=\pi\left(\frac{1}{2}S\right)^2=\frac{1}{4}\pi S^2$ ←円の面積

⇩

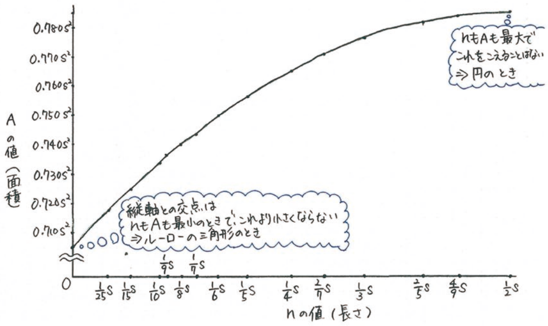
面積が最も大きいときは、円である。

◍おにぎり形定幅図形の面積の変化のグラフ

$n=\frac{1}{2}S,\ \frac{1}{3}S\ \cdots$ のように変化させていく。

面積(Aとする)の変域は、$0.705S^2\leqq A\leqq0.785S^2$

nの変域は、$0\leqq n\leqq\frac{1}{2}S$



4

☆周の長さについて

ここでは同じ幅を持つおにぎり定幅図形について、さまざまな形のときの周の長さについて調べる。

各部分の長さについては、先ほどと同じように文字に置きかえる。

◍円周

$2\pi\times\frac{1}{2}S=\pi S$

◍ルーローの三角形の周の長さ

$2\pi S\times\frac{60}{360}\times3=\pi S$

◍おにぎり形定幅図形の周の長さ

$2\pi n\times\frac{60}{360}\times3+2\pi(n+a)\times\frac{60}{360}\times3$

$=\pi(2n+a)$

$S=2n+a$なので、これはπS

⇩

円周の長さは形、面積がちがってもすべて等しい

☆定幅図形の利用

どのように傾けても幅が変わらない定幅図形の性質は日常生活の中で使われている。

〈例〉

・マンホールのふた

・硬貨

↳イギリスの硬貨にはルーローの七角形の形をした硬貨もある。(右の写真)

このような例で使われている定幅図形の形はほとんどが円だ。しかし、面積は円が最大なので、資源を最も無駄にしている。

もし、定幅図形ならどんな形でもよいのであれば、ルーローの三角形の形にするのが最もコストダウンにつながる。

また、車や、自転車のタイヤにもこのことを応用できると思った。周の長さは変わらないので、1回転あたりに必要なエネルギーも変わらないと思う。経済的に言って、形をルーローの三角形に近づけるのが良い。

4、考察(まとめ)

○おにぎりの形は円やルーローの三角形は全くの別物だと思っていたが、おにぎりの形を基本としたときの、$a=0$や$n=0$の場合の形だとすると別物ではないと思った。

○同じ周の長さで最大の面積の円、同じ幅を最小の面積でまかなうルーローの三角形には、それぞれちがった場面での効率の良さがあり、今後、日常生活に応用していけると思った。

5

5、感想

今回は、面積を求める中で、考えやすくするため、$\pi=3.14$，$\sqrt{3}=1.73$として、グラフをかいたが、実際は文字のまますべきなのかなと思った。また、インターネットで調べると、面積、周の長さについてわかったことの定理があるようだ。見たこともない文字が並んでいたが、本当に性質を説明しようと思ったら、しっかりと証明する必要があるので、今後数学を学ぶ上で理解できるようになったらいいなと思った。

また、コストの面から、マンホールのふたやタイヤの形についてふれたが、実際、ルーローの三角形になっていないということは、何か問題があるということだろう。数学と現実との違いを感じた。

◍参考資料

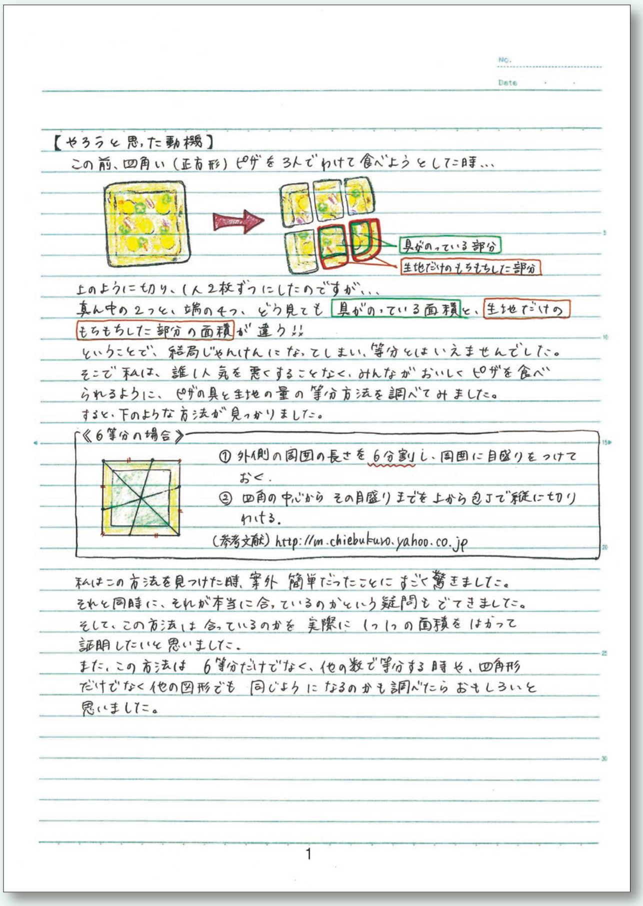
・「滑らかな定幅図形」
<http://crane.hobby-web.net/math/tofuku-2.htm>

・太田敏之「マンホールはなぜ丸い」
<http://www76.biglobe.ne.jp/~math-tota/su2/manhole.htm>

6

※参考資料のURLは作成時のものとなります。

「 ピザの等分方法 」


【やろうと思った動機】
この前、四角い（正方形）ピザを3人でわけて食べようとした時…

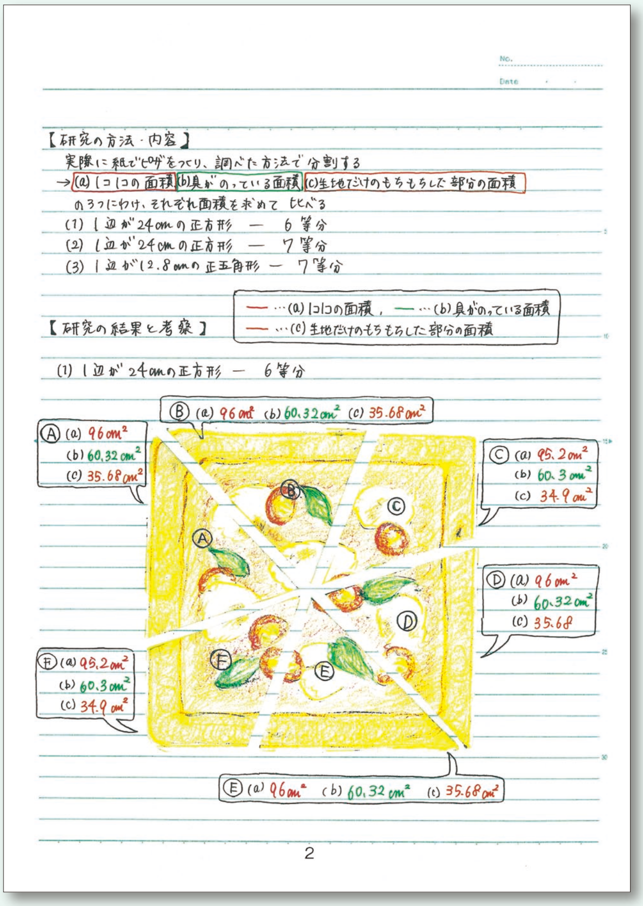
具がのっている部分
生地だけのもちもちした部分

上のように切り、1人2枚ずつにしたのですが…
真ん中の2つと、端の4つ、どう見ても具がのっている面積と、生地だけのもちもちした部分の面積が違う!!
ということで、結局じゃんけんになってしまい、等分とはいえませんでした。
そこで私は、誰1人気を悪くすることなく、みんながおいしくピザを食べられるように、ピザの具と生地の量の等分方法を調べてみました。
すると、下のような方法が見つかりました。

《6等分の場合》
① 外側の周囲の長さを6分割し、周囲に目盛りをつけておく。
② 四角の中心からその目盛りまでを上から包丁で縦に切りわける。
（参考文献）http://m.chiebukuro.yahoo.co.jp

私はこの方法を見つけた時、案外簡単だったことにすごく驚きました。
それと同時に、それが本当に合っているのかという疑問もでてきました。
そして、この方法は合っているのかを実際に1つ1つの面積をはかって証明したいと思いました。
また、この方法は6等分だけでなく、他の数で等分する時や、四角形だけでなく他の図形でも同じようになるのかも調べたらおもしろいと思いました。

1


【研究の方法・内容】
実際に紙でピザをつくり、調べた方法で分割する
→(a)1コ1コの面積 (b)具がのっている面積 (c)生地だけのもちもちした部分の面積
の3つにわけ、それぞれ面積を求めて比べる
(1) 1辺が24cmの正方形 ― 6等分
(2) 1辺が24cmの正方形 ― 7等分
(3) 1辺が12.8cmの正五角形 ― 7等分

【研究の結果と考察】
―…(a)1コ1コの面積，―…(b)具がのっている面積
―…(c)生地だけのもちもちした部分の面積

(1) 1辺が24cmの正方形 ― 6等分

Ⓑ (a) 96cm² (b) 60.32cm² (c) 35.68cm²
Ⓐ (a) 96cm² (b) 60.32cm² (c) 35.68cm²
Ⓒ (a) 95.2cm² (b) 60.3cm² (c) 34.9cm²
Ⓓ (a) 96cm² (b) 60.32cm² (c) 35.68
Ⓕ (a) 95.2cm² (b) 60.3cm² (c) 34.9cm²
Ⓔ (a) 96cm² (b) 60.32cm² (c) 35.68cm²

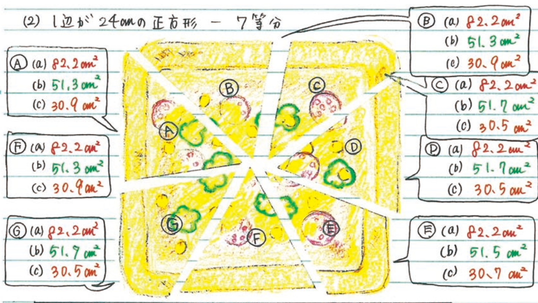
2

かわいらしさと，わかりやすいイメージ図に丁寧な姿勢が感じられました。おそらく，等分するときにピザの具がどうついているか友達や家族でもめているのだろうという話題で盛り上がりました。ただ，6分割の証明はありましたが，7分割や正五角形の等分割について説明がなかったのが残念でした。まだ高校1年生なので，不定形の面積の等分割はどうすればよいか等，考えるテーマが今後増えてくると思います。ぜひ次年度の成長された自由研究を楽しみにしています。

高等学校 1年生作品例

単位(cm²)	(a) 1コ1コの面積	(b) 具がのっている面積	(c) 生地だけの もちもちした部分の面積
Ⓐ	96	60.32	35.68
Ⓑ	96	60.32	35.68
Ⓒ	95.2	60.3	34.9
Ⓓ	96	60.32	35.68
Ⓔ	96	60.32	35.68
Ⓕ	95.2	60.3	34.9
最大と最小の差	0.8	0.02	0.78

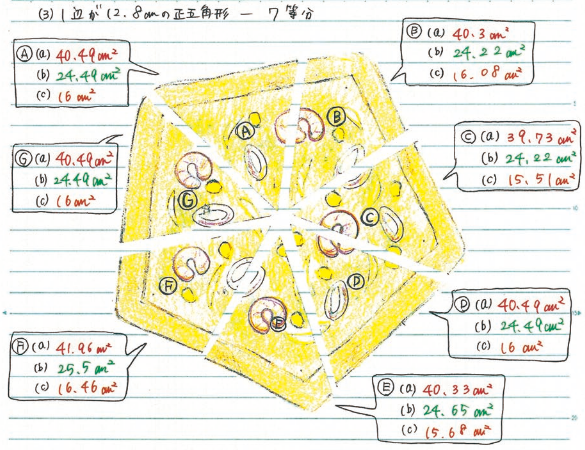
(2) 1辺が24cmの正方形 ― 7等分



単位(cm²)	(a) 1コ1コの面積	(b) 具がのっている面積	(c) 生地だけの もちもちした部分の面積
Ⓐ	82.2	51.3	30.9
Ⓑ	82.2	51.3	30.9
Ⓒ	82.2	51.7	30.5
Ⓓ	82.2	51.7	30.5
Ⓔ	82.2	51.5	30.7
Ⓕ	82.2	51.7	30.5
Ⓖ	82.2	51.3	30.9
最大と最小の差	0	0.4	0.4

3

(3) 1辺が12.8cmの正五角形 ― 7等分

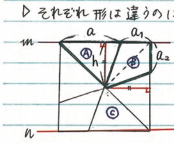


単位(cm²)	(a) 1コ1コの面積	(b) 具がのっている面積	(c) 生地だけの もちもちした部分の面積
Ⓐ	40.49	24.49	16
Ⓑ	40.3	24.22	16.08
Ⓒ	39.73	24.22	15.51
Ⓓ	40.49	24.49	16
Ⓔ	40.33	24.65	15.68
Ⓕ	41.96	25.5	16.46
Ⓖ	40.49	24.49	16
最大と最小の差	2.23	1.28	0.95

4

(1),(2),(3)、どれも多少の誤差はあったが、(a),(b),(c)ともほぼ等しいといえる!!

▷ それぞれ形は違うのに、どうして等しいのか



Ⓐ：$a \times h \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}ah$

Ⓑ：$a_1 + a_2 = a$

$a_1 \times h \times \frac{1}{2} + a_2 \times h \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}ah$

※h(高さ)はどこも等しいため、Ⓐ、Ⓑの面積は等しい。

また、正方形なので $m // n$ より、
Ⓐ・Ⓒなどは合同といえる。

▷ 具がのっている部分の面積が等しいことも、同じようにいえる。

▷ 生地だけのもちもちした部分の面積は、1コ1コの面積から具がのっている部分の面積をひいて求められるため、もちろんこれも等しくなる。

【感想】
調べた等分方法は、少しの誤差はあったがほぼ等しくわけることができるとわかった。
レポートを書く時は、図と表を用いてわかりやすくしたのと、3つの面積をそれぞれ色を変えて書いたので、見やすくなったと思う。 表も、小数点をそろえて書くことで、わかりやすくなるよう工夫した。
この証明で、この等分方法はいいとわかったが、最初に自分が書いた、単純な分割方法の時の面積の差の大きさと比較してみたらもう少しよかったがなと思う。
今回はピザだったけど、周りをクリームやフルーツで飾ったケーキなどでも使えると思った。
この方法があれば、誰も嫌な思いをすることなくみんながハッピーになれると思うので、他の人にも教えたいと思う。
また、今回は正方形や正五角形など、きれいな図形ばかりだったので、もう少し複雑な図形はどうしたらよいのか、考えてみようと思う。

5

「円順列の一般公式」

1.イントロダクション

> 赤い椅子5個と白い椅子5個を円状に並べる並べ方は何通りあるか。ただし、同色の椅子は区別せず、回転して同じ順序になる位置は同じ並べ方とみなす。（第1回大阪府数リンピック　第3問）

［解答］

・皆さんはどう解くだろうか。おそらくいくらかの場合分けをして図をいくつも書きながら重複を考えていくだ

ろう。

私が発見した定理を用いると、以下のように解ける。

n=10　p=5　q=5　であるから、　a=5 より、

$$X=\frac{1}{10}\left\{\left|S^{f_0}\right|+(5-1)\left|S^{\frac{f_{10}}{5}}\right|\right\}=\frac{1}{10}\left(\frac{10!}{5!5!}+(5-1)\frac{2!}{1!1!}\right)=26$$　（通り）…（答）

記号の説明もせずに、解答し唐突に思われたであろうが、この定理はこの種の「代表類の個数」を計算する際に、大変便利なものであると思われる。次章以降で、詳説することにする。

1

2. 動機

実は冒頭の問題、私も最初にこの問題に出会ったときはいくつもの図を描き、きちんとした場合分けに注意を払いながら解いた。

しかし、それでは時間がかかるうえ、より複雑になると数えるミスも招くだけでなく、そして何より、数の拡張が難しいと感じた。

そこで、私は、このような円順列の類題を解いているうちに、

Burnside の定理

に出会い、それを冒頭のような問いの円順列において効果的に用いられる方法を考えるうち、以下のような定理を見出した。

2

3.研究の方法

私の研究の経路をそのままたどることにすると、まず「Burnside の定理」を紹介しないわけにはいかない。円順列の問題を調べていくうえで出会った定理だ。

【Burnside の定理】

> G：有限群、S：有限集合　とし、G が S に作用している時、以下が成立。
> $$|G軌道|=\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}|S^g|$$

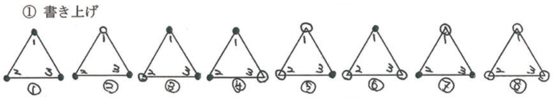
＊ここでの　$|G軌道|$　は「変換（回転）の操作の集まり」、

S^g　は$S^g=\{x\in S|g\cdot x=x\}(g\in G)$　で定義される、

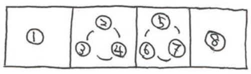
「G の元 g で不変であるような S：この操作の対象となるすべての場合」のこと。

例えば、「三角形のペンダント。重複を許して、黒の碁石と白の碁石を頂点におくとき、何種類のペンダントができるか」を考えてみると

① 書き上げ



よって，まとめると，



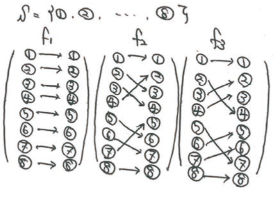
と4つのパターンと分かる

② Burnside の定理を用いてみると、$m=\frac{1}{3}\times 12=4$

∵ これは $G=\left\{\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix}\right\}$ より $\frac{1}{|G|}=3$

変換 f_1　f_2　f_3

$S=\{①,②,\cdots,⑧\}$



より，

$$\sum_{g\in G}|S^g|=|S^{f_1}|+|S^{f_2}|+|S^{f_3}|$$
$$=8+2+2$$
$$=12$$

による．

3

見た目こそ険しいが、具体例に置き換えてみれば意外とわかりやすいものである。すなわち、この定理は「ある操作」によって生じる「軸」となるものから派生したいわば「子分」の個数からもともとの「親分」、すなわち「軸」の数を求められるということを言っているのだ。

私がここで驚いたのが、この「親分」、「子分」の関係である。それまで単なる別々のものとして場合分けしていたものが、実は何人かの「親分」の存在に統合できたのだから！しかもその統合の仕方はすべて系統だった「操作」によって語ることができたのだ。私がいま議論しているのは「回転」という操作であった。

回転しておなじになるものは同じとみなす

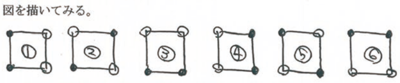
これは美しいと思った。そしてもしや今自分が頭を悩ませている円の順列の「場合分け」の問題にも応用できるはずだ、と考えたのだ。

まずは合計3つの球を並べるところから始まり、いくつもの例を観察することでその中に規則性や普遍性を見つけていくことにした。

とにかく「親分」さえを追っていき、それぞれについてどれだけ回転させて何人の「子分」を作ることができるかを念頭に置くと、次第に糸がほどけていった。

それまでの数え上げの方針では何が頭を悩ませていたのか、が分かったのだ。それは一人の親分から作ることができる子分の数がそれぞれ違う、ということだ。例えば、こういうことだ。

【何が頭を悩ませていたのか？】

> もっとも単純な円順列を考えてみよう。
> 「白玉2個と黒玉2個を正方形の上に置きます。回転しても同じである者は同一な置き方とみなした時、その置き方はなん通りありますか。」
> ［解］図を描いてみる。
>
> 
>
> この時、回転して同じおものをまとめるとこのようになる；
> (①、②、④、⑥)、(②、⑤)
> ①では親分からは4人も子分が作れる一方、②からは子分が1人しか作ることができるのだ。

いくつか同様の例を考えると、それは「より小さな円順列が出来上がっていたのである。

4

高等学校 2年生作品例

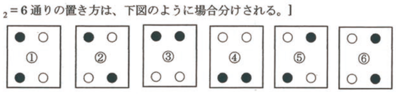
4.研究の結果

以上の考察から得られた結果をまとめてみる。

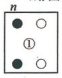
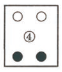
まず私の見出した定理で用いる記号を簡単に定義しておく；

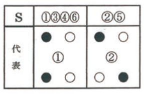
① S={各頂点に名前を付けた正 n 角形の各頂点（n 個）に p 個の$\boxed{p}$、q 個の$\boxed{q}$、r 個の$\boxed{r}$、…を置いてできる置き方全体}

［ 例えば、正方形の 4 つの頂点に 2 個の黒玉と 2 個の白玉を置いてできる${}_4C_2=6$ 通りの置き方は、下図のように場合分けされる。］



②f_k：正 n 角形の重心の周り$\frac{360^\circ}{n}\times k$ 回転

［ 先程の例では、f_1() =  ］



③$S^{f_k}=\{x\in S^n \mid f_k(x)=x\}$　　④X＝(求める場合の数)

⑤p、q、r、…の（1 を含む）公約数を a、b、c、…（a＞b＞c＞…）とする

この時、以下の（公式）を得る。

$$X=\frac{1}{n}\left[\left|S^{f_0}\right|+(a-1)\left|S^{\frac{f_n}{a}}\right|+(b-1)\left\{\left|S^{\frac{f_n}{b}}\right|-\left|S^{\frac{f_n}{a}}\right|\right\}+(c-1)\left\{\left|S^{\frac{f_n}{c}}\right|-\left|S^{\frac{f_n}{b}}\right|-\left|S^{\frac{f_n}{a}}\right|\right\}+\cdots\right]$$

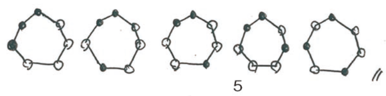
それではここからいくつかの例を挙げたいと思う。

［ 先程の例では、$X=\frac{1}{4}\left\{\left|S^{f_0}\right|+(2-1)\left|S^{\frac{f_4}{2}}\right|\right\}=\frac{1}{4}\left\{\frac{4!}{2!2!}+(2-1)\frac{2!}{1!1!}\right\}=2$ で、

確かに 2 通りとなる。］

1. n=7 p=3 q=4 ： a=1（3 と 4 は互いに素）だから、$X=\frac{1}{7}\left|S^{f_0}\right|=$

$\frac{1}{7}\cdot\frac{7!}{3!4!}=5$ （通り）［以下に示す］



5

2. n=10 p=4 q=6 ： a=2 より、$X=\frac{1}{10}\left\{\left|S^{f_0}\right|+(2-1)\left|S^{\frac{f_{10}}{2}}\right|\right\}=$

$\frac{1}{10}\left(\frac{10!}{4!6!}+(2-1)\frac{5!}{2!3!}\right)=22$ （通り）

3. n=8 p=4 q=4 ： a=4, b=2 より、X ＝

$\frac{1}{8}\left[\left|S^{f_0}\right|+(4-1)\left|S^{\frac{f_8}{4}}\right|+(2-1)\left\{\left|S^{\frac{f_8}{2}}\right|-\left|S^{\frac{f_8}{4}}\right|\right\}\right]$

＝

$\frac{1}{8}\left\{\frac{8!}{4!4!}+(4-1)\frac{2!}{1!1!}+(2-1)\left(\frac{4!}{2!2!}-\frac{2!}{1!1!}\right)\right\}=10$ （通り）

5. a,a,b,b,c,c,c,c の 8 個の文字全体を机の上で円形に並べる方法は何通りあるか。ただし、回転して重なり合う並びは同じ並びとする。［3 文字への拡張 ］

$X=\frac{1}{8}\left(\left|S^{f_0}\right|+(2-1)\left|S^{\frac{f_8}{2}}\right|\right)=\frac{1}{8}\left(\frac{8!}{2!2!4!}+\frac{4!}{1!1!2!}\right)=5$ （通り）

6

5.感想、今後の展望

Burnside の定理から始まり、かなり長い道のりだったが、途中ではいかにまとめきるか、というのを常に目標に持っていた。それはとても美しく、魅力的だった。確かに、場合分けが煩雑になることもあったが、結局は親分と子分の関係を探る旅なのだから、いずれまとまってくるだろう、と思ったが、実際にそうなって心底うれしかった。ここに数学の面白さの一端があるような気がして、この研究ができて本当に良かったと思う。

ただし、まだ望むとすれば、課題がある。3 次元である。平面にこのような統一性を見ることができたのだから、空間の図形の頂点に同じ碁石を置いたところで、本質は変わらないはずだ。今後折に触れてこの問題にも取り組んでいきたい。

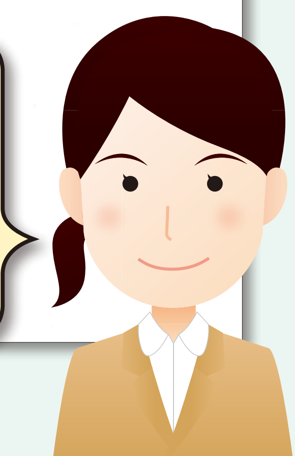
7

6.参考文献

1．対称性からの群論入門　M.A.アームストロング著
　佐藤信哉　邦訳，Springer Japan，2007
2．群論入門　国吉秀夫著，サイエンス社，1975

8

大阪府数学オリンピックの円順列の問題を，自分で見つけられた方法で解かれたのはすごく面白かったです。ただBurnsideの方法としてすでに知られていることなのですがそれにも注意され，逆にBurnsideの定理を具体的に理解するいい問題だったと思います。非常に面白いと思いました。



ご紹介した自由研究作品の他にもこんな自由研究のテーマがありました

小学校低学年 タイトル一覧
入るはずないのに!!
ぶらり途中下車で運賃が安くなる!?
ぶどうのみのつきかたをしらべる
わたしの水かさどのくらい？
熱気球大作戦　～ぼくが空気の力で浮かぶには～
おこづかいのきめ方（みんなと同じ位のひみつ）
ピアノの音のなぞ
ごまたまごのはこのなぞ
コインをうごかしてぎゃく三角形にする
私の行きたい五つの国を短時間で旅するためには
ぼくが10万歩歩いたら
スーパーサウルスは、何が、何こ分の厚さ
すごいよ！かけざんのひみつ、みーつけた！
サイコロをふってどれが多い
僕の食べるお米は何粒？
そろばんでおかねのけいさんをしよう
みじかなもののかさしらべ
立方体をつんで、よく見てみよう
さん数自由けんきゅう　～サイコロの面のひみつ～
すうじのかくれんぼ
野きゅうの中のゆかいな数字たち
五角形がふえるとどうなる？
100円パーキングちゅう車りょう金調べ
24面体のふしぎ？？
3分時計を作ろう
れんぞくした10個の数のたし算のひみつ
つかった水はどれくらい？
ひみつのかたち
九九と九つのます
三年生でも調べられる!?円のまわりの長さ
円の外に円　円の内に円
6年間の通学の道のりで地球のどこまで行ける？
わたしのたん生日は何曜日？あまりのあるわり算とカレンダーのひみつ～
どれがいちばんおおくのめるかな
箱づめはいくつまで？
わたしの一日にかくれている算数もんだいをはっ見！
そろばんはすばらしい計算きだ
ひとふでがきができるかな
九九ふしぎ発見!!
あたりがでる回数は何回？
サイコロを作ってみたよ　～どの目が多く出るのかな？
四色定理って何？
小ぜにをへらしてスマートおさいふ
算用記号は「何の形なのか？」「いつできたのか？」
円をかさねていったらどのようなもようになるか調べよう
へんしん　さんかく！
じてんしゃとあるきどっちがいい？
数字のピラミッドのふしぎ

小学校高学年 タイトル一覧
富士山ってどれだけ大きい山？
なぜ本を並べるとでこぼこか
新幹線・在来線特急の速さを比べよう
私のかみの毛何本？
お得なお店はどこ？
八幡宮の鳥居の高さを測ろう
歩行者用の信号機調べ
7の倍数のひみつ！
ペットボトルの表面積
$\sqrt{5}$を分数であらわすには
算数をいかして、エコな模様替え
オリジナルカップラーメンは何種類できるのか!?
曲面にかこまれた貝の体積が求められるか
100m走のタイムと歩幅歩数の関係
山頂のわき水は何日で海に着くか。
多面体の強度
食べられる！立体～お城作りに挑戦！～
図形で考えるエッフェル塔の美
弦の音階のしくみを探る～バイオリンの場合～
校舎の高さは？
サッカーボールの黒と白の表面積を比べよう。
髪の毛の数を調べよう！
円周率は本当に3.14 ？
コピー用紙の秘密を解き明かせ!!
三角形で木の高さを測る
わが家の使用電力から1人分の使用電力をもとめる事はできるのか
時計の針のヒミツ
トランプマジックのなぞを解く
カレンダーマジック
次の図の中に正三角形は全部で何個ありますか
せんぷう機の風はどこまで届く？
手を使った数当てゲームで勝つ方法を考える。
トイレットペーパーの一回まきは何cm ？
月まで遠いか近いのか？～私が月まで歩いたら～
めざせ5000本安打!!
なぜ当たるの？トランプマジック
あまりのあるわり算をわり進んでみると…
席がえは何通りあるの？？
友達100人できるかな？
ガソリン代UP!!自動車で日本一周したらいくらお金がかかるの？
四角形の七変化（7つじゃないけど）
ローソクの燃える時間を予測せよ！
簡易信号機のひみつ
飲み物の糖分
三角形に内接する正方形？
電車の運ちんときょりの関係
私の生活と電気
球体の秘密
目的地までの時間の研究

中学校 タイトル一覧
速く連絡網をまわすには？
ボールペンに突撃インタビュー　ボールペンの経済的比較
自分の体の体積を知ろう
虚像を数学で解き明かす
巴戦　本当に公平なの？
駐車場の時間と料金の関係
ケーキを等しく分けよう！
歯みがき粉1本分には何日分入っているのか？
数学に流れる音楽
星型多角形の角の性質
乱数表の可能性～円周率の探究～
ミウラ折りについて
めざましじゃんけんの不思議
鏡の研究
通学にかかる交通費
世界1のtowerを建てよう！
正しいくじ引きの屋台とは～屋台と期待値～
バスの運賃と距離の関係
ガソリンと車
信号の待ち時間について
音階を数学で表そう～金管楽器における音階～
一刀切りに挑戦
円を使って正確な正三角形を効率良く大量にできるだろうか？
しっかりと楽をする
サイコロの秘密
球の体積と表面積を求める公式を確かめる
どこまでもついてくる闇の関係
お得な通学手段
標本調査の検証　～選挙の出口調査は正確なのか～
自然数の和と偶数の和と奇数の和の求め方
メロスの全力を検証
夏休みの登校日のために定期は必要？
新しい公式を自分でつくろう！
鉛筆とシャープペンシルどちらを使った方がお得？
トマトで迫る球の体積
広島市中心部の11の橋
エレベータと階段　早いのはどっちだ!?
卓球のサーブを上手にするには
蜂から人間が学ぶこと
曜日・簡単算出法！
何回折ったら丸くなる？　～山おり、谷おり、三角形が丸に～
箱の中にビー玉は何個入るか
対向車ナンバー予想ゲーム必勝法
探究！アルファベット筆算
指数の簡単な求め方を使い、555を求めてみよう
出来るだけたくさんのものを入れたい
独楽（こま）
もとの数とその逆数の関係
二進法―点字の整理―
平方数同士の差の不思議
整数の二乗のきまり
折り紙の辺の等分法
斜塔の傾きと高さの関係について
板チョコを無限に食べる方法　～本当に実現することができるのか!?～

高等学校 タイトル一覧
外心と傍心、内角の二等分線の関係について
線分を任意の個数に等分する方法　"漸近法"についての考察
階乗進法とベキ進法～ｎ進法の拡張～　全ての桁で同じ「進法」でなくてもいいではないか。
青の限界
ひまわりの螺旋
私の未来の子どもの血液型は？
花火と自分との距離はどれくらいか
三次元接吻数問題に挑む
日本中が、Ａ型になる日は来るのか。
コーヒーカップの描く軌跡
星型多角形・多面体の分類
美しい方陣
日本の算額研究
「負の次元」「虚数の次元」を描く
スメロンの数学的理論
何乗しても下ｎ桁が変わらない数
ベン図についての七章
葉髙﨑橋
時計の数列
PINEAPPLEとｐ進数
はとめ返しを極める
おにぎりはなぜ三角なのか
正多角形の作図
酵素パワーで野菜ロケットを飛ばそう！
ゲームを数学する～新しいゲームの作成と奥深さの表現～
汎魔方陣の研究　～５次汎魔方陣の総数を桂馬飛び法から導く～
数列の表とマスの重なりについて
野球の最適打順の数学的考察
おとけし～音を数式に変換～
バーコードの番号の解明!!！
「モンティホール問題」について
残り物に福？
算額について
もしも火事になったら…　～避難経路の妥当性～
データの特徴を表す関数の作成

その他9000をこえる作品のご応募がありました。

レポートの形式　　小学校用

●規定の大きさ（Ａ４判またはＡ３判）の用紙に，規定の枚数（片面でＡ４判は５枚以内，Ａ３判は２枚以内）を守って，次のように書きます。

・手書きでもパソコン使用でもよい。
　手書きの場合 …………… 鉛筆は濃いもの（ＨＢかＢ）を使い，しっかり，ていねいに書く。
　パソコン使用の場合 …… 印刷したものを送る。（データでは受けつけできません。）

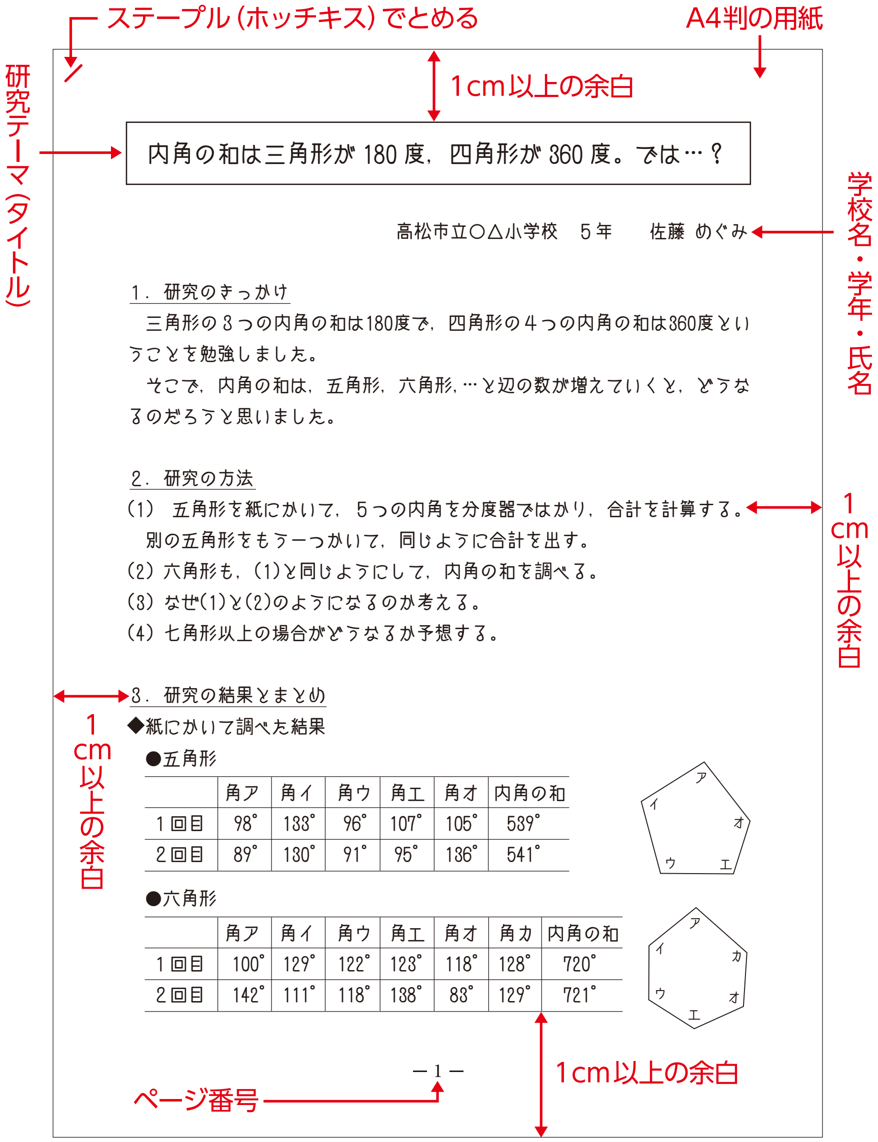
・紙面のまわりに1cm以上の余白をとる。（紙面いっぱいに書かない。）

・１ページ目の最初に，研究テーマ（タイトル），学校名，学年，氏名を入れる。

・各ページの下にページ番号を入れる。

●レポートができ上がったら，紙面の左上を１か所，ステープル（ホッチキス）でとめます。
［注意］ひもでとじたり，クリアファイルに入れたりしないでください。
　　　表紙はつけないでください。

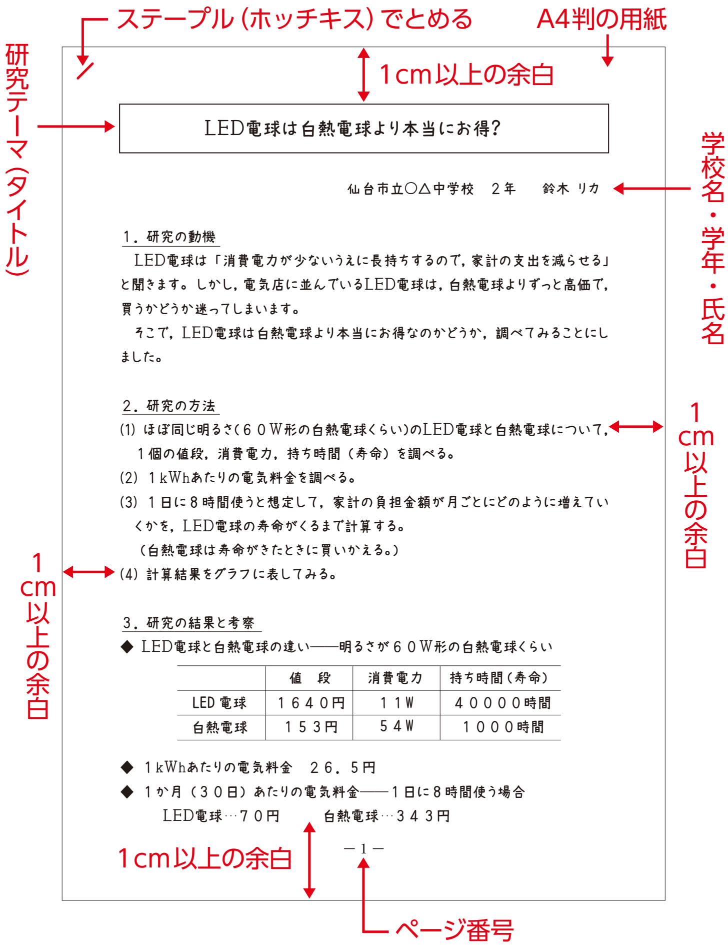
●レポートを応募票とともに送ります。
［注意］応募票は１枚で別に切り離しておきます。（レポートといっしょにとじないでください。）
　　　立体的な作品や，立体物を添付した作品の受けつけはできません。（必要な場合は，写真をレポートに載せてください。）



レポートの形式　　中学校・高等学校用

●規定の大きさ（Ａ４判）の用紙に，規定の枚数（片面で10枚以内）を守って，次のように書きます。

・手書きでもパソコン使用でもよい。
　手書きの場合 …………… 鉛筆は濃いもの（ＨＢかＢ）を使い，しっかり，ていねいに書く。
　パソコン使用の場合 …… 印刷したものを送る。（データでは受け付けできません。）
・紙面のまわりに1cm以上の余白をとる。（紙面いっぱいに書かない。）
・１ページ目の最初に，研究テーマ（タイトル），学校名，学年，氏名を入れる。
・各ページの下にページ番号を入れる。



LED電球は白熱電球より本当にお得?

仙台市立○△中学校　２年　　鈴木 リカ

１．研究の動機

LED電球は「消費電力が少ないうえに長持ちするので，家計の支出を減らせる」と聞きます。しかし，電気店に並んでいるLED電球は，白熱電球よりずっと高価で，買うかどうか迷ってしまいます。

そこで，LED電球は白熱電球より本当にお得なのかどうか，調べてみることにしました。

２．研究の方法

(1) ほぼ同じ明るさ(６０Ｗ形の白熱電球くらい)のLED電球と白熱電球について，１個の値段，消費電力，持ち時間（寿命）を調べる。
(2) １kWhあたりの電気料金を調べる。
(3) １日に８時間使うと想定して，家計の負担金額が月ごとにどのように増えていくかを，LED電球の寿命がくるまで計算する。
　（白熱電球は寿命がきたときに買いかえる。）
(4) 計算結果をグラフに表してみる。

３．研究の結果と考察

◆ LED電球と白熱電球の違い――明るさが６０Ｗ形の白熱電球くらい

	値　段	消費電力	持ち時間（寿命）
LED 電球	１６４０円	１１W	４００００時間
白熱電球	１５３円	５４W	１０００時間

◆ １kWhあたりの電気料金　２６．５円
◆ １か月（３０日）あたりの電気料金――１日に８時間使う場合
　LED電球…７０円　　白熱電球…３４３円

－1－

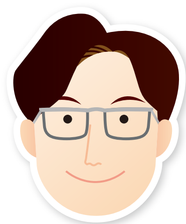
●レポートができ上がったら，紙面の左上を１か所，ステープル（ホッチキス）でとめます。

［注意］ひもでとじたり，クリアファイルに入れたりしないでください。
　表紙はつけないでください。

●レポートを応募票とともに送ります。

［注意］応募票は１枚で別に切り離しておきます。（レポートといっしょにとじないでください。）
　立体的な作品や，立体物を添付（てんぷ）した作品の受け付けはできません。（必要な場合は，写真をレポートに載せてください。）

イラストやグラフなどを入れて，読み手にわかりやすく書こう。



［お問い合わせ先］
（財）理数教育研究所「算数・数学の自由研究」係
〒543-0052 大阪市天王寺区大道4丁目3番23号
Tel.06-6775-6538　Fax.06-6775-6515
E-mail：mathcon@rimse.or.jp

＊この事例集は，「算数・数学の自由研究ってどういうもの？」という声にお応えするため，応募された作品の“学校名”や“氏名”を削除するなどして作成しました。
そのため，一部「レポートの形式」に合っていない場合がありますのでご注意ください。
（作品を応募する際は，「レポートの形式」をご確認ください。）

一般財団法人 理数教育研究所
Rimse

大阪オフィス　〒543-0052 大阪市天王寺区大道4丁目3番23号
TEL.06-6775-6538 ／ FAX.06-6775-6515
東京オフィス　〒113-0023 東京都文京区向丘2丁目3番10号
TEL.03-3814-5204 ／ FAX.03-3814-2156
http://www.rimse.or.jp　E-mail : info@rimse.or.jp